УДК 621.391:519.22

І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик

ОЦІНЮВАННЯ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ІНВАРІАНТІВ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

Coherent estimators of linear correlation invariants of vectorial periodically correlated random processes – mathematical models of two-dimensional vibration signals, are analyzed. Formulae for estimator and its Fourier coefficients bias and variance, which allow to compute systematic and mean square errors of estimation in dependence of realization length and signal parameters, are derived.

Keywords: *vectorial periodically correlated random processes, cross-correlation function, component analysis, sampling time, estimator variance and bias.*

Проаналізовано когерентні оцінки лінійних кореляційних інваріантів векторних періодично корельованих випадкових процесів – математичних моделей двовимірних вібраційних сигналів. Виведено формули для зміщення й дисперсії оцінок інваріантів, зокрема оцінок їх коефіцієнтів Фур'є, які дають змогу обчислити систематичну й середньоквадратичну похибки оцінювання залежно від довжини відрізка реалізації та параметрів сигналу.

Ключові слова: *векторні періодично корельовані випадкові процеси, взаємокореляційна функція, компонентний аналіз, крок дискретизації, дисперсія та зміщення оцінки.*

Фізичні величини, на основі яких описуються властивості вібрацій (переміщення, швидкість, прискорення), є змінними в часі векторами. Однак на практиці їх аналіз, як правило, зводиться до вивчення часової та спектральної структури однієї зі складових цих векторів, виміряної в тому чи іншому напрямі. За результатами такого аналізу важко стверджувати про просторові властивості вібрації, а це зменшує ефективність вібродіагностики. Нові можливості для опису та виявлення стану об'єктів створюються, коли проводити сумісний аналіз складових, виходячи з моделі вібраційного сигналу у вигляді векторного процесу. Поява дефектів в елементах механічних конструкцій [1, 2] приводить до взаємодії детермінованої та стохастичної складових вібраційного сигналу, яка виявляється в модуляції його гармонічних складових. Властивості такої модуляції описуються імовірнісними характеристиками періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Використання характеристик другого порядку ПКВП дає можливість виявляти дефекти механізмів вже на ранніх стадіях розвитку [3–6]. Виходячи з цього, складові вектора $\boldsymbol{\xi}(t)=\mathbf{i}\xi_1(t)+\mathbf{k}\xi_2(t)$ будемо розглядати як ПКВП. Математичне сподівання векторного ПКВП є періодичним вектором [7]:

$$\mathbf{m}_{\xi}(t)=E\boldsymbol{\xi}(t)=\mathbf{i}m_{\xi_1}(t)+\mathbf{k}m_{\xi_2}(t)=\mathbf{m}_{\xi}(t+T),$$

а кореляційна функція $\mathbf{b}_{\xi}(t,u)=E\overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}(t)\otimes\overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}(t+u)$, де $\overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}(t)=\boldsymbol{\xi}(t)-\mathbf{m}_{\xi}(t)$, а $\otimes$ – знак тензорного добутку, є періодичною за часом тензорною функцією

$$\mathbf{b}_{\xi}(t,u)=\mathbf{b}_{\xi}(t+T,u),$$

матричне подання якої має вигляд

$$\mathbf{b}_{\xi}(t,u)=\begin{bmatrix} b_{\xi_1}(t,u) & b_{\xi_2\xi_1}(t,u) \\ b_{\xi_1\xi_2}(t,u) & b_{\xi_2}(t,u) \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Очевидно, що елементи матриці (1) залежать від вибору системи координат. Проте існують такі величини на цих елементах, які при переході від одної системи координат до іншої залишаються незмінними. Їх називають кореляційними інваріантами. Передусім це лінійні інваріанти $I_1(t,u)$ і $D(t,u)$, які не пов'язані з орієнтацією власного базису тензора $\mathbf{b}_\xi(t,u)$. Інваріант $I_1(t,u)$ є усередненим скалярним добутком векторів $\xi(t)$ і $\xi(t+u)$, а інваріант $D(t,u)$ – їх усередненим скісним добутком:

$$I_1(t,u) = E\xi(t)\xi(t+u)\cos\angle\xi(t)\xi(t+u) = b_{\xi_1}(t,u) + b_{\xi_2}(t,u),$$

$$D(t,u) = E\xi(t)\xi(t+u)\sin\angle\xi(t)\xi(t+u) = b_{\xi_1\xi_2}(t,u) - b_{\xi_2\xi_1}(t,u).$$

Перший характеризує властивості колінеарних змін випадкового вектора $\xi(t)$, а другий – властивості ортогональних змін, його називають індикатором обертання.

