УДК 551.568.85

В. Ф. Чекурін, Ю. В. Бойчук

# МОДЕЛЮВАННЯ СТАЦІОНАРНОГО КОНДУКТИВНО-ПРОМЕНЕВОГО ТЕПЛООБМІНУ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ПЛОСКОМУ ШАРІ

Analytical solutions for 1–D stationary problem of radiation-conductive heat transfer in a piece-wise-homogeneous layered body under convective and radiation energy exchange with the environment has been obtained within the $P_1$-approximation.

**Keywords:** *piece-wise homogeneous slab, heat conductivity, radiation transport*.

У рамках $P_1$-наближення отримано аналітичний розв'язок одновимірної стаціонарної задачі радіаційно-кондуктивного теплообміну в кусково-однорідному шаруватому тілі, що обмінюється теплом із зовнішнім середовищем за променевим та конвективним механізмами.

**Ключові слова:** *кусково-однорідний шар, теплопровідність, перенесення випромінювання*.

Задачі теплообміну в суцільних середовищах за дії кондуктивного, променевого та конвективного механізмів перенесення енергії часто розв'язують у теплофізиці високих температур [7, 8] та різних прикладних дисциплінах – у напівпровідниковій та мікроелектронній технологіях, металургії [3], космічних техніці й технологіях [1], теорії теплофізичних вимірювань [6] тощо.

Проведено [9] дослідження теплообміну у плоско-паралельному шарі за одночасної дії променевого та кондуктивного механізмів. У моделі враховано поглинання та емісію теплового випромінювання середовищем, але не враховано його розсіювання.

У цій статті розглянуто математичну модель кондуктивно-променевого теплообміну в кусково-однорідному тілі, утвореному двома пласкими шарами із різними радіаційними та теплофізичними характеристиками, які перебувають у ідеальному тепловому та радіаційному контакті між собою. У моделі враховано поглинання, розсіяння та емісію ІЧ випромінювання середовищами неоднорідно нагрітих шарів, а також конвективний теплообмін тіла із навколишнім середовищем через одну із його поверхонь. Інша поверхня перебуває у стані ідеального теплового та радіаційного контакту зі стороннім абсолютно чорним тілом, температура $T_0$ якого задана.

Сформульовану задачу стаціонарного теплообміну розв'язували, використовуючи наближення радіаційної рівноваги та розвинення розв'язку за поліномами Лежандра. Цей підхід приводить до безмежної системи звичайних диференціальних рівнянь, яку розв'язували методом редукції.

У рамках $P_1$-наближення для випадку ізотропного розсіювання отримано аналітичний розв'язок задачі. На цій основі проведено кількісні дослідження розподілів температури та потоку випромінювання в кусково-однорідному тілі залежно від теплофізичних і радіаційних характеристик шарів, а також співвідношення їх товщин. Визначено аналітичні залежності температури поверхні тіла та потоку випромінюваної ним ІЧ-енергії, залежно від температури $T_0$.

**Постановка задачі.** Розглянемо тверде тіло у вигляді кусково-однорідного шару, утвореного двома різнорідними шарами з товщинами $2h_1$ та $2h_2$ (рис. 1). Складові 1 та 2 композитного шару є однорідні сірі середовища, які відрізняються ся між собою теплофізичними та радіаційними властивостями. Зовнішнє середовище, яке заповнює півпростір $y > h_1 + 2h_2$, має фіксовану температуру $T_c$, не поглинає і не розсіює ІЧ-випромінювання, у ньому відсутні джерела теплового випромінювання.

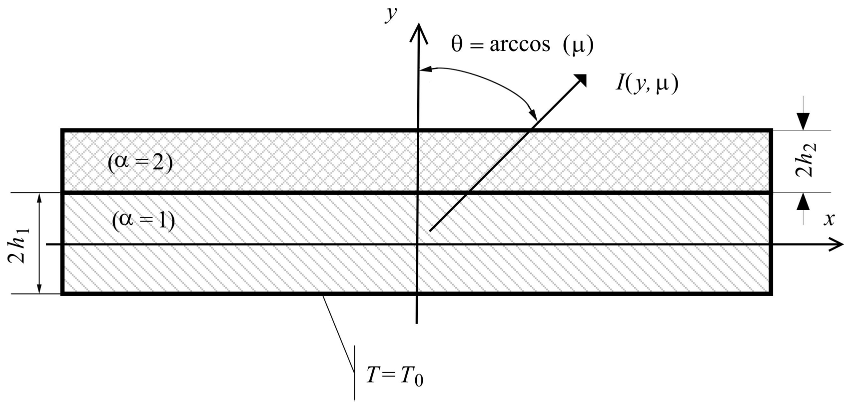



Рис. 1. Система шар–покрив–зонішнє середовище.

