

УДК 519.248

Б. А. Мандзій, С. В. Щербовських

### **МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДЛЯ АНАЛІЗУ ПРИЧИН НЕПРАЦЕЗДАТНОСТІ СИСТЕМИ ІЗ КОВЗНИМ РЕЗЕРВУВАННЯМ**

Mathematical reliability model for repairable system with sliding redundancy is proposed. Such model takes into account adequately load-sharing impact on minimal cut set indexes. For reliability modeling dynamic fault tree and Markov analysis is used.

**Keywords:** *minimal cut set, sliding redundancy, reliability model, dynamical fault tree, Markov model.*

Запропоновано математичну модель надійності відновлюваної системи із ковзним резервуванням. Така модель адекватно враховує вплив зміни навантаження на показники мінімальної множини перетинів. В основу моделювання покладено динамічне дерево відмов та марковський аналіз.

**Ключові слова:** *мінімальна множина перетинів, ковзне резервування, модель надійності, динамічне дерево відмов, марковська модель.*

**Постановка проблеми.** Розроблення рекомендацій щодо підвищення надійності системи виконують на основі аналізу «слабких» місць системи. Під «слабким» місцем, яке називають перетином, розуміють такий набір елементів, одночасна непрацездатність яких призводить до непрацездатності усїєї системи. Завдання аналізу полягає у визначенні мінімальної множини таких перетинів, їх вмісту та ймовірнісних показників. Для системи із ковзним резервуванням наявна особливість, яка полягає у тому, що навантаження елементів резервної групи залежить від стану елементів основної групи. Застосовуючи відомі у літературі підходи, адекватно взяти до уваги вплив вказаної особливості на ймовірнісні характеристики перетинів неможливо.

Отже, постає проблема розроблення математичної моделі надійності системи із ковзним резервуванням для визначення ймовірнісних показників перетинів, яка враховуватиме зміну навантаження елементів. Ця проблема виникає під час забезпечення заданого рівня надійності електротехнічних систем, які застосовують в об'єктах підвищеної небезпеки.

**Аналіз останніх досліджень.** Для визначення ймовірнісних показників перетинів системи виділяємо два основні напрями досліджень: логіко-ймовірнісний підхід та марковський аналіз. Логіко-ймовірнісний підхід ґрунтується на складанні логічних умов, які відповідають перетинам, із подальшим їх перетворенням до ймовірнісних виразів [1, 2]. Такий підхід простий у застосуванні, проте на його основі не можна коректно враховувати динамічні явища, зокрема, зміну навантаження, спричинену відмовами елементів. Марковський аналіз зазначеного обмеження не має, проте під час його застосування виникають складності, пов'язані з високою трудомісткістю та обмеженням розподілу тривалості напрацювання та ремонтування експоненціальним законом. Для зменшення трудомісткості такого аналізу необхідно удосконалити методи автоматизованої побудови марковської моделі [3, 4]. Таку побудову виконують на основі дерева відмов, яке необхідно удосконалити параметрами, які математично описують надійнісну поведінку за навантаженням [5]. Для усунення обмеження експоненціальним розподілом необхідно удосконалити методи розщеплення простору станів [6–9]. Окрім того, ме-

© Б. А. Мандзій, С. В. Щербовських, 2013

тоди розщеплення простору станів повинні адекватно урахувати запам'ятовування передісторії напрацювання елементів системи за навантаженням [10].

У цій статті викладено розв'язання таких завдань:

- формалізація опису надійності відновлюваної системи із ковзним резервуванням на основі динамічного дерева відмов;
- побудова моделі станів та подій системи;
- формування розщепленої однорідної марковської моделі;
- визначення ймовірнісних показників перетинів.

Викладення основного матеріалу.

**Динамічне дерево відмов системи.** Система складена із трьох генераторів G1, G2 та G3 (рис. 1), які підключені до спільної шини. Генератори G1 та G2 утворюють основну групу, а генератор G3 – резервну.

Функція системи полягає у забезпеченні електричною енергією усіх споживачів, які підключені до цієї шини. Опис надійності системи формалізовано динамічним деревом відмов, структура якого подано на рис. 2а, параметри – у табл. 1. Динамічне дерево відмов є математичною моделлю, яка описує умову непрацездатності системи та її надійнісну поведінку на основі блоків, що позначають логічні операції та операції відношення. Умову непрацездатності визначають дедуктивним методом, починаючи від вершини подій через оператори до базових подій.

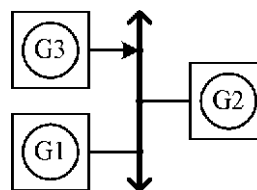


Рис. 1. Функціональна схема системи.