Квадратичний інваріант

$$I_2(t,u) = b_{\xi_1}(t,u)b_{\xi_2}(t,u) - \frac{1}{4}\left[b_{\xi_1\xi_2}(t,u) + b_{\xi_2\xi_1}(t,u)\right]^2$$

є визначником симетричної частини тензора (1), а інваріанти

$$\lambda_{1,2}(t,u) = \frac{1}{2}\left[I_1(t,u) \pm \sqrt{I_1^2(t,u) - 4I_2^2(t,u)}\right]$$

є її власними значеннями. Величини $\lambda_1(t,u)$ і $\lambda_2(t,u)$ визначають значення кореляційної функції за напрямами власного базису тензора (1). На їх основі може бути визначена кореляційна функція сигналу у довільному напрямі, а також побудовані характерні для кожного сигналу криві другого порядку.

Оцінки інваріантів сформуємо, виходячи з формул, які їх визначають

$$\hat{I}_1(t,u) = \hat{b}_{\xi_1}(t,u) + \hat{b}_{\xi_2}(t,u), \tag{2}$$

$$\hat{D}(t,u) = \hat{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u) - \hat{b}_{\xi_2\xi_1}(t,u), \tag{3}$$

$$\hat{I}_2(t,u) = \hat{b}_{\xi_1}(t,u)\hat{b}_{\xi_2}(t,u) - \frac{1}{4}\left[\hat{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u) + \hat{b}_{\xi_2\xi_1}(t,u)\right]^2,$$

$$\hat{\lambda}_{1,2}(t,u) = \frac{1}{2}\left[\hat{I}_1(t,u) \pm \left[\hat{I}_1^2(t,u) - 4\hat{I}_2^2(t,u)\right]^{\frac{1}{2}}\right].$$

І оцінка квадратичного інваріанту $\hat{I}_2(t,u)$, і оцінки головних компонентів $\hat{\lambda}_{1,2}(t,u)$ є нелінійними функціями оцінок авто- та взаємокореляційних функцій складових вектора $\xi(t)$. Це суттєво утрудняє як виведення формул для статистичних характеристик цих оцінок, так і через громіздкість формул, які отримуються, використання цих співвідношень для вибору необхідної для обробки довжини реалізації. Задача спрощується при аналізі статистик величин I_1 і D, які характеризують в інваріантній формі, відповідно, властивості авто- та взаємокореляційних функцій випадкових складових векторного ПКВП, і тут необхідні обчислення можуть бути проведені до отримання практично важливих формул. Забезпечення на основі цих виразів, а також формул для статистичних характеристик оцінок кореляційних функцій необхідної достовірності дає змогу розраховувати також на прийнятну статистичну похибку обчислення інваріантів $\lambda_{1,2}$ і I_2.

У цій статті зосередимо увагу на аналізі статистик (2) і (3). При цьому будемо вважати, що оцінки авто- та взаємокореляційних функцій знаходять за допомогою усереднення відліків через період корельованості [8, 9]:

$$\hat{b}_{\xi_p}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\Big[\xi_p(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi_p}(t+u+nT)\Big]\Big[\xi_p(t+nT)-\hat{m}_{\xi_p}(t+nT)\Big], \quad (4)$$

$$\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\Big[\xi_p(t+nT)-\hat{m}_{\xi_p}(t+nT)\Big]\Big[\xi_q(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi_q}(t+u+nT)\Big], \quad (5)$$

де

$$\hat{m}_{\xi_{p,q}}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi_{p,q}(t+nT).$$

Для математичних сподівань статистик (4) і (5) відповідно отримуємо:

$$E\,\hat{b}_{\xi_p}(t,u)=b_{\xi_p}(t,u)-\frac{1}{N}\left[b_{\xi_p}(t,u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|\,b_{\xi_p}(t,u+nT)\right],$$

$$E\,\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(t,u)=b_{\xi_p\xi_q}(t,u)-\frac{1}{N}\left[b_{\xi_p\xi_q}(t,u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|\,b_{\xi_p\xi_q}(t,u)\right].$$

Звідси

$$E\,\hat{I}_1(t,u)=I_1(t,u)-\frac{1}{N}\left[I_1(t,u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|\,I_1(t,u+nT)\right], \quad (6)$$

$$E\,\hat{D}(t,u)=D(t,u)-\frac{1}{N}\left[D(t,u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|\,D(t,u+nT)\right]. \quad (7)$$