Нехай на поверхні $y = -h_1$ тіла задана стала температура $T_0$, на межі $y = h_1$ середовищ 1 та 2 виконуються умови ідеального теплового контакту, а на поверхні $y = h_1 + 2h_2$ умови конвективного теплообміну.

За таких умов стаціонарні температурні поля $T^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$ шарів залежатимуть лише від координати $y$: $T^{(\alpha)} = T^{(\alpha)}(y)$, $y \in Y^{(\alpha)}$, де $Y^{(1)} = (-h_1, h_1)$, $Y^{(2)} = (h_1, h_1 + 2h_2)$, а інтенсивності випромінювання $I^{(\alpha)}$, $\alpha = 1,2$ – від координати $y \in Y^{(\alpha)}$ та кута $\theta \in \Theta = [0, 2\pi)$ між напрямом поширення та віссю $Oy$.

Зведемо задачу до безрозмірних змінних. Для цього виберемо за характерні лінійні розміри в шарах 1 та 2 їхню оптичну товщину $l_\alpha \equiv 1/\beta_\alpha$, де $\beta_\alpha \equiv \kappa_\alpha + \sigma_\alpha$ – інтегральний коефіцієнт послаблення, $\kappa_\alpha$ та $\sigma_\alpha$ – коефіцієнти поглинання та розсіювання в шарі $\alpha$. За характерну температуру виберемо задану температуру $T_0$ поверхні нагрівання.

Безрозмірну просторову координату $\tau = \beta_1 y \in [-\tau_1, \tau_1]$ для шару 1 введемо як $\tau = \beta_1 y$, де $\tau_1 = \beta_1 h_1$, а для шару 2 як $\tau = \beta_2 (y - h_1 - h_2) \in [-\tau_2, \tau_2]$ де $\tau_2 = \beta_2 h_2$. Введемо також безрозмірні температури $\theta^{(\alpha)} = T^{(\alpha)} \big/ T_0$ та безрозмірні інтенсивності випромінювання $J^{(\alpha)} = I^{(\alpha)} \big/ I_b^{(\alpha)}(T_0)$ в шарах 1 та 2, де $I_b^{(\alpha)}\left(T^{(\alpha)}\right) \equiv$ $\equiv n_\alpha^2 \bar{\sigma} \left(T^{(\alpha)}\right)^4 \Big/ \pi$, $n_\alpha$ – показник заломлення в шарі $\alpha$.

Температури шарів $\theta^{(\alpha)}(\tau)$, $\alpha = 1,2$ за таких умов задовольняють стаціонарні рівняння теплопровідності:

$$d_\alpha \frac{d^2 \theta^{(\alpha)}(\tau)}{d\tau^2} + \int_{-1}^{1} J^{(\alpha)}(\tau, \mu)\, d\mu - 2\theta^{(\alpha)}(\tau)^4 = 0 . \qquad (1)$$

Тут $d_\alpha \equiv \lambda_\alpha \beta_\alpha^2 / 2\kappa_\alpha n_\alpha^2 \bar{\sigma} T_0^3$, $\lambda_\alpha$ – коефіцієнт теплопровідності в шарі $\alpha$, $\bar{\sigma} \equiv 5,6704 \cdot 10^{-8}$ W/(m$^2$·K$^4$) – стала Стефана Больцмана.

За прийнятих умов теплообміну функції $\theta^{(1)}(\tau)$ та $\theta^{(2)}(\tau)$ задовольняють співвідношення:

$$-\lambda_2\beta_2 \frac{d\theta^{(2)}(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_2} = c\left(\theta^{(2)}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_2} - \theta_c\right), \qquad \theta^{(1)}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_1} = \theta^{(2)}(\tau)\Big|_{\tau=-\tau_2},$$

$$\lambda_1\beta_1 \frac{d\theta^{(1)}(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tau_1} = \lambda_2\beta_2 \frac{d\theta^{(2)}(\tau)}{d\tau}\bigg|_{\tau=-\tau_2}, \qquad \theta^{(1)}(\tau)\Big|_{\tau=-\tau_1} = 1. \tag{2}$$

Тут $\theta_c \equiv T_c/T_0$ , $c$ – коефіцієнт конвективного теплообміну.