Непрацездатність системи, яка позначена блоком “вершина подій 1”, полягає у тому, що система не забезпечує енергією споживачів, підключених до спільної шини. Вважаємо, що така непрацездатність катастрофічна (табл. 1, рядок 1), тобто після її появи відновлення системи до уваги брати не треба. Такий стан системи настає, якщо одночасно непрацездатні два будь-які генератори, що описано блоком “оператор 1”, тип якого задано операцією відношення CASE 2 (табл. 1, рядки 2 і 3). Цей блок на виході подає 1, якщо із трьох вхідних аргументів не менше двох дорівнює 1. Непрацездатності генераторів G1–G3, позначені блоками “базова подія 1”–“базова подія 3”, настають у разі їх відмови. Вважаємо, що напрацювання до відмови усіх трьох генераторів G1–G3 розподілено за законом Вейбулла із параметрами  $\alpha = 10\,000\text{ h}$  та  $\beta = 1,3$  (табл. 1, рядки 4–6, 7–9 та 10–12).

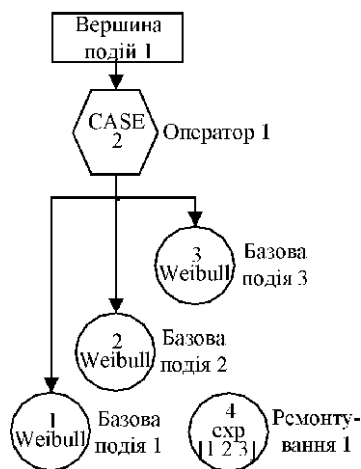


Рис. 2. Дерево відмов системи.

Надійнісну поведінку системи за навантаженням задано на основі логічних функцій масштабування. Така функція  $f(\mathbf{x})$  визначає взаємозв'язок коефіцієнта масштабування заданого процесу зношування елемента системи залежно від логічного стану  $\mathbf{x}$  (працездатність – непрацездатність) усіх елементів системи. У цій моделі задано одну функцію масштабування, яка математично описує зношування генератора G3 (табл. 1, рядок 13), який належить резервній групі:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \bar{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

Якщо генератор G3 працездатний та працездатний один із генераторів основної групи G1 або G2, а інший непрацездатний, то коефіцієнт масштабування цього процесу становить 1, а в усіх решта випадках – 0.

**Таблиця 1. Параметри блоків дерева відмов системи**

№	Назва блока	Параметр блока	Значення параметра
1	Вершина подій 1	Критичність	True
2	Оператор 1	Тип	CASE
3		Поріг	2
4	Базова подія 1	Порядковий номер	1
5		Тип розподілу	Weibull
6		Параметри розподілу	[10 000 1,3]
7	Базова подія 2	Порядковий номер	2
8		Тип розподілу	Weibull
9		Параметри розподілу	[10 000 1,3]
10	Базова подія 3	Порядковий номер	3
11		Тип розподілу	Weibull
12		Параметри розподілу	[10 000 1,3]
13		Функція масштабування	$f(x)$
14	Ремонтування 1	Порядковий номер	4
15		Тип розподілу	Exp
16		Параметри розподілу	0,025
17		Множина відновлення	[1 2 3]

Ремонтування елементів системи, позначене блоком “ремонтування 1”, розподілено за експоненціальним законом із параметром  $\mu = 0,025$  1/h (табл. 1, рядки 14–16). Такий процес відновлює усі елементи системи, тому в його множині відновлення записуємо значення 1, 2 та 3 (табл. 1, рядок 17). Функції масштабування для зношування генераторів G1, G2 та процесу ремонтування системи задавати в явному вигляді не треба, оскільки поданої інформації про множині відновлення та про критичність вершини подій достатньо, щоб сформувати їх автоматично.

**Модель станів та подій.** На підставі наведеного вище динамічного дерева відмов системи із ковзним резервуванням згідно із правилами [10, с. 67] складена її модель станів та подій, структура якої подана на рис. 3, а параметри – у табл. 2.

**Таблиця 2. Параметри моделі станів та подій системи**

№	Опис станів						Опис подій					
	Назва стану, $S_i$	Графічне подання стану	Коеф. масштабування				$Y_i$	Назва події, $T_k$	$t_{k, f}$	$t_{k, d}$	$t_{k, r}$	$z_k$
			$s_{i, 1}$	$s_{i, 2}$	$s_{i, 3}$	$s_{i, 4}$						
1	$S_6$		1	1	0	0	1	$T_1$	$P_1$	$S_5$	$P_1$	0
2			$T_2$	$P_2$	$S_4$	$P_2$		0				
3	$S_5$		0	1	1	1	1	$T_3$	$P_2$	$S_3$	$P_2$	1
4								$T_4$	$P_3$	$S_2$	$P_3$	1
5								$T_5$	$P_4$	$S_6$	$P_4$	0
6	$S_4$		1	0	1	1	1	$T_6$	$P_1$	$S_3$	$P_1$	1
7								$T_7$	$P_3$	$S_1$	$P_3$	1
8								$T_8$	$P_4$	$S_6$	$P_4$	0