Обидві оцінки (2) і (3) за умови, що кореляційні зв’язки заникають зі збільшенням зсуву

$$\lim_{|u|\to\infty} b_{\xi_p}(t,u)=0, \quad \lim_{|u|\to\infty} b_{\xi_p\xi_q}(t,u)=0, \quad (8)$$

є асимптотично незміщеними, оскільки тоді $E\,\hat{I}_1(t,u)\to I_1(t,u)$ і $E\,\hat{D}(t,u)\to$ $\to D(t,u)$, якщо $N\to\infty$. Для достатньо великих, але скінченних N, величини зміщень $\varepsilon[\hat{I}_1(t,u)]=E\hat{I}_1(t,u)-I_1(t,u)$ і $\varepsilon[\hat{D}(t,u)]=E\hat{D}(t,u)-D(t,u)$ можуть бути обчислені за наближеними формулами

$$\varepsilon[\hat{I}_1(t,u)]\approx-\frac{I_1(t,u)}{N}, \quad \varepsilon[\hat{D}(t,u)]\approx-\frac{D(t,u)}{N}. \quad (9)$$

Якщо оцінки математичних сподівань складових вектора знаходяться тільки на періоді корельованості, тобто для $t\in[0,T]$, а далі вважається, що

$$\hat{m}_{\xi_p,\xi_q}(t+nT)=\hat{m}_{\xi_p,\xi_q}(t),$$

то статистики (4)–(5) тоді набудуть такого вигляду

$$\hat{b}_{\xi_p}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi_p(t+nT)\xi_p(t+u+nT)-\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\xi_p(t+nT)\xi_p(t+u+mT)\right], \quad (10)$$

$$\hat{b}_{\xi_p\xi_q}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi_p(t+nT)\xi_q(t+u+nT)-\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\xi_p(t+nT)\xi_q(t+u+mT)\right]. \quad (11)$$

Усереднюючи ці вирази, знаходимо:

$$E\,\hat{I}_1(t,u)=I_1(t,u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)I_1(t,u+nT)\ , \tag{12}$$

$$E\,\hat{D}(t,u)=D(t,u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)D(t,u+nT)\ . \tag{13}$$

З точністю до величини першого порядку малості маємо

$$\varepsilon\left[\hat{I}_1(t,u)\right]\approx-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}I_1(t,u+nT)\ ,\qquad \varepsilon\left[\hat{D}(t,u)\right]\approx-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}D(t,u+nT)\ .$$

Як бачимо, зміщення статистик (10) та (11) для періодичної оцінки математичного сподівання порівняно з виразами (9) додатково містять значення оцінюваних величин при зсувах, узятих через період корельованості, тому при повільно заникаючих кореляційних зв’язках вони будуть дещо більшими.

Подамо авто- та взаємокореляційні функції складових вектора у вигляді рядів Фур’є:

$$b_{\xi_p}(t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}B_k^{(\xi_p)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ , \tag{14}$$

$$b_{\xi_p\xi_q}(t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}B_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ . \tag{15}$$

Тоді

$$I_1(t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}B_k^{(I_1)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ , \tag{16}$$

$$D(t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}B_k^{(D)}(u)e^{ik\omega_0 t}\ , \tag{17}$$

де $B_k^{(I_1)}(u)=B_k^{(\xi_1)}(u)+B_k^{(\xi_2)}(u)$, $B_k^{(D)}(u)=B_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)-B_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)$.

Взявши до уваги ряди (14) і (15), для зміщень оцінок маємо

$$\varepsilon\left[\hat{I}_1(t,u)\right]=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varepsilon_k^{(I_1)}(u)\,e^{ik\omega_0 t}\ ,\qquad \varepsilon\left[\hat{D}(t,u)\right]=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varepsilon_k^{(D)}(u)\,e^{ik\omega_0 t}.$$

При цьому в випадку, коли використовуються статистики (4) та (5), то

$$\varepsilon_k^{(I_1)}(u)=-\frac{1}{N}\left[B_k^{(I_1)}(u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|\,B_k^{(I_1)}(u+nT)\right], \tag{18}$$

$$\varepsilon_k^{(D)}(u)=-\frac{1}{N}\left[B_k^{(D)}(u)+\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}|n|\,B_k^{(D)}(u+nT)\right], \tag{19}$$

