УДК 004.67

Б. С. Семенов, І. В. Шелевицький

ЧАСТОТНО-ЧАСОВИЙ ФІЛЬТР ЗІ СТАТИСТИЧНОЮ РАНГОВОЮ СЕЛЕКЦІЄЮ КОЕФІЦІЄНТІВ

Development of filter based on time-frequency decomposition of signals by the method of least squares spline bases and further threshold selection by Student's coefficients is described. Further it can be used for hardware circuits design in programmable logic and for developing of signal comparison systems.

Keywords: *time-frequency filter, LSS decomposition, L3S filter.*

Описано розробку фільтра, що ґрунтується на частотно-часовому розкладі сигналів за методом найменших квадратів у сплайнових базисах та наступною пороговою селекцією коефіцієнтів розкладу за критерієм Стьюдента. Надалі його застосування можливе для розробки апаратних схем у програмованій логіці та для розробки систем порівняння сигналів.

Ключові слова: *частотно-часовий фільтр, LSS розклад, L3S фільтр.*

Виділення корисного сигналу серед шуму – добре відома актуальна задача. Однак її вирішення існує лише для окремих випадків у класі лінійної фільтрації, де вдається отримати оптимальні рішення. Існує також низка нелінійних методів виділення корисного сигналу як медіанна фільтрація та порогова фільтрація. Порогова фільтрація знайшла найбільше застосування у радіолокації й застосовує розвинений математичний апарат статистики. Завдяки інтенсивному розвитку останнім часом методів частотно-часового аналізу, зокрема вейвлет-аналізу, порогові методи тут застосовують саме для фільтрації сигналів. Це Threshold selection або Thresholding Methods, суть яких – у прирівнюванні до нуля або вирівнюванні малозначимих коефіцієнтів розкладу. Найбільш важливим питанням є встановлення порогу, який має залежати від дисперсії шуму. Надто низький поріг не буде суттєво знижувати шум, а надто високий буде суттєво спотворювати корисний сигнал. Через відносно невеликий динамічний діапазон сигналів у відеозображеннях поріг встановити досить просто, і ці методи набули найбільшого поширення саме там. Акустичні сигнали мають динамічний діапазон у 120 дБ, й поріг може змінюватися дуже суттєво у процесі фільтрації. В класичній роботі [3] пропонують встановлювати поріг $T = \sigma\sqrt{2\log(N)}$, де σ – середньоквадратичне відхилення шуму N – кількість відліків розкладу. Також є багато різних функцій обмеження [2]. Серед найбільш відомих – Hard Thresholding Function $y(t) = \begin{cases} x(t), x(t) \geq T \\ 0, x(t) < T \end{cases}$ та Soft Thresholding Function $y(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(x(t)) * (x(t) - T), x(t) \geq T \\ 0, x(t) < T \end{cases}$. Проте вибір порогу й функцій залишається доволі суб'єктивним, а їхній вплив на сигнал оцінюють переважно емпіричним шляхом для характерних сигналів певних задач.

У роботі пропонується для вибору порогу для коефіцієнтів частотно-часового розкладу використовувати статистичний *t*-критерій Стьюдента. Тобто виконувати перевірку статистичної гіпотези про рівність коефіцієнта розкладу нулю. Підставою для застосування критерію Стьюдента є використання частотно-часового розкладу, що ґрунтується на апроксимації сигналу за методом найменших квадратів у сплайнових базисах (LSS розклад [2]). Локальність сплайнового базису дає змогу локально оцінювати середньоквадратичне відхилення та локально розраховувати порогове значення критерію. Застосування критерію Стьюдента дає можливість обґрунтовано підійти до вибору порогу, спираючись на задану ймовірність помилки першого роду.

Як відомо, частотно-часовий вейвлет-розклад ґрунтується на інтерполяції сигналу за допомогою вейвлет-базисів.