Рівняння теплопровідності (1) розглядатимемо разом із рівняннями перенесення випромінювання в шарах 1 та 2, які, із врахуванням його розсіювання, поглинання та емісії середовищем, матимуть такий вигляд:

$$\mu\frac{\partial J^{(\alpha)}(\tau,\mu)}{\partial\tau} + J^{(\alpha)}(\tau,\mu) - \frac{\kappa_\alpha}{\beta_\alpha}\left(\theta^{(\alpha)}(\tau)\right)^4 - \frac{\sigma_\alpha}{2\beta_\alpha}\int_{-1}^{1} p^{(\alpha)}(\mu',\mu)J^{(\alpha)}(\tau,\mu')d\mu' = 0. \tag{3}$$

Тут $p^{(\alpha)}(\mu',\mu)$ – індикатриса розсіювання – ймовірність розсіювання в напрямку $\theta = \arccos\mu$ променя, що поширюється в напрямку $\theta' = \arccos\mu'$.

Нехай поверхня $\tau = -h_1$ є абсолютно чорна, а межа контакту шарів 1 та 2 $\tau = \tau_1 \equiv \beta_1 h_1$, як і вільна поверхня $\tau = \tau_2 \equiv \beta_2\left(h_1 + 2h_2\right)$ шару 2, є абсолютно прозорі. При цьому функції $J^{(\alpha)}(\tau,\mu)$ слід підпорядкувати умовам:

$$J_-^{(2)}(\tau,\mu)\Big|_{\tau=\tau_2} = 0, \qquad J_+^{(1)}(\tau,\mu)\Big|_{\tau=-\tau_1} = 1,$$

$$J_-^{(2)}(\tau,\mu)\Big|_{\tau=\tau_2} = J_-^{(1)}(\tau,\mu')\Big|_{\tau=\tau_1}, \quad J_+^{(1)}(\tau,\mu)\Big|_{\tau=\tau_1} = J_+^{(2)}(\tau,\mu')\Big|_{\tau=\tau_2}, \tag{4}$$

$$\mu' = \sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\left(1-\mu^2\right)}.$$

Тут $J_+^{(\alpha)}(y,\mu) \equiv J^{(\alpha)}(y,\mu),\ \mu\in(0,1]$ $J_-^{(\alpha)}(y,\mu) \equiv J^{(\alpha)}(y,\mu),\ \mu\in[-1,0)$.

Сформулюємо задачу теплообміну в системі тіло–зовнішнє середовище: знайти функції $\theta^{(1)}(\tau), \tau\in[-\tau_1,\tau_1]$, $\theta^{(2)}(\tau), \tau\in[-\tau_2,\tau_2]$, $J^{(1)}(\tau,\mu), \tau\in[-\tau_1,\tau_1]$, $J^{(2)}(\tau,\mu), \tau\in[-\tau_2,\tau_2]$, $\mu\in[-1,1]$, $J(\tau,\mu), \tau\in[\tau_2,\infty)$, $\mu\in[0,1]$, які задовольняють систему рівнянь (1), (3) та умови (2), (4).

**Наближення радіаційної рівноваги.** Розглянемо випадок радіаційної рівноваги [2], за якого виконується умова:

$$\int_{-1}^{1} J^{(\alpha)}(\tau,\mu)d\mu - 2\theta^{(\alpha)}(\tau)^4 = 0. \tag{5}$$

Тоді розв’язок рівнянь (1) за умов (2) матиме такий вигляд:

$$\theta^{(1)}(\tau) = \frac{\tau\left(\theta_2-1\right) + \tau_1\left(\theta_2+1\right) + 2L\tau_2}{2\left(\tau_1 + L\tau_2\right)},$$

$$\theta^{(2)}(\tau) = \frac{L\left(\tau\left(\theta_2-1\right) + \tau_2\left(\theta_2+1\right)\right) + 2\tau_1\theta_2}{2\left(\tau_1 + L\tau_2\right)}. \tag{6}$$

Тут $L = \lambda_1\beta_1/\lambda_2\beta_2$ , а зведена температура на верхній границі 2-го шару $\theta_2$:

$$\theta_2 = \frac{1+2c\theta_c\left(\tau_2/\lambda_2\beta_2+\tau_1/\lambda_1\beta_1\right)}{1+2c\left(\tau_2/\lambda_2\beta_2+\tau_1/\lambda_1\beta_1\right)}. \tag{7}$$