а коли (10) і (11), отримуємо

$$\varepsilon_k^{(I_1)}(u)=-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_k^{(I_1)}(u+nT), \tag{20}$$

$$\varepsilon_k^{(D)}(u)=-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)B_k^{(D)}(u+nT)\ . \tag{21}$$

Дисперсії оцінок інваріантів (2) та (3) у першому наближенні визначаються співвідношеннями

$$D\left[\hat{I}_1(t,u)\right]=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}\left[G_{n\,n\,m\,m}^{(\xi_1\xi_1\xi_1\xi_1)}(t,u)+2G_{n\,n\,m\,m}^{(\xi_1\xi_1\xi_2\xi_2)}(t,u)+G_{n\,n\,m\,m}^{(\xi_2\xi_2\xi_2\xi_2)}(t,u)\right], \quad (22)$$

$$D\left[\hat{D}(t,u)\right]=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}\left[G_{n\,n\,m\,m}^{(\xi_1\xi_2\xi_1\xi_2)}(t,u)-2G_{n\,n\,m\,m}^{(\xi_1\xi_2\xi_2\xi_1)}(t,u)+G_{n\,n\,m\,m}^{(\xi_2\xi_1\xi_2\xi_1)}(t,u)\right], \quad (23)$$

де для гауссових процесів

$$G_{n\,m\,p\,q}^{(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4)}(t,u)=\begin{bmatrix}b_{\xi_1\xi_3}(t,(p-n)T)b_{\xi_2\xi_4}(t+u,(q-m)T)+\\ +b_{\xi_1\xi_4}(t,u+(q-n)T)b_{\xi_2\xi_3}(t+u,(p-m)T-u)\end{bmatrix}.$$

Введемо в розгляд функції

$$\tilde{b}_{\xi_1}(t,s-t,u)=b_{\xi_1}(t,s-t)b_{\xi_1}(t+u,s-t)+b_{\xi_1}(t,s-t+u)b_{\xi_1}(t+u,s-t-u),$$

$$\tilde{b}_{\xi_2}(t,s-t,u)=b_{\xi_2}(t,s-t)b_{\xi_2}(t+u,s-t)+b_{\xi_2}(t,s-t+u)b_{\xi_2}(t+u,s-t-u),$$

$$\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(t,s-t,u)=b_{\xi_1\xi_2}(t,s-t)b_{\xi_1\xi_2}(t+u,s-t)+b_{\xi_1\xi_2}(t,s-t+u)b_{\xi_1\xi_2}(t+u,s-t-u).$$

Використовуючи співвідношення (14) та (15), подамо ці функції у вигляді рядів Фур'є

$$\tilde{b}_{\xi_1}(t,s-t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\tilde{B}_k^{(\xi_1)}(s-t,u)\,e^{ik\omega_0 t},$$

$$\tilde{b}_{\xi_2}(t,s-t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\tilde{B}_k^{(\xi_2)}(s-t,u)\,e^{ik\omega_0 t},$$

$$\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(t,s-t,u)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\tilde{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(s-t,u)\,e^{ik\omega_0 t}.$$

де

$$\tilde{B}_k^{(\xi_1)}(s-t,u)=\sum_{q\in\mathbf{Z}}e^{-iq\omega_0 u}\left[B_{q+k}^{(\xi_1)}(s-t)\overline{B}_q^{(\xi_1)}(s-t)+B_{q+k}^{(\xi_1)}(s-t-u)\overline{B}_q^{(\xi_1)}(s-t+u)\right],$$

$$\tilde{B}_k^{(\xi_2)}(s-t,u)=\sum_{q\in\mathbf{Z}}e^{-iq\omega_0 u}\left[B_{q+k}^{(\xi_2)}(s-t)\overline{B}_q^{(\xi_2)}(s-t)+B_{q+k}^{(\xi_2)}(s-t-u)\overline{B}_q^{(\xi_2)}(s-t+u)\right],$$

$$\tilde{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(s-t,u)=\sum_{q\in\mathbf{Z}}e^{-iq\omega_0 u}\begin{bmatrix}B_{q+k}^{(\xi_1\xi_2)}(s-t)\overline{B}_q^{(\xi_1\xi_2)}(s-t)+\\ +B_{q+k}^{(\xi_1\xi_2)}(s-t-u)\overline{B}_q^{(\xi_1\xi_2)}(s-t+u)\end{bmatrix}.$$

Для дисперсії (22) тоді маємо

$$D\left[\hat{I}_1(t,u)\right]=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k^{(I_1)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