які задають інтенсивності переходів між фазами  $\mathbf{A}$ , початкові ймовірності фаз  $\mathbf{p}(0)$ , а також зв'язок  $\mathbf{C}$  функцій ймовірності фаз із характеристиками надійності системи. Марковську модель подають рівняннями Колмогорова–Чепмена

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}(t) = \mathbf{A}\mathbf{p}(t),$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{p}(t),$$

де  $t$  – час;  $\mathbf{p}(t)$  – вектор функцій ймовірності фаз;  $\mathbf{y}(t)$  – вектор функцій ймовірності перетинів.

Компоненти марковської моделі системи формуємо на основі марковських моделей процесів. Параметри марковських моделей процесів визначаємо згідно

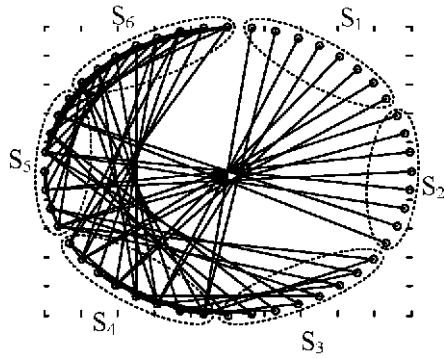


Рис. 4. Граф станів та переходів розщепленої однорідної марковської моделі системи.

із критерієм рівності першого і центрованого другого моментів фактичного розподілу процесу та його марковської моделі. Вважаємо, що для процесу  $P_1$  параметри його марковської моделі становлять  $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{p}_1(0), \mathbf{C}_1\}$ , для  $P_2$  –  $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{p}_2(0), \mathbf{C}_2\}$ , для  $P_3$  –  $\{\mathbf{A}_3, \mathbf{p}_3(0), \mathbf{C}_3\}$  та для  $P_4$  –  $\{\mathbf{A}_4, \mathbf{p}_4(0), \mathbf{C}_4\}$ . Відповідно до вказаних параметрів для початкового працездатного стану  $S_6$ :

$$\mathbf{A}_{S_6} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_4,$$

$$\mathbf{p}_{S_6}(0) = \mathbf{p}_1(0) \otimes \mathbf{p}_2(0) \otimes \mathbf{p}_3(0) \otimes \mathbf{p}_4(0),$$

де  $\otimes$  – оператор тензорного множення;  $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3, \mathbf{E}_4$  – одиничні матриці, розмірність яких дорівнює розмірності матриць  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ .

Для працездатного стану  $S_5$ :

$$\mathbf{A}_{S_5} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{A}_4.$$

Для працездатного стану  $S_4$ :

$$\mathbf{A}_{S_4} = \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{A}_3 \otimes \mathbf{E}_4 + \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{A}_4.$$

Для непрацездатних станів  $S_1, S_2$  та  $S_3$ :

$$\mathbf{C}_{S_1} = \mathbf{C}_{S_2} = \mathbf{C}_{S_3} = \mathbf{I}_{\{S_1\}}$$

де  $\mathbf{I}$  – одиничний вектор-рядок, розмірність якого дорівнює добутку розмірностей усіх матриць  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ .

Для подій  $T_1$  і  $T_6$ , спричинених завершенням процесу  $P_1$ :

$$\mathbf{A}_{T_1} = \mathbf{A}_{T_6} = \mathbf{p}_1 \mathbf{C}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_4.$$

Для подій  $T_2$  і  $T_3$ , спричинених завершенням процесу  $P_2$ :

$$\mathbf{A}_{T_2} = \mathbf{A}_{T_3} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{p}_2 \mathbf{C}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{E}_4.$$

Для подій  $T_4$  і  $T_7$ , спричинених завершенням процесу  $P_3$ :

$$\mathbf{A}_{T_4} = \mathbf{A}_{T_7} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{p}_3 \mathbf{C}_3 \otimes \mathbf{E}_4.$$

Для подій  $T_5$  і  $T_8$ , спричинених завершенням процесу  $P_4$ :

$$\mathbf{A}_{T_5} = \mathbf{A}_{T_8} = \mathbf{E}_1 \otimes \mathbf{E}_2 \otimes \mathbf{E}_3 \otimes \mathbf{p}_4 \mathbf{C}_4. [S2]$$

Одержана марковська модель містить 48 фаз і 64 переходи. Характеристики надійності системи обчислено, застосовуючи матричну експоненту:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\exp(\mathbf{A}t)\mathbf{p}(0),$$

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{E} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3t^3 + \dots,$$

де  $\mathbf{E}$  – одинична матриця, розмірність якої дорівнює розмірності матриці  $\mathbf{A}$ .