**Розв'язування рівняння перенесення випромінювання шляхом розвинення розв'язку за поліномами Лежандра.** Для розв'язування рівняння (3) слід задати певну аналітичну структуру індикатриси розсіювання $p(\mu,\mu')$. Подамо її у вигляді розвинення за поліномами Лежандра [2]:

$$p^{(\alpha)}(\mu,\mu') = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\, f_n^{(\alpha)} P_n(\mu) P_n(\mu'), \tag{8}$$

де $P_n(\mu)$ – поліном Лежандра порядку $n$, $f_n^{(\alpha)}$ – матеріальні характеристики середовища $\alpha$, які визначають його анізотропію розсіювання.

На практиці можна обмежуватися скінченною кількістю членів у розвиненні (8) і визначати коефіцієнти $f_n^{(\alpha)}$ на основі експериментальних даних. Оскільки поліноми Лежандра утворюють повну систему функцій, то, вибираючи достатньо велику кількість доданків, можна отримати аналітичне представлення для індикатриси розсіювання $p(\mu,\mu')$ з необхідною точністю.

Розв'язок рівняння (3) також шукатимемо у вигляді розвинення за поліномами Лежандра:

$$J^{(\alpha)}(\tau,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{4\pi} P_n(\mu)\psi_n^{(\alpha)}(\tau), \tag{9}$$

де $\psi_n^{(\alpha)}(\tau)$ – невідомі функції, які визначають координатну залежність густини потоку випромінювання.

Підставляючи подання (8), (9) у рівняння (3) та враховуючи ортогональність поліномів Лежандра, одержимо безмежну систему звичайних диференціальних рівнянь стосовно невідомих функції $\psi_n^{(\alpha)}$ [2]:

$$\begin{gathered}\frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{d\tau} + \left(1-\omega_\alpha\right)\psi_0^{(\alpha)} = 4\pi\left(1-\omega_\alpha\right)\theta^{(\alpha)}(\tau)^4, \\ (n+1)\frac{d\psi_{n+1}^{(\alpha)}}{d\tau} + n\frac{d\psi_{n-1}^{(\alpha)}}{d\tau} + (2n+1)\left(1-\omega_\alpha f_n^{(\alpha)}\right)\psi_n^{(\alpha)} = 0,\ n = 1,2\ldots\end{gathered} \tag{10}$$

**$P_1$-наближення.** Систему (10) можна розв'язувати методом редукції, утримуючи скінченну кількість $N+1$ рівнянь. Для цього приймемо $\psi_n^{(\alpha)} = 0\ \forall n \ge N+1$. За ізотропного розсіювання $f_1^{(\alpha)} = 1$, а $f_n^{(\alpha)} = 0\quad \forall n \ne 0$ і можна обмежитися випадком $N=1$, який відомий в літературі [2] як $P_1$ – наближення. Тоді одержимо таку систему двох рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_1^{(\alpha)}}{d\tau} + \left(1-\omega_\alpha\right)\psi_0^{(\alpha)} = 4\pi\left(1-\omega_\alpha\right)\theta^{(\alpha)}(\tau)^4, \\ \dfrac{d\psi_0^{(\alpha)}}{d\tau} + 3\left(1-\omega_\alpha f_1^{(\alpha)}\right)\psi_1^{(\alpha)} = 0.\end{cases} \tag{11}$$

У цьому наближенні густину потоку випромінювання $J^{(\alpha)}(\tau,\mu)$ в областях $\alpha = 1$ та $\alpha = 2$ згідно з (9) визначають через функції $\psi_0^{(\alpha)}(\tau)$ та $\psi_1^{(\alpha)}(\tau)$:

$$J^{(\alpha)}(\tau,\mu)=\frac{1}{4\pi}\left[\psi_0^{(\alpha)}(\tau)+3\mu\psi_1^{(\alpha)}(\tau)\right]. \tag{12}$$

Звідси випливає, що просторову густину падаючого випромінювання $G^{(\alpha)}(\tau)\equiv 2\pi\int_{-1}^{1} J^{(\alpha)}(\tau,\mu)d\mu$ і густину потоку результуючого випромінювання $q_r^{(\alpha)}(\tau)\equiv 2\pi\int_{-1}^{1}\mu J^{(\alpha)}(\tau,\mu)d\mu$ визначають через функції $\psi_0^{(\alpha)}(\tau)$ та $\psi_1^{(\alpha)}(\tau)$ як $G^{(\alpha)}(\tau)=\psi_0^{(\alpha)}(\tau)$ та $q_r^{(\alpha)}(\tau)=\psi_1^{(\alpha)}(\tau)$.