при цьому

$$\alpha_k^{(I_1)}(u)=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}\left[\tilde{B}_k^{(\xi_1)}\left[(m-n)T,u\right]+\tilde{B}_k^{(\xi_2)}\left[(m-n)T,u\right]+2\tilde{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}\left[(m-n)T,u\right]\right]=$$

$$=\frac{1}{N}\left[\tilde{B}_k^{(\xi_1)}(0,u)+\tilde{B}_k^{(\xi_2)}(0,u)+2\tilde{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(0,u)+\right.$$

$$\left.+2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\tilde{B}_k^{(\xi_1)}(nT,u)+\tilde{B}_k^{(\xi_2)}(nT,u)+\tilde{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(nT,u)+\tilde{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(nT,u)\right]\right]. \quad (24)$$

Дисперсію (23) також подамо у вигляді ряду Фур'є:

$$D\left[\hat{D}(t,u)\right] = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k^{(D)}(u)\, e^{ik\omega_0 t}\ .$$

Коефіцієнти $\alpha_k^{(D)}(u)$ знайдемо, використовуючи розклади функцій

$$\tilde{\tilde{b}}_{\zeta_1}(t,s-t,u) = b_{\xi_1}(t,s-t)b_{\xi_2}(t+u,s-t) + b_{\xi_1\xi_2}(t,s-t+u)b_{\xi_2\xi_1}(t+u,s-t-u)\,,$$

$$\tilde{\tilde{b}}_{\zeta_2}(t,s-t,u) = b_{\xi_2}(t,s-t)b_{\xi_1}(t+u,s-t) + b_{\xi_2\xi_1}(t,s-t+u)b_{\xi_1\xi_2}(t+u,s-t-u)\,,$$

$$\tilde{\tilde{b}}_{\zeta_1\zeta_2}(t,s-t,u) = b_{\xi_1\xi_2}(t,s-t)b_{\xi_2\xi_1}(t+u,s-t) + b_{\xi_1}(t,s-t+u)b_{\xi_2}(t+u,s-t-u)$$

в ряди Фур'є

$$\tilde{\tilde{b}}_{\zeta_1}(t,s-t,u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1)}(s-t,u)\, e^{ik\omega_0 t}\,, \tag{25}$$

$$\tilde{\tilde{b}}_{\zeta_2}(t,s-t,u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_2)}(s-t,u)\, e^{ik\omega_0 t}\,, \tag{26}$$

$$\tilde{\tilde{b}}_{\zeta_1\zeta_2}(t,s-t,u) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1\zeta_2)}(s-t,u)\, e^{ik\omega_0 t}\,. \tag{27}$$

Формули для коефіцієнтів цих рядів отримуємо, взявши до уваги (14) і (15):

$$\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1)}(s-t,u) = \sum_{q\in\mathbf{Z}} e^{-ik\omega_0 u}\left[B_{q+k}^{(\xi_1)}(s-t)\bar{B}_q^{(\xi_2)}(s-t) + B_{q+k}^{(\xi_1\xi_2)}(u+s-t)\bar{B}_q^{(\xi_2\xi_1)}(s-t-u)\right],$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_2)}(s-t,u) = \sum_{q\in\mathbf{Z}} e^{-ik\omega_0 u}\left[B_{q+k}^{(\xi_2)}(s-t)\bar{B}_q^{(\xi_1)}(s-t) + B_{q+k}^{(\xi_2\xi_1)}(u+s-t)\bar{B}_q^{(\xi_1\xi_2)}(s-t-u)\right],$$

$$\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1\zeta_2)}(s-t,u) = \sum_{q\in\mathbf{Z}} e^{-ik\omega_0 u}\left[B_{q+k}^{(\xi_1\xi_2)}(s-t)\bar{B}_q^{(\xi_2\xi_1)}(s-t) + B_{q+k}^{(\xi_1)}(s-t+u)\bar{B}_q^{(\xi_2)}(s-t-u)\right].$$

На основі (25)–(27) знаходимо

$$\alpha_k^{(D)}(u) = \frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}\left[\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1)}\left[(m-n)T,u\right] + \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_2)}\left[(m-n)T,u\right] - 2\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1\zeta_2)}\left[(m-n)T,u\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\left[\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1)}(0,u) + \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_2)}(0,u) - 2\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1\zeta_2)}(0,u) + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{n=1}^{N-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\left[\tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1)}(nT,u) + \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_2)}(nT,u) - \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_1\zeta_2)}(nT,u) - \tilde{\tilde{B}}_k^{(\zeta_2\zeta_1)}(nT,u)\right]\right]. \tag{28}$$

При виконанні умов (8) величини (28), як і (24), заникають, якщо $N\to\infty$.

