УДК 621.391:519.21

І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик

КОГЕРЕНТНИЙ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

The properties of instantaneous spectral density estimators based on smoothed coherent estimators of cross-correlation functions are analyzed. The asymptotic formulae for estimator's bias and variance, which allow to investigate dependences of systematic and mean square errors of estimation on realization length, point of correligram cutoff and spectral characteristics of signal are derived.

Keywords: *periodically non-stationary vibration signals, spectral analysis, cross-correlation function, variance, systematic and mean square errors*.

Проаналізовано властивості оцінок миттєвої спектральної густини, які знаходять на основі згладжених когерентних оцінок взаємокореляційної функції. Отримано асимптотичні формули для зміщення і дисперсії оцінок, які дають можливість дослідити залежність систематичної та середньоквадратичної похибок оцінювання від довжини відрізка реалізації, точки усічення корелограми, а також спектральних характеристик сигналу.

Ключові слова: *періодично нестаціонарні вібраційні сигнали, спектральний аналіз, взаємокореляційна функція, дисперсія, систематична та середньоквадратична похибки.*

Спектральний аналіз вібраційних сигналів відіграє важливу роль у процесі виявлення та встановлення характеру дефектів обертових механізмів [1–5]. Поява дефектів приводить до суттєвих змін властивостей сигналу у спектральній області, а саме до корельованості відповідних гармонічних складових [1, 4, 5]. Ступінь та характер такої корельованості описують спектральними характеристиками періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП). Взаємоспектральний аналіз сигналів, відібраних у різних точках механічної системи, дає змогу досліджувати залежності між гармонічними складовими вібрацій і завдяки цьому успішніше розв'язувати задачі локалізації та типізації дефектів [6]. Для оцінювання взаємоспектральних характеристик за експериментальними даними можуть бути використані як періодограмний [7], так і корельограмний методи [1]. За останнім оцінки взаємоспектральних характеристик знаходяться на основі інтегральних перетворень Фур'є згладжених оцінок взаємоспектральних характеристик. Для оцінки взаємоспектральної густини тоді маємо:

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)\,k(u)\,e^{-i\omega u}du\,, \qquad (1)$$

де $k(u)$ – функція вікна: $k(-u)=k(u)$, $k(0)=1$, $k(u)=0$ при $|u|>u_m$, u_m – точка усічення корелограми. Для знаходження оцінки взаємокореляційної функції $\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)$ можуть бути використані як когерентний, так і компонентний методи. Вибір того чи іншого методу приводить до специфічних властивостей оцінки (1). Ця стаття присвячена аналізу оцінки (1) для випадку, коли оцінка взаєкореляційної функції обчислюється за когерентним методом, тобто

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+u+nT)-\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+nT)\,, \qquad (2)$$

© І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик, 2014

де $\hat{m}_\xi(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)$, $\hat{m}_\eta(t) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT)$.

Зупинимось спочатку на аналізі зміщення оцінки (1). Оскільки [8, 9]

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u) = b_{\xi\eta}(t,u) - \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT),$$

то математичне сподівання оцінки (1) дорівнює

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k(u)\left[b_{\xi\eta}(t,u) - \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,u+nT)\right]e^{-i\omega u}du\ .$$

Використовуючи подання

$$k(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_2)\ e^{i\omega_2 u}d\omega_2,$$

$$b_{\xi\eta}(t,u) = \int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\ e^{i\omega_1 u}d\omega_1, \qquad (3)$$

отримуємо

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_2)f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\omega_2+\omega_1-\omega)u}du\right]\left[1-g(\omega_1,N)\right]d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(\omega_1,t)h(\omega_1-\omega,u_m)\left[1-g(\omega_1,N)\right]d\omega_1\ , \qquad (4)$$

де

$$g(\omega,N) = \frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{i\omega nT}\ . \qquad (5)$$

Функцію $g(\omega,N)$ подамо у вигляді $g(\omega,N) = \frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}e^{i\omega(m-n)T}$ і врахуємо, що

$$\sum_{n=0}^{N-1}e^{i\omega nT} = \frac{e^{i\omega N\frac{T}{2}}}{e^{i\omega\frac{T}{2}}}\frac{\sin\frac{\omega}{2}NT}{\sin\frac{\omega}{2}T}\ .$$

Тоді

$$g(\omega,N) = \frac{\sin^2\frac{\omega}{2}NT}{N^2\sin^2\frac{\omega}{2}T}\ .$$

Функція $g(\omega,N)$ є періодичною з періодом ω_0: $g(\omega+k\omega_0,N) = g(\omega)$. При цьому $g(k\omega_0,N)=1$. Якщо $N\to\infty$, то для всіх $\omega\neq k\omega_0$, $k\in Z$ $g(\omega,N)$ прямує до нуля.