З урахуванням цього із системи (11) отримуємо рівняння стосовно просторової густини потоку падаючого випромінювання $G^{(\alpha)}(\tau)$:

$$\frac{d^2G^{(\alpha)}(\tau)}{d\tau^2}-K_\alpha^2G^{(\alpha)}(\tau)=-K_\alpha^2 4\pi\theta^{(\alpha)}(\tau)^4,\ K_\alpha^2\equiv 3(1-1/\beta_\alpha). \tag{13}$$

Граничні умови для рівнянь (13) випливають із умов (4) [1]:

$$\begin{gathered}
G^{(1)}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_1}-G^{(2)}(\tau)\Big|_{\tau=-\tau_2}=\frac{2}{3}\left(\frac{dG^{(1)}(\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=\tau_1}-\frac{dG^{(2)}(\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=-\tau_2}\right),\\
G^{(1)}(\tau)\Big|_{\tau=-\tau_1}-\frac{2}{3}\frac{dG^{(1)}(\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=-\tau_1}=4\pi,\quad G^{(2)}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_2}+\frac{2}{3}\frac{dG^{(2)}(\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=\tau_2}=0,\\
G^{(1)}(\tau)\Big|_{\tau=\tau_1}-G^{(2)}(\tau)\Big|_{\tau=-\tau_2}=-\frac{2}{3}\left(\frac{dG^{(1)}(\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=\tau_1}-\frac{dG^{(2)}(\tau)}{d\tau}\Bigg|_{\tau=-\tau_2}\right).
\end{gathered} \tag{14}$$

Розв'язок рівняння (13) є функцією виду

$$G^{(\alpha)}(\tau)=C_\alpha e^{K_\alpha\tau}+C_\beta e^{-K_\alpha\tau}+F_{(\alpha)}(\tau), \tag{15}$$

тут $\alpha=1,2$, $\beta=3,4$, а функцію $F_{(\alpha)}(\tau)$ та коефіцієнти $C_\alpha$, $C_\beta$ визначають як

$$F_{(\alpha)}(\tau)=2\pi K\left(e^{K_\alpha\tau}\int e^{-K_\alpha\tau}\left(\theta^{(\alpha)}(\tau)\right)^4d\tau-e^{-K_\alpha\tau}\int e^{K_\alpha\tau}\left(\theta^{(\alpha)}(\tau)\right)^4d\tau\right). \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
C_1=\frac{2K_1e^{-K_1\tau_2}(r_3k_m+r_4k_p)-k_p(r_1k_me^{-3K_1\tau_2}-r_2k_pe^{K_1\tau_2})}{K_1(k_m^2-k_p^2)},\\
C_2=\frac{2K_2e^{-K_2\tau_2}(r_3k_m+r_4k_p)-k_m(r_1k_pe^{-3K_2\tau_2}-r_2k_me^{K_2\tau_2})}{K_2(k_m^2-k_p^2)},\\
C_3=\frac{2K_1e^{K_1\tau_2}(r_3k_p+r_4k_m)-k_m(r_1k_me^{-K_1\tau_2}-r_2k_pe^{3K_1\tau_2})}{K_1(k_m^2-k_p^2)},\\
C_4=\frac{2K_2e^{K_2\tau_2}(r_3k_p+r_4k_m)-k_p(r_1k_pe^{-K_2\tau_2}-r_2k_me^{3K_2\tau_2})}{K_2(k_m^2-k_p^2)}.
\end{gathered} \tag{17}$$

Тут $k_p = 2K_\alpha + 3$, а $k_m = 2K_\alpha - 3$, $r_1 = K_\alpha(F_{(1)}(\tau_1) - F_{(2)}(-\tau_2)) - F'_{(1)}(\tau_1) + F'_{(2)}(-\tau_2)$, $r_2 = K_\alpha(F_{(1)}(\tau_1) - F_{(2)}(-\tau_2)) + F'_{(1)}(\tau_1) - F'_{(2)}(-\tau_2)$, $r_3 = 3F_{(1)}(-\tau_1) - 2F'_{(1)}(-\tau_1) - 12\pi$, $r_4 = 3F_{(2)}(\tau_2) + 2F'_{(2)}(\tau_2)$, $F'^{(\alpha)}$ – похідні функцій (16).