Розглянемо дещо інший підхід, що ґрунтується на апроксимації сигналу у сплайнових базисах за методом найменших квадратів. Коефіцієнтами розкладу оцінки значень сплайна у точках склейки фрагментів сплайна $\tilde{A} = (P^T P)^{-1}(P^T X)$, де X – вхідний сигнал; P – матриця планування, стовпці якої є базисними сплайн-функції. На кожному фрагменті сплайна знаходяться n відліків вхідного сигналу. Тому відбувається стиснення вхідного сигналу у n разів. Відновлення n відліків здійснюється шляхом інтерполяції $\tilde{X} = P\tilde{A}$. Залишки наближення розраховують як $E = X - \tilde{X}$. Фактично МНК оцінки сигналу є його низькочастотною складовою, а залишки – високочастотною складовою. Реконструкція сигналу полягає у наступному: $X = \tilde{X} + E$. Описані процеси можна реалізувати у вигляді цифрових фільтрів. Так $\tilde{X} = P(P^T P)^{-1} P^T X = LX$, де L – квадратна симетрична матриця, рядки або стовпці якої є коефіцієнтами нерекурсивного фільтра нижніх частот. Дзеркальний фільтр верхніх частот, що виділяє залишки наближення, отримуємо з рядків симетричної матриці M: $E = X - \tilde{X} = (I - L)X = MX$, де I – одинична матриця відповідної розмірності. Діагональні елементи коваріаційної матриці МНК $G = (P^T P)^{-1}$ показують зниження вхідної дисперсії фільтром.

Запишемо процес частотно-часового розкладу в операторному вигляді. Позначимо базисний сплайн, що складається з чотирьох фрагментів, як $B_{\tau,\upsilon}(t)$, де τ – зміщення базису відносно початкового базисного сплайна; υ – масштабний коефіцієнт базису відносно найширшого. Базис можна записати як

$$B_{\tau,\upsilon}(t) = B_0\left(\frac{t - \tau n}{\upsilon}\right), \quad n\upsilon \in R^+, \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ .$$

Позначимо як LS оператор отримання оцінок МНК сигналу $x(t)$ у системі вектора базисних функцій B_υ. Вектор A_υ оцінок (коефіцієнтів розкладу) в масштабі υ запишемо так:

$$A_\upsilon = LS\left[x(t), B_\upsilon\right], \qquad \tilde{X}_\upsilon = IN\left[A_\upsilon, B_\upsilon\right].$$

Залишки наближення (нев'язку МНК апроксимації) позначимо окремим оператором RS, а процес отримання залишків від МНК наближення запишемо як $E_\upsilon = RS\left[x(t), B_\upsilon\right]$.

У загальному операторному вигляді розклад можна записати так:

$$A_{\upsilon_0} = LS[x(t), B_{\upsilon_0}], \qquad E_{\upsilon_0} = RS[x(t), B_{\upsilon_0}],$$

$$A_{\upsilon_k} = LS[E_{\upsilon_{k-1}}, B_{\upsilon_k}], \qquad E_{\upsilon_k} = RS[E_{\upsilon_{k-1}}, B_{\upsilon_k}], \qquad k = \overline{1, K} .$$

Результатом розкладу є вектори МНК оцінок та вектор залишків наближення на останньому етапі розкладу:

$$\Omega = \{A_{\upsilon_0}, \ldots, A_{\upsilon_K}, E\}, \quad \text{де } E = E_{\upsilon_K} .$$

Реконструкція полягає в наступній послідовності операцій:

$$x(t) = E + \sum_{k=0}^{K} IN[A_{\upsilon_k}, B_{\upsilon_k}] .$$

На відміну від класичного вейвлет-аналізу, виділення частот в якому відбувається від найвищих до найнижчих, у LSS розкладі частоти виділяються від нижчих до вищих. Картина частотно-часового LSS розкладу складається з МНК оцінок початкового сигналу та відповідних залишків.

Критерій Стьюдента для коефіцієнтів частотно-часового розкладу.