Згладжувальні вікна вибирають так, що при великих u_m функції $\lambda(\omega)$ мають вигляд гострих піків на частоті $\omega=0$. Якщо взаємоспектральна густина мало змінюється за частотою на інтервалі, де $\lambda(\omega)$ суттєво відрізняється від нуля, то

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t) = f_{\xi\eta}(\omega,t) - f_{\xi\eta}(\omega,t)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)g(\omega_1,N)\,d\omega_1 .$$

Зміщення оцінки (1) при $N \to \infty$, оскільки функція $g(\omega_1, N)$ в асимптотиці вироджується в одиничні сигнали, прямує до нуля для всіх $\omega \in R$.

Беручи до уваги формулу (5) і подання

$$\lambda(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k(u)\, e^{-i\omega u} du ,$$

вираз для зміщення запишемо у вигляді

$$\varepsilon\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right] = -f_{\xi\eta}(\omega,t)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)g(\omega_1,N)\,d\omega_1 =$$

$$= -f_{\xi\eta}(\omega,t)\int_{-\infty}^{\infty} k(u)e^{-\mathrm{i}\omega u}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u-nT)\omega_1}d\omega_1\right]\right]du =$$

$$= -\frac{f_{\xi\eta}(\omega,t)}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{-i\omega nT}k(nT) .$$

Звідси випливає, що зумовлені скінченою довжиною відрізка реалізації зміщення будуть тим меншими, чим на меншому інтервалі $[-u_m, u_m]$ не рівним нулю є кореляційне вікно $k(u)$. Коли точка усічення корелограми $u_{\max}$ є набагато меншою від значення періоду T, то величини зміщень будуть достатньо малими. Однак при зменшенні u_m буде розширятися пік спектрального вікна $\lambda(\omega)$, що збільшує похибку, котрою ми раніше нехтували, покладаючи

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1-\omega)f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\,d\omega_1 \approx f_{\xi\eta}(\omega,t) .$$

Отже, намагання зменшити зміщення оцінок змінної взаємоспектральної густини приводить до двох протилежних вимог. Взяти до уваги якусь одну з них чи відразу обидві, намагаючись при цьому знайти компромісне рішення, – це залежить від конкретної задачі взаємоспектрального аналізу.

Дисперсія оцінки визначається формулою:

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right] = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-u_m}^{u_m}\int_{-u_m}^{u_m} R_{\hat{b}}(t,u_1,u_2)\,e^{i\omega(u_2-u_1)}du_1 du_2 , \qquad (6)$$

де $R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2) = E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_1)\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_2) - E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_1)E\hat{b}_{\xi\eta}(t,u_2)$. Когерентну оцінку кореляційної функції (2) можна записати у такому вигляді:

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,u) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\begin{array}{l}\left[\overset{\circ}{\xi}(t+nT)+m_\xi(t)\right]\left[\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT)+m_\eta(t+nT)\right]- \\ -\left[\overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t)+m_\xi(t)\right]\left[\overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+u)+m_\eta(t+u)\right]\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT) - \overset{\circ}{\hat{m}}_\xi(t)\overset{\circ}{\hat{m}}_\eta(t+nT) . \qquad (7)$$

Тут

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\xi}(t)=\hat{m}_{\xi}(t)-\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\xi(t+nT)-m_{\xi}(t+nT)\right]=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overset{\circ}{\xi}(t+nT),$$

$$\overset{\circ}{\hat{m}}_{\eta}(t)=\hat{m}_{\eta}(t+u)-\hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\begin{bmatrix}\eta(t+u+nT)-\\-m_{\eta}(t+u+nT)\end{bmatrix}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\overset{\circ}{\eta}(t+u+nT).$$

На основі співвідношення (7) для гауссових ПКВП у першому наближенні отримуємо:

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2)=\frac{1}{N^2}\sum_{n,m=0}^{N-1}\overset{\circ}{\xi}(t+nT)\overset{\circ}{\eta}(t+u_1+nT)\overset{\circ}{\xi}(t+mT)\overset{\circ}{\eta}(t+u_2+nT)-$$

$$-b_{\xi\eta}(t,u_1)b_{\xi\eta}(t,u_2)=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1}\begin{bmatrix}b_{\xi}(t,(m-n)T)b_{\eta}(t+u_1,u_2-u_1+(m-n)T)+\\+b_{\xi\eta}(t,u_2+(m-n)T)b_{\xi\eta}(t,u_1+(n-m)T)\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[b_{\xi}(t,nT)b_{\eta}(t+u_1,u_2-u_1+nT)+b_{\xi\eta}(t,u_2+nT)b_{\xi\eta}(t,u_1-nT)\right].$$