За формулою (12) знаходимо інтенсивність випромінювання $J^{(\alpha)}(\tau,\mu)$ та густину потоку результуючого випромінювання:

$$J^{(\alpha)}(\tau,\mu) = \frac{1}{4\pi}\left[G^{(\alpha)}(\tau) - \mu\frac{dG^{(\alpha)}(\tau)}{d\tau}\right], \qquad q_r^{(\alpha)}(\tau) = -\frac{1}{3}\frac{dG^{(\alpha)}(\tau)}{d\tau}, \tag{18}$$

де функції $G^{(\alpha)}(\tau)$ визначають за формулами (15)–(17).

Оскільки в області $y > h_1 + 2h_2$ відсутні джерела та стоки ІЧ-випромінювання, то інтенсивність випромінювання $J$ та радіаційний тепловий потік $q_r$ в цій області не залежать від просторової координати. Згідно з (18), кутовий розподіл інтенсивності $J(\mu) \equiv J^{(2)}(\tau_2,\mu)$ та тепловий потік ІЧ-випромінювання $q_r \equiv q_r^{(2)}(\tau_2)$ визначають за формулами:

$$J(\mu) = \frac{1}{4\pi}\left[(1-\mu)C_2 e^{K_2\tau_2} + (1+\mu)C_4 e^{-K_2\tau_2} + F_{(2)}(\tau_2) - \mu F'_{(2)}(\tau_2)\right], \tag{19}$$

$$q_r = -\frac{1}{3}\left(C_2 e^{K_2\tau_2} - C_4 e^{-K_2\tau_2} + F'_{(2)}(\tau_2)\right). \tag{20}$$

**Числове дослідження теплообміну в кусково-однорідному шарі.** З використанням отриманого розв'язку досліджували вплив радіаційних, теплофізичних параметрів та геометрії кусково-однорідного шару на розподіл температури та густини випромінювання в тілі (рис. 2–4).

На рис. 2, 3 наведені координатні залежності густин $G$ (суцільні криві) та $q_r$ (штрихові криві) в шарах за фіксованих температур $T_0$ = 2000 K та $T_c$ = 450 K. Тут використана безрозмірна координата $\xi = (y + h_1)/(2(h_1 + h_2))$, нормована на загальну товщину кусково-однорідного шару. Вертикальні штрихові лінії на рисунках позначають межу шарів.

Рис. 2*а*, *б* ілюструють вплив значень коефіцієнта розсіювання на параметри $G$ та $q_r$: криві *1–3* на рис. 2*а* відповідають значенням $\sigma_1$ = (5, 25, 50) m$^{-1}$, за незмінного $\sigma_2$ = 50 m$^{-1}$, а на рис. 2*б* – значенням $\sigma_2$ = (100, 200, 300) m$^{-1}$, за незмінного $\sigma_1$ = 5 m$^{-1}$. Залежності розраховані для $\lambda_1$ = 50 W/(m·K), $\lambda_2$ = 5 W/(m·K), $\kappa_1$ = 20 m$^{-1}$, $\kappa_2$ = 6 m$^{-1}$, $h_1/h_2 = 3/2$ та *c* = 5 W/(m$^2$·K).

На рис. 2*в*, *г* показано вплив коефіцієнта поглинання на параметри $G$ та $q_r$. Криві *1–3* на рис. 2*в* відповідають значенням $\kappa_1$ = (20, 50, 80) m$^{-1}$, за незмінного $\kappa_2$ = 6 m$^{-1}$, а на рис. 2*г* – значенням $\kappa_2$ = (6, 12, 18) m$^{-1}$, за незмінного $\kappa_1$ = 20 m$^{-1}$. Ці залежності розраховані для $\lambda_1$ = 50 W/(m·K), $\lambda_2$ = 5 W/(m·K), $\sigma_1$ = 5 m$^{-1}$, $\sigma_2$ = 50 m$^{-1}$, $h_1/h_2 = 3/2$ та *c* = 5 W/(m$^2$·K).