Для оцінок МНК добре відомі методи перевірки статистичних гіпотез, що ґрунтуються на критерії Стьюдента. Для застосування критерію необхідні оцінки дисперсії визначення коефіцієнтів розкладу, отримати які можна із залишків наближення. Враховуючи локальність сплайнових базисів, визначатимемо дисперсію за залишками на двох фрагментах ліворуч й праворуч від вузлової точки. Тоді, окрім матриці коефіцієнтів розкладу, отримаємо й матрицю дисперсій, або краще середньоквадратичних відхилень залишків:

$$\sum=\left\{\sum_{\upsilon_0},\sum_{\upsilon_1},...,\sum_{\upsilon_K}\right\}.$$

Графічне відображення СКВ коефіцієнтів розкладу, аналогічне відображенню коефіцієнтів частотно-часового розкладу, дає змогу наочно побачити картину достовірності визначення коефіцієнтів. Для визначення СКВ коефіцієнтів розкладу необхідно врахувати зниження дисперсії внаслідок МНК оцінювання. Відповідні СКВ залишків слід помножити на корінь квадратний із елементів коваріаційної матриці G .

$$\Theta=\left\{\theta_{\upsilon_0},\theta_{\upsilon_1},...,\theta_{\upsilon_K}\right\}=\left\{\Sigma_{\upsilon_0}\sqrt{g_{\upsilon_0}},\quad \Sigma_{\upsilon_1}\sqrt{g_{\upsilon_1}},\quad ...,\quad \Sigma_{\upsilon_k}\sqrt{g_{\upsilon_k}}\right\}.$$

Тоді порогові значення критерію Стьюдента визначають як

$$T=\left\{t_{4n_0-4,\alpha}\,A_{\upsilon_0}/\theta_{\upsilon_0},t_{4n_1-4,\alpha}A_{\upsilon_1}/\theta_{\upsilon_1},...,t_{4n_k-4,\alpha}A_{\upsilon_k}/\theta_{\upsilon_k}\right\},$$

де $t_{4n_k-4,\alpha}$ – коефіцієнти Стьюдента для рівня значимості α і $4n_k-4$ ступенів вільності для *k*-го рівня розкладу.

Для визначених порогових рівнів застосовуємо Hard Thresholding Function, внаслідок чого статистично не значимі коефіцієнти розкладу (для яких не можна відкинути гіпотезу про рівність нулю) стануть нульовими. Позначимо коефіцієнти розкладу, що пройшли нелінійну операцію порогової селекції, як $Г=\left\{\tilde{A}_{\upsilon_0},\tilde{A}_{\upsilon_1},...,\tilde{A}_{\upsilon_k}\right\}$. Отримані коефіцієнти можна відображати як статистично значимий частотно-часовий розклад аналогічно вейвлет-розкладу.

Можна також отримати реконструкцію відфільтрованого із врахуванням статистичної значимості коефіцієнтів сигналу. Реконструкція вихідного сигналу фільтра відбувається шляхом сплайн-інтерполяції й додавання значень сплайна на різних масштабах $y(t)=\sum_{k=0}^{K}IN\left[\tilde{A}_{\upsilon_k},B_{\upsilon_k}\right]$. Оскільки кінцеві залишки E на найкоротшому масштабі не підлягають обробці за МНК, то вважаємо їх такими, що не містять корисного сигналу, тобто шумом. З цих міркувань кінцеві залишки до реконструйованого сигналу не включаємо.

Отже, видалення шумів із сигналу відбувається завдяки трьом чинникам. Перший, лінійний чинник – це зниження дисперсії коефіцієнтів розкладу завдяки їх оцінюванню за методом найменших квадратів. Рівень зниження дисперсії залежить від виду базисного сплайна та числа відліків на фрагменті сплайна. Чим більше відліків на фрагменті, тим сильніше зниження дисперсії. Другим чинником є відкидання останніх залишків (високочастотної складової). Це нелінійна операція. Стосовно багатьох сигналів така операція може бути обґрунтованою, оскільки для зниження шумів квантування застосовують подвоєння необхідної частоти дискретизації. Операція нелінійна. Третім чинником є порогова заміна статистично незначимих коефіцієнтів нульовими значеннями. Цю операцію можна розглядати як варіант адаптивного Hard Thresholding.