Введемо в розгляд функцію

$$b_{\zeta}(t,nT,u_1,u_2)=b_{\xi}(t,nT)b_{\eta}(t+u_1,u_2-u_1+nT)+b_{\xi\eta}(t,u_2+nT)b_{\xi\eta}(t,u_1-nT).$$

Ця функція періодично змінюється за часом, тому її можна записати у вигляді ряду Фур'є:

$$b_{\zeta}(t,nT,u_1,u_2)=\sum_{k\in Z}\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)e^{ik\omega_0 t}.$$

Враховуючи, що

$$b_{\xi}(t,u)=\sum_{k\in Z}\hat{B}_k^{(\xi)}(u)e^{ik\omega_0 t},\qquad b_{\eta}(t,u)=\sum_{k\in Z}\hat{B}_k^{(\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

$$b_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k\in Z}\hat{B}_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

знаходимо

$$\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)=\sum_{l\in Z}e^{il\omega_0 u_1}\begin{bmatrix}B_{k+l}^{(\xi)}(nT)\overline{B}_l^{(\eta)}(u_2-u_1+nT)+\\+B_{k+l}^{(\xi\eta)}(u_2+nT)\overline{B}_l^{(\eta\xi)}(nT-u_1)\end{bmatrix}.$$

Тоді

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,u_1,u_2)=\sum_{k\in Z}e^{ik\omega_0 t}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)\right].$$

Вираз для дисперсії (6) тоді набуває такого вигляду:

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=\sum_{k\in Z}D_k(\omega)e^{ik\omega_0 t},\tag{8}$$

де

$$D_l(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\tilde{B}_k^{(\xi\eta)}(nT,u_1,u_2)e^{i\omega(u_2-u_1)}du_1du_2\right]=$$

$$=\sum_{l\in Z}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{1}{4\pi^2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[B_{l+k}^{(\xi)}(nT)\overline{B}_l^{(\eta)}(u_2-u_1+nT)+\right.\right.\right.\right.$$

$$+B_{l+k}^{(\xi\eta)}(u_2+nT)\overline{B}_l^{(\eta\xi)}(nT-u_1)\Big]e^{i\omega(u_2-u_1)}e^{-il\omega_0 u_1}du_1du_2 .$$

Виразимо кореляційні компоненти через спектральні

$$B_k^{(\xi)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega, \quad B_k^{(\eta)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\eta)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega,$$

$$B_k^{(\xi\eta)}(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega)e^{i\omega u}d\omega,$$

а функцію вікна $k(u)$ – через вагову функцію (формула (3)). Після перетворень знаходимо

$$D_k(\omega)=\sum_{l\in Z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\lambda(\omega_1+\omega)\lambda(\omega_1+\omega-l\omega_0)f_{k+l}^{(\xi)}(\omega_2)f_{-l}^{(\eta)}(\omega_1)g(\omega_1+\omega_2,N)+$$

$$+\lambda(\omega+\omega_2)\lambda(\omega-\omega_1)f_{l+k}^{(\xi\eta)}(\omega_2)f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega_1)g(\omega_1+\omega_2,N)\Big]d\omega_1d\omega_2 . \qquad (9)$$

Функція $\lambda(\omega)$ має гострі піки при нульовому значенні аргументу, тому можна вважати, що $\lambda(\omega_1+\omega)\lambda(\omega_1+\omega+l\omega_0)\approx 0$ для $l\neq 0$. Якщо на ширині спектрального вікна спектральні компоненти змінюються мало, то

$$D_k(\omega)\approx f_0^{(\eta)}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1+\omega)f_k^{(\xi)}(\omega_2)g(\omega_1+\omega_2,N)\,d\omega_1d\omega_2+$$

$$+\sum_{l\in Z}f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega-\omega_1)\lambda(\omega+\omega_2)g(\omega_2-\omega_1,N)\,d\omega_1d\omega_2 .$$

Першу складову цього виразу перепишемо у вигляді

$$D_k^{(1)}(\omega)=f_0^{(\eta)}(\omega)\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\xi)}(\omega_2)e^{i\omega_2 nT}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega+\omega_1)e^{i\omega_1 nT}d\omega_1\right]d\omega_2 .$$