Розглянемо тепер оцінки компонентів інваріантів $I_1(t,u)$ та $D(t,u)$, що обчислюють за формулами

$$\hat{B}_k^{(I_1)}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{I}_1(t,u)\, e^{-ik\omega_0 t}dt\,, \tag{29}$$

$$\hat{B}_k^{(D)}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T \hat{D}(t,u)\, e^{-ik\omega_0 t}dt\,. \tag{30}$$

Для математичних сподівань цих оцінок відповідно маємо

$$E\hat{B}_k^{(I_1)}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T E\hat{I}_1(t,u)\, e^{-ik\omega_0 t}dt\,, \qquad E\hat{B}_k^{(D)}(u) = \frac{1}{T}\int_0^T E\hat{D}(t,u) e^{-ik\omega_0 t}dt\ .$$

Беручи до уваги співвідношення (18) і (19) чи (20) і (21), доходимо висновку, що формули для зміщень оцінок (29) та (30) збігаються з виразами для відповідних коефіцієнтів Фур'є зміщень інваріантів, тобто співвідношеннями (18) і (19) чи (20) і (21).

Надалі оцінки математичних сподівань складових вектора $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$ будемо вважати періодичними. Очевидно, що

$$\hat{B}_k^{(I_1)}(u) = \hat{B}_k^{(\xi_1)}(u) + \hat{B}_k^{(\xi_2)}(u)\ , \qquad \hat{B}_k^{(D)}(u) = \hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u) - \hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\ .$$

Оцінки кореляційних компонентів подамо у вигляді

$$\hat{B}_k^{(\xi_p)}(u) = \frac{1}{NT}\int_0^T \sum_{n=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\xi}_p(t+nT)\overset{\circ}{\xi}_p(t+u+nT) - \\ -\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_p}(t+nT)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_p}(t+u+nT) \end{bmatrix} e^{-ik\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}_p(s)\overset{\circ}{\xi}_p(s+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_p}(s)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_p} 9s+u) \right] e^{-ik\omega_0 s} ds\ ,$$

$$\hat{B}_k^{(\xi_p\xi_q)}(u) = \frac{1}{NT}\int_0^T \sum_{n=0}^{N-1} \begin{bmatrix} \overset{\circ}{\xi}_p(t+nT)\overset{\circ}{\xi}_q(t+u+nT) - \\ -\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_p}(t+nT)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_q}(t+u+nT) \end{bmatrix} e^{-ik\omega_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \left[\overset{\circ}{\xi}_p(s)\overset{\circ}{\xi}_q(s+u) - \overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_p}(s)\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi_q}(s+u) \right] e^{-ik\omega_0 s} ds\ .$$

Для дисперсії оцінок (29) та (30) маємо

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(u)\right] = E\left|B_k^{(I_1)}(u)\right|^2 - \left|E\hat{B}_k^{(I_1)}(u)\right|^2 = E\left|\hat{B}_k^{(\xi_1)}(u)\right|^2 - \left|E\hat{B}_k^{(\xi_1)}(u)\right|^2 + E\left|\hat{B}_k^{(\xi_2)}(u)\right|^2 -$$
$$-\left|E\hat{B}_k^{(\xi_2)}(u)\right|^2 + E\hat{B}_k^{(\xi_1)}(u)\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_2)}(u) + E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_1)}(u)\hat{B}_k^{(\xi_2)}(u) -$$
$$-E\hat{B}_k^{(\xi_1)}(u)E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_2)}(u) - E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_1)}(u)E\hat{B}_k^{(\xi_2)}(u)\ , \tag{31}$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}(u)\right] = E\left|\hat{B}_k^{(D)}(u)\right|^2 - \left|E\hat{B}_k^{(D)}(u)\right|^2 =$$
$$= E\left|\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\right|^2 - \left|E\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\right|^2 + E\left|\hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right|^2 - \left|E\hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right|^2 -$$
$$-\left[E\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u) - E\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] -$$
$$-\left[E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u) - E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)E\hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right]\ . \tag{32}$$