Значення матричної експоненти визначено чисельним методом на основі ап-

роксимациї Паде.

**Ймовірнісні показники перетинів** системи із ковзним резервуванням визначені на основі характеристик надійності, які обчислені за розщепленою однорідною марковською моделлю. Система має три непрацездатні стани  $S_1$ ,  $S_2$  та  $S_3$ , які відповідають перетинам (табл. 3). Перетини посортовані за зменшенням їх відносної ваги у загальній ймовірності відмови системи, а під час подання їх вмісту перелічені лише непрацездатні елементи.

**Таблиця 3. Ймовірнісні показники перетинів системи**

№	Назва стану	Вміст перетину	Ймовірність	Відносна вага перетину
1	$S_3$	Непрацездатність генераторів G1 та G2	$4,7390 \cdot 10^{-3}$	69,28%
2	$S_1$	Непрацездатність генераторів G2 та G3	$1,0506 \cdot 10^{-3}$	15,36%
3	$S_2$	Непрацездатність генераторів G1 та G3	$1,0506 \cdot 10^{-3}$	15,36%

Показники перетинів системи визначені для моменту часу  $t = 8000$  h. Як видно із табл. 3, для зменшення ймовірності відмови системи необхідно вжити заходів щодо підвищення надійності генераторів основної групи G1 та G2, непрацездатність яких утворює перетин із відносною вагою 69,28%.

### ВИСНОВКИ

Розроблено математичну модель надійності системи із ковзним резервуванням, призначену для аналізу причин непрацездатності. Формалізацію надійності системи виконано на основі динамічного дерева відмов, а визначення ймовірнісних показників – за розщепленою однорідною марковською моделлю. Одержана модель забезпечила адекватне урахування зміни навантаження основної і резервної груп елементів, тривалість напруження яких розподілена за законом Вейбулла. За вказаною моделлю визначено ймовірнісні показники перетинів та показано, надійність яких елементів необхідно покращувати першочергово, щоб зменшити ймовірність відмови системи. Подальші дослідження спрямовані на розроблення підходів щодо урахування зміни навантаження на ймовірнісні показники перетинів систем із навантажувальним резервуванням за схемою  $k$ -із- $n$ .

1. *Wei-Chang Yeh*. A new algorithm for generating minimal cut sets in  $k$ -out-of- $n$  networks // Reliability Eng. & System Safety. – 2006. – **91**, № 1. – P. 36–43.
2. *Vega M., Sarmiento H. G.* Algorithm to evaluate substation reliability with cut and path sets // Industry Applications, IEEE Transactions on. – 2008. – **44**, № 6. – P. 1851–1858.
3. *Haitao Guo, Xianhui Yang*. Automatic creation of Markov models for reliability assessment of safety instrumented systems // Reliability Eng. & System Safety. – 2008. – **93**, № 6. – P. 829–837.
4. *Половко А. М., Гуров С. В.* Основы теории надежности. 2-е изд., перераб. и доп. – СПб: БХВ-Петербург, 2008. – 704 с.
5. *Codetta-Raiteri D.* Integrating several formalisms in order to increase Fault Trees' modeling power // Reliability Eng. & System Safety. – 2011. – **96**, № 5. – P. 534–544.
6. *Ruiz-Castro J. E., Pérez-Ocón M., Fernández-Villodre G.* Modelling a reliability system governed by discrete phase-type distributions // Reliability Eng. & System Safety. – 2008. – **93**, № 11. – P. 1650–1657.
7. *Chryssaphinou O., Limnios N., Malefaki S.* Multi-state reliability systems under discrete time semi-markovian hypothesis // Reliability, IEEE Transactions on. – 2011. – **60**, № 1. – P. 80–87.
8. *Lozynsky O. Yu., Shcherbovskykh S. V.* Determination of failure intensity using Markov reliability model for renewal of the non-redundancy systems // Przegląd Elektrotechniczny. – 2009. – **85**, № 4. – P. 89–91.
9. *Shcherbovskykh S. V., Lozynsky O. Yu., Marushchak Ya. Yu.* Failure intensity determination for system with standby doubling // Przegląd Elektrotechniczny. – 2011. – **87**, № 5. – P. 160–162.
10. *Щербовських С. В.* Математичні моделі та методи для визначення характеристик надійності багатотермінальних систем із урахуванням перерозподілу навантаження: монографія. – Львів: Вид-во “Львівської політехніки”, 2012. – 296 с.

Національний університет “Львівська політехніка”

Одержано  
13.05.2013