Рис. 2*д*, *е* ілюструють вплив теплопровідності шарів на параметри $G$ та $q_r$: криві *1–3* на рис. 2*д* відповідають значенням $\lambda_1$ = (50, 100, 250) W/(m·K), за незмінного $\lambda_2$ = 5 W/(m·K), а на рис. 2*е* – значенням $\lambda_2$ = (5, 10, 40) W/(m·K), за фіксованого $\lambda_1 = 50$ W/(m·K). Залежності розраховані для таких значень: $\sigma_1 = 5$ m$^{-1}$, $\sigma_2 = 50$ m$^{-1}$, $\kappa_1 = 20$ m$^{-1}$, $\kappa_2 = 6$ m$^{-1}$, $h_1/h_2 = 3/2$ та $c = 5$ W/(m$^2$·K).

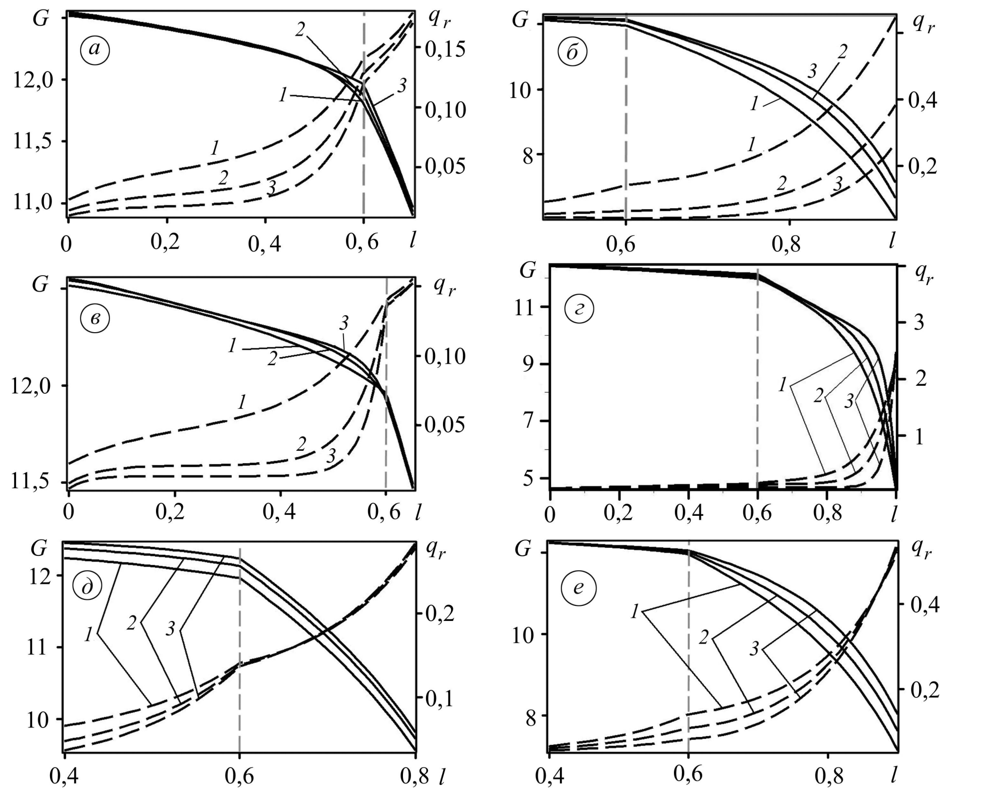
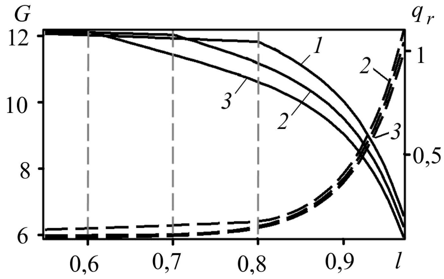



Рис. 2. Вплив радіаційних та теплофізичних характеристик на безрозмірні параметри просторової густини потоку $G$ та густини потоку результуючого випромінювання $q_r$.

На рис. 3 показано вплив відношення товщин шарів на параметри $G$ та $q_r$, якщо $T_0 = 2000$ K. Криві *1–3* відповідають значенням $h_1/h_2 = 4$, 7/3, 3/2.

На рис. 4 зображено залежності конвективної $q_c$, радіаційної $q_r$ складових потоку тепла та інтенсивності випромінювання $I$ ($\mu = 1$) з поверхні тіла, від температури нагрівання $T_0$.