Зробивши заміну $\omega^{/}=\omega+\omega_1$, маємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega+\omega_1)e^{i\omega_1 nT}d\omega_1=e^{-\mathrm{i}\omega nT}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)e^{i\omega_1 nT}d\omega_1 .$$

Тоді

$$D_k^{(1)}(\omega)=f_0^{(\eta)}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\xi)}(\omega_2)g(\omega_1+\omega_2-\omega,N)\,d\omega_2\right]d\omega_1 .$$

Врахувавши, що $g(\omega,N)$ зі збільшенням N прямує до одиничних сигналів у точках $\omega=k\omega_0$, $k\in Z$, внутрішній інтеграл перетворимо так:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f_k^{(\xi)}(\omega_2)g(\omega_1+\omega_2-\omega,N)d\omega_2=\sum_{p\in Z}\int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}}f_k^{(\xi)}(\omega_2)g(\omega_1+\omega_2-\omega,N)\,d\omega_2\approx$$

$$\approx\sum_{p\in Z}f_k^{(\xi)}(\omega-\omega_1+k\omega_0)\int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}}g(\omega_1+\omega_2-\omega,N)\,d\omega_2 .$$

Оскільки

$$\int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}} g(\omega_1+\omega_2-\omega,N)\,d\omega_2 =$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}^{N-1} e^{i\omega_2(m-n)T}\int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}} e^{i\omega_1(m-n)T}\,d\omega_1=\begin{cases}\frac{2\pi}{T}, & m=n,\\ 0, & m\neq n,\end{cases}$$

то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega-\omega_1+k\omega_0)\,d\omega_2 \approx \frac{2\pi}{\theta}\sum_{p\in Z} f_k^{(\xi)}(\omega-\omega_1+p\omega_0)\,.$$

Врахувавши наближену рівність

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega-\omega_1+p\omega_0)\lambda^2(\omega_1)\,d\omega_1 = f_k^{(\xi)}(\omega+p\omega_0)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)\,d\omega_1 = W(0)f_k^{(\xi)}(\omega+p\omega_0)\,,$$

де

$$W(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} k^2(u)\,e^{-i\omega u}du\,, \tag{10}$$

для величин (9) остаточно отримуємо

$$D_k^{(1)}(\omega)=\frac{2\pi}{\theta}W(0)f_0^{(\eta)}(\omega)\sum_{p\in Z} f_k^{(\xi)}(\omega+p\omega_0)\,.$$

Співвідношення (10) отримуємо, взявши до уваги подання (3)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)d\omega_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1(u_1+u_2)}d\omega_1\right]du_1du_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}k^2(u)du\,.$$

Для другої складової виразу дисперсії знаходимо

$$D_k^{(2)}(\omega)=\sum_{l\in Z} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}k(u_1)k(u_2)\times$$

$$\times\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_2(u_1-nT)}d\omega_2\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega_1(u_2-nT)}d\omega_1\right]\right]\times$$

$$\times e^{-i\omega(u_1+u_2)}du_1du_2=\sum_{l\in Z} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)k^2(nT)e^{-i2\omega nT}\right]=$$

$$=\sum_{l\in Z} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega)f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega_1)g(\omega_1-2\omega,N)\,d\omega_1\right].$$

Останній інтеграл можна переписати у вигляді

$$\int_{-\infty}^{\infty}W(\omega_1)g(\omega_1-2\omega,N)\,d\omega_1=\sum_{p\in Z}\int_{(2p-1)\frac{\pi}{T}}^{(2p+1)\frac{\pi}{T}}W(\omega_1)g(\omega_1-2\omega,N)\,d\omega_1=$$

$$= \sum_{p\in Z} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} W(\omega_1 + p\omega_0) g(\omega_1 - 2\omega, N)\, d\omega_1 .$$

Приймемо наближено

$$\sum_{p\in Z} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} W(\omega_1 + p\omega_0) g(\omega_1 - 2\omega, N)\, d\omega_1 = \sum_{p\in Z} W(2\omega + p\omega_0) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} g(\omega_1 - 2\omega, N)\, d\omega_1 .$$

Оскільки

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} g(\omega_1 - 2\omega, N)\, d\omega_1 = \frac{1}{N^2} \sum_{m,n=0}^{N-1} e^{-i2\omega(m-n)T} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} e^{i\omega_1(m-n)T} d\omega_1 = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{T}, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases}$$

то

$$D_l^{(2)}(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \sum_{p\in Z} W(2\omega + p\omega_0) \sum_{l\in Z} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) .$$