У першому наближенні

$$E\left|\hat{B}_k^{(\xi_p)}(u)\right|^2 - \left|E\hat{B}_k^{(\xi_p)}(u)\right|^2 = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\xi_p}(t, s-t, u)\, e^{ik\omega_0(s-t)} dt ds\ ,$$

$$E\hat{B}_k^{(\xi_1)}(u)\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_2)}(u) - E\hat{B}_k^{(\xi_1)}(u)E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_2)}(u) + E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_1)}(u)\hat{B}_k^{(\xi_2)}(u) - E\bar{\hat{B}}_k^{(\xi_1)}(u)E\hat{B}_k^{(\xi_2)}(u) =$$
$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(t, s-t, u)\cos k\omega_0(s-t)\, dt ds\ .$$

Після перетворень знаходимо

$$\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\xi_p}(t,s-t,u)e^{ik\omega_0(s-t)}dtds = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u_1} \tilde{b}_{\xi_p}(t,u_1,u)\cos k\omega_0 u_1 dtdu_1 ,$$

$$\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(t,s-t,u)\cos k\omega_0(s-t)dtds = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u_1}\begin{bmatrix}\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u_1,u)+\\ +\tilde{b}_{\xi_2\xi_1}(t,u_1,u)\end{bmatrix}\cos k\omega_0 u_1 dtdu_1 .$$

Підставимо в отримані формули ряди (14) та (15). Проінтегрувавши по t і знехтувавши складовими вищого порядку малості, одержимо таке співвідношення:

$$\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u_1} \tilde{b}_{\xi_p}(t,u_1,u)\cos k\omega_0 u_1 dtdu_1 = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0^{(\xi_p)}(u_1,u)\cos k\omega_0 u_1 du_1 ,$$

$$\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u_1}\left[\tilde{b}_{\xi_1\xi_2}(t,u_1,u)+\tilde{b}_{\xi_2\xi_1}(t,u_1,u)\right]\cos k\omega_0 u_1 dtdu_1 =$$

$$= \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\left[\tilde{B}_0^{(\xi_1\xi_2)}(u_1,u)+\tilde{B}_0^{(\xi_2\xi_1)}(u_1,u)\right]\cos k\omega_0 u_1 du_1 .$$

Вираз для дисперсії (31) тоді набуде такого вигляду:

$$D\left[\hat{B}_k^{(I_1)}(u)\right] = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\begin{bmatrix}\tilde{B}_0^{(\xi_1)}(u_1,u)+\tilde{B}_0^{(\xi_2)}(u_1,u)+\\ +\tilde{B}_0^{(\xi_1\xi_2)}(u_1,u)+\tilde{B}_0^{(\xi_2\xi_1)}(u_1,u)\end{bmatrix}\cos k\omega_0 u_1 du_1 . \qquad (33)$$

Аналогічні перетворення застосуємо для знаходження дисперсії (32). У першому наближенні

$$D\left[\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\right] = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\zeta_1}(t,s-t,u)e^{ik\omega_0(s-t)}dtds ,$$

$$D\left[\hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\zeta_2}(t,s-t,u)e^{ik\omega_0(s-t)}dtds ,$$

$$\begin{bmatrix}E\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\overline{\hat{B}}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)+E\overline{\hat{B}}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\hat{B}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)-\\ -E\hat{B}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)E\overline{\hat{B}}_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)-E\overline{\hat{B}}_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)B_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\end{bmatrix}=$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta b_{\zeta_1\zeta_2}(t,s-t,u)\cos k\omega_0(s-t)\,dtds ,$$

а після спрощень з використанням рядів (25)–(27) отримуємо:

$$\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\zeta_1}(t,s-t,u)e^{ik\omega_0(s-t)}dtds = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0^{(\zeta_1)}(u_1,u)\cos k\omega_0 u_1 du_1 ,$$

$$\frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\zeta_2}(t,s-t,u)e^{ik\omega_0(s-t)}dtds = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\tilde{B}_0^{(\zeta_2)}(u_1,u)\cos k\omega_0 u_1 du_1 ,$$

$$\frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^\theta \tilde{b}_{\zeta_1\zeta_2}(t,s-t,u)\cos k\omega_0(s-t)dtds = \frac{2}{\theta}\int_0^\theta\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\begin{bmatrix}\tilde{B}_0^{(\zeta_1\zeta_2)}(u_1,u)+\\ +\tilde{B}_0^{(\zeta_2\zeta_1)}(u_1,u)\end{bmatrix}\cos k\omega_0 u_1 du_1 .$$