Залежності рис. 3, 4 розраховані для значень $\lambda_1 = 50$ W/(m·K), $\lambda_2 = 5$ W/(m·K), $\sigma_1 = 5$ m$^{-1}$, $\sigma_2 = 50$ m$^{-1}$, $\kappa_1 = 20$ m$^{-1}$, $\kappa_2 = 6$ m$^{-1}$, $c = 5$ W/(m$^2$·K), $T_c = 450$ K.



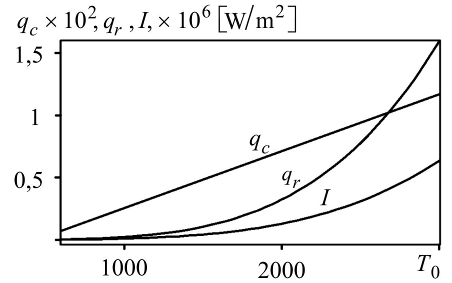




Рис. 3. Рис. 4.

Рис. 3. Вплив відношення товщин шарів на розподіли безрозмірних параметрів $G$ та $q_r$.

Рис. 4. Залежність від температури $T_0$ конвективної $q_c$, радіаційної $q_r$ складових потоку тепла та інтенсивності випромінювання $I$ ($\mu = 1$) з поверхні тіла.

**ВИСНОВКИ**

У наближенні радіаційного рівноваги, в рамках $P_1$-наближення отримані аналітичні залежності, які визначають стаціонарні температурне поле та інтенсивність потоку випромінювання в кусково-однорідному шаруватому тілі, а також інтенсивність випромінювання та радіаційний тепловий потік поза його межами залежно від температури нагрівання $T_0$, теплофізичних та радіаційних властивостей його матеріалу і відношення товщин шарів. Проведені кількісні дослідження виявили істотну залежність параметрів теплового випромінювання в тілі та поза його межами від теплофізичних і радіаційних властивостей шарів, відношення їх товщин, а також від температури нагрівання $T_0$. Отримані формули (7), (19) та (20) можна використати для розроблення безконтактного методу вимірювання температури тіла (шар 1) через теплоізоляційний шар 2 з використанням як інформативних параметрів температури $T_2$ поверхні теплоізоляційного шару, який охолоджується конвективно, а також інтенсивності випромінювання $J(\mu)$ та потоку ІЧ-випромінювання $q_r$ з цієї поверхні.

У подальших дослідженнях буде враховано вплив поглинання, розсіювання та емісію ІЧ-радіації на вільній поверхні тіла та поверхні розділу різнорідних середовищ, а також відхилення від умови радіаційної рівноваги.

1. *Мокрецова И. А., Зуев А. В.* Математическое моделирование и оптимизация процесса теплопереноса в многослойных теплозащитных покрытиях многоразовых космических аппаратов // ВИАМ. – 2012. – С. 1–10.
2. *Оцисик М. Н.* Сложный теплообмен. – М.: Мир, 1976. – 605 с.
3. *Скуратов А. П.* Вопроси математического моделирования сложного теплообмена в высокотемпературных технологических установках цветной металлургии // Сибирский федеральный университет. – 2012. – С. 1–13.
4. *Dombrovskii L. A.* Approximate Methods for Calculating Radiation Heat Transfer // Thermal Engineering. – 1996. – № 3. – P. 235–243.
5. *Discrete* ordinates solution of coupled conductive radiativeheat transfer in a two-layer slab with Fresnel interfaces subject to di,use and obliquely collimated irradiation / C. Muresan, R. Vaillon, C. Menezo, R. Morlot // J. Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer. – 2004. – № 84. – P. 551–562.
6. *Raghu V.* Infrared thermography // Croatia. – 2012. – P. 236.
7. *Siegel R., Howell J., Howell. J. R.* Thermal radiation heat transfer. – N.Y.: Taylor & Francis, 2009. – P. 857.
8. *Tien C. L., Chen G.* Challenges in microscale conductive and radiative heat transfer // J. of Heat Transfer. – 1994. – № 3. – P. 799–807.
9. *Simultaneous* radiation and conduction heat transfer in a graded index semitransparent slab with gray boundaries / L. Xia, Y. Huang, H. Tan, X. Zhang // Int. J. of Heat and Mass Transfer. – 2002. – № 45. – P. 2673–2688.

*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

*Одержано 17.12.2012*