Відтак, коефіцієнти Фур'є дисперсії оцінки (8) визначають наближеною формулою

$$D_k(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \left[\begin{array}{l} f_0^{(\eta)}(\omega) W(0) \sum\limits_{p\in Z} f_k^{(\xi)}(\omega + p\omega_0) + \\ + \sum\limits_{p\in Z} W(2\omega + p\omega_0) \sum\limits_{l\in Z} f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega) f_{l+k}^{(\xi\eta)}(-\omega) \end{array} \right] . \qquad (11)$$

Ці величини прямують до нуля при $\theta \to \infty$. Швидкість їх збіжності залежить як від спектральних характеристик даного ПКВП, так і від форми вибраного вікна, а саме властивостей функції $W(\omega)$.

Використовуючи (10), а також формулу Пуассона

$$\frac{1}{T} \sum_{l\in Z} e^{il\omega_0 u} = \sum_{l\in Z} \delta(u - lT) ,$$

маємо

$$\sum_{p\in Z} W(2\omega - p\omega_0) = \frac{T}{2\pi} \sum_{p\in Z} k^2(pT) e^{i2\omega pT} , \quad W(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-u_m}^{u_m} k^2(u)\, \mathrm{d}u .$$

Останній інтеграл є величиною, обернено пропорційною до так званої еквівалентної смуги частот спектрального аналізу Δf_e [10–12], так що $W(0) = \dfrac{1}{2\pi \Delta f_e}$. Еквівалентна смуга частот Δf_e, характеризуючи ширину кореляційного вікна, має вирішальний вплив на точність оцінювання. Оскільки для типових вікон величина $\dfrac{1}{\Delta f_e}$ набуває значення від $0{,}5 u_m$ до $2u_m$ [11], то при $\dfrac{u_m}{\theta} \leq 1$ складові $D_k^{(1)}(\omega)$ будуть незначними за величиною. При такому ж співвідношенні між u_m і θ малими будуть також і величини $D_k^{(2)}(\omega)$.

Отже, при заданій довжині відрізка реалізації θ дисперсія оцінки спектральної густини (1) зменшуватиметься зі зменшенням ширини кореляційного вікна. Так само поводяться і флуктуаційні складові зміщення оцінок. Однак регулярну складову зміщення, котра визначає роздільну здатність спектрального аналізу, можна зменшити, вже збільшуючи u_m. Наявність таких різних тенденцій в залежностях характеристик оцінок ускладнює обґрунтований вибір параметрів u_m і θ. Такий вибір слід проводити, виходячи з конкретної мети спектрального аналізу і сформованих на цій основі з використанням формул (4), (8) і (11) критеріїв якості оцінювання.

1. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: Фіз.-мех. ін-т НАН України, 2013. – 802 с.
2. *Методи* та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС / І. М. Яворський , І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Енергетика та електрифікація. – 2012. – № 8 (348). – С. 58–67.
3. *Віброакустична* система ВАС-1 для ранньої вібраційної діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович та ін. // Наука та інновації. – 2013. – № 3. – С. 31–38.
4. *Antoni J.* Cyclostationarity by examples // Mechanical Systems and Signal Proc. – 2009. – **23**. – P. 987–1036.
5. *Cyclostationarity:* Theory and Methods. Lecture Notes in Mechanical Engineering / Eds.: F. Chaari, J. Leskow, A. Sanches-Ramirez. – New York: Springer, 2013. – 186 p.
6. *Інформаційно-вимірювальна* система для багатомірної вібраційної діагностики / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович та ін. // Проблемы машиностроения. – 2013. – **16**, № 3. – С. 19–26.
7. *Hurd H. L.* Nonparametric time series analysis for periodically correlated random processes // IEEE Trans. Inf. Theory. – 1989. – **IT 35**. – P. 350–359.
8. *Взаємокореляційний* когерентний аналіз періодично нестаціонарних випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець , І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 36 (112). – С. 5–13.
9. *Компонентний* взаємокореляційний аналіз періодично нестаціонарних випадкових сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Б. Кравець // Відбір і обробка інформації. – 2012. – № 37 (113). – С. 10–18.
10. *Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.* Спектральный анализ случайных процессов. – М.: Энергия, 1974. – 239 с.
11. *Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.* Выборочные оценки спектральных характеристик случайных процессов. – М.: Энергия, 1978. – 150 с.
12. *Грибанов Ю. И., Мальков В. Л.* Погрешности и параметры цифрового спектрально-корреляционного анализа. – М.: Радио и связь, 1984. – 159 с.

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;
Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща

Одержано 18.04.2014