А тоді

$$D\left[\hat{B}_k^{(D)}(u)\right]=\frac{2}{\theta}\int\limits_0^{\theta}\left(1-\frac{u_1}{\theta}\right)\begin{bmatrix}\tilde{B}_0^{(\zeta_1)}(u_1,u)+\tilde{B}_0^{(\zeta_2)}(u_1,u)-\\-\tilde{B}_0^{(\zeta_1\zeta_2)}(u_1,u)-\tilde{B}_0^{(\zeta_2\zeta_1)}(u_1,u)\end{bmatrix}\cos k\omega_0 u_1 du_1 \ . \qquad (34)$$

Як випливає зі співвідношень (33) і (34), дисперсії оцінок компонентів інваріантів в основному визначаються нульовими компонентами $\tilde{B}_0^{(\cdot)}(u_1,u)$, що є усередненими в часі значеннями кореляційних функцій процесів, які визначаються добутками флуктуаційних складових вектора $\xi(t)$. Номер компоненти, яка оцінюється, впливає тільки на частоту осциляцій косинусної вагової функції.

Отже, оцінки лінійних інваріантів (2) і (3) у випадку, коли авто- та взаємокореляційні функції складових векторного ПКВП обчислюються за статистиками (4) та (5) чи (10) та (11) у разі виконання умов (8), є асимптотично незміщеними та слушними. Такі ж властивості мають оцінки коефіцієнтів Фур'є, що знаходяться на їх основі. А це означає, що названі співвідношення можуть бути використані у процесі побудови алгоритмів і створення нового програмного забезпечення для статистичної обробки експериментальних даних. Отримані формули для зміщення й дисперсії оцінок дають змогу обчислити систематичну й середньоквадратичну похибки оцінювання, а також розв'язати зворотню задачу, вибираючи відповідні параметри обробки. А саме довжину відрізка реалізації і точку усічення корелограми, забезпечуючи потрібну достовірність обробки.

1. *Імовірнісні* моделі та статистичні методи аналізу сигналів вібрацій для діагностики машин та конструкцій / В. Ю. Михайлишин, І. М. Яворський, Ю. Т. Василина, О. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1997. – **33**, № 5. – С. 61–74.

   (*Mykhailyshyn V. Yu., Yavors'kyi I. M., Vasylyna Yu. T., Drabych O. P., and Isaev I. Yu.* Probabilistic models and statistical methods for the analysis of vibrational signals in the problems of diagnostics of machines and structures // Materials Science. – 1997. – **33**, № 5. – P. 655–672.)
2. *Назарчук З. Т., Яворський І. М., Михайлишин В. Ю.* Застосування теорії періодично корельованих випадкових процесів до раннього виявлення дефектності обертових систем // 3-я міжнар. конф. "Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій". – Львів, 2004. – С. 403–410.
3. *Методи* і нові технічні засоби вібродіагностики підшипникових вузлів та зубчатих передач / І. М. Яворський, П. П. Драбич, О. П. Драбич, І. Ю. Ісаєв, І. Б. Кравець, В. Ю. Михайлишин // Проблеми ресурсу і безпеки експлуатації конструкцій, споруд та машин. – К.: Ін-т електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України. – 2006. – С. 52–56.
4. *Методи* і засоби ранньої діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Б. Кравець, І. Г. Стецько, І. Й. Мацько // Праці міжнар. наук.-техн. конф. "Ресурс, надійність та ефективність використання енергетичного обладнання". – Харків, 2010. – С. 31–38.
5. *Методи* вібраційної діагностики початкових стадій пошкодження обертових систем / І. М. Яворський, П. П. Драбич, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 2. – С. 134–140.

   (*Yavors'kyi M., Drabych P. P., Kravets' I. B., and Mats'ko I. I.* Methods for vibration diagnostics of the initial stages of damage of rotation systems // Materials Science. – 2011. – **47**, № 2. – P. 264–272.)
6. *Методи* та засоби ранньої діагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС / І. М. Яворський , Р. М. Юзефович , І. Б. Кравець , І. Й. Мацько , І. Г. Стецько // Енергетика та електрифікація. – 2012. – № 8. – С. 58–67.
7. *Взаємокореляційний* когерентний аналіз періодично корельованих випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2012. – 36(112). – С. 5–13.
8. *Coherent* covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Javorskyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S. P. Brooks // Signal Processing. – 2007. – **87**. – P. 13–32.
9. *Когерентные* оценки корреляционных характеристик взаимосвязанных периодически коррелированных случайных процес сов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. Б. Кравец, И. Й. Мацько // Изв. Вузов. Радиоэлектроника. – 2012. – **55**, № 9. – С. 26–36.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів, Україна
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

Одержано 06.06.2013