Розглянемо приклад роботи запропонованого фільтра L3S (Last square spline student) із тестовим сигналом. Фільтр програмно реалізовано у середовищі Matlab. Сформуємо тестовий сигнал (рис. 1) як послідовність (по 1024 відліки) білого нормального шуму, низькочастотного випадкового процесу, смугового випадкового процесу, білого нормального шуму. До цього додамо білий нормальний шум. Випадкові процеси формуються з білого шуму фільтрами Батерворта 5-го порядку з частотами зрізу 0,01 для ФНЧ та 1/28, 1/20 для смугового.

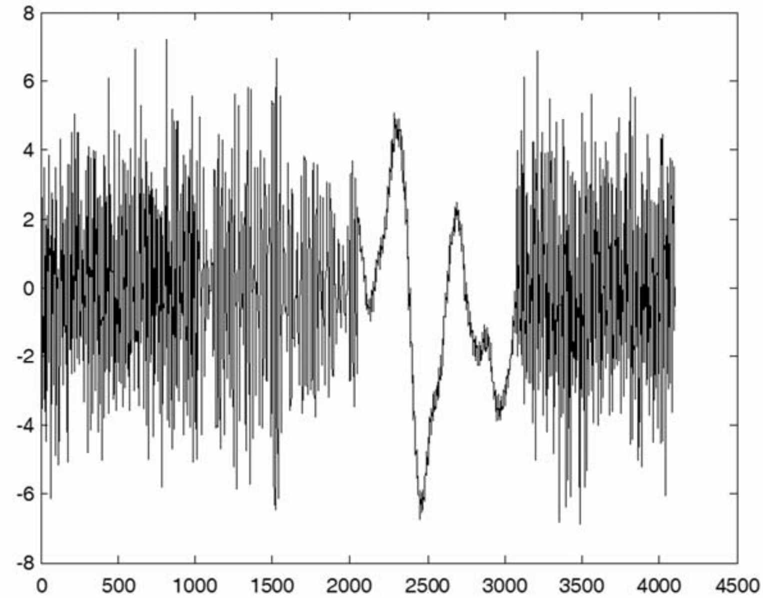

Рис. 1. Тестовий вхідний сигнал.

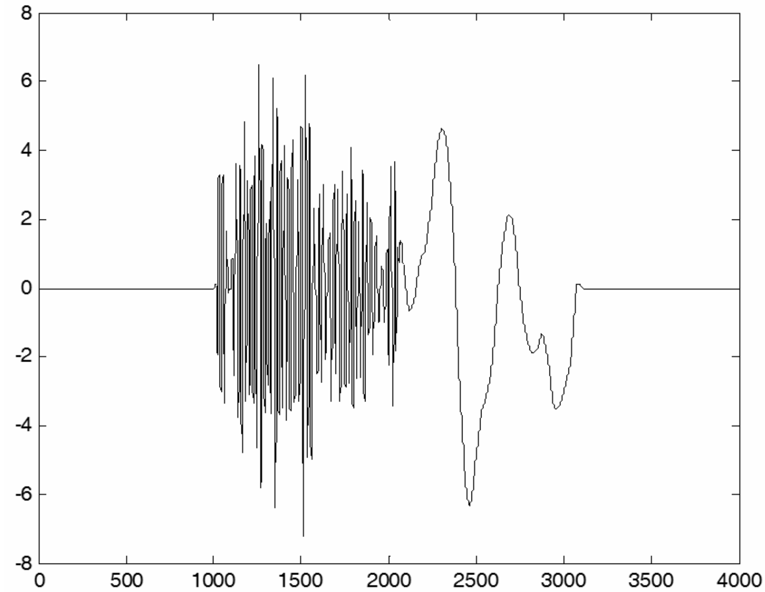

Рис. 2. Результат фільтрації з рівнем значимості 0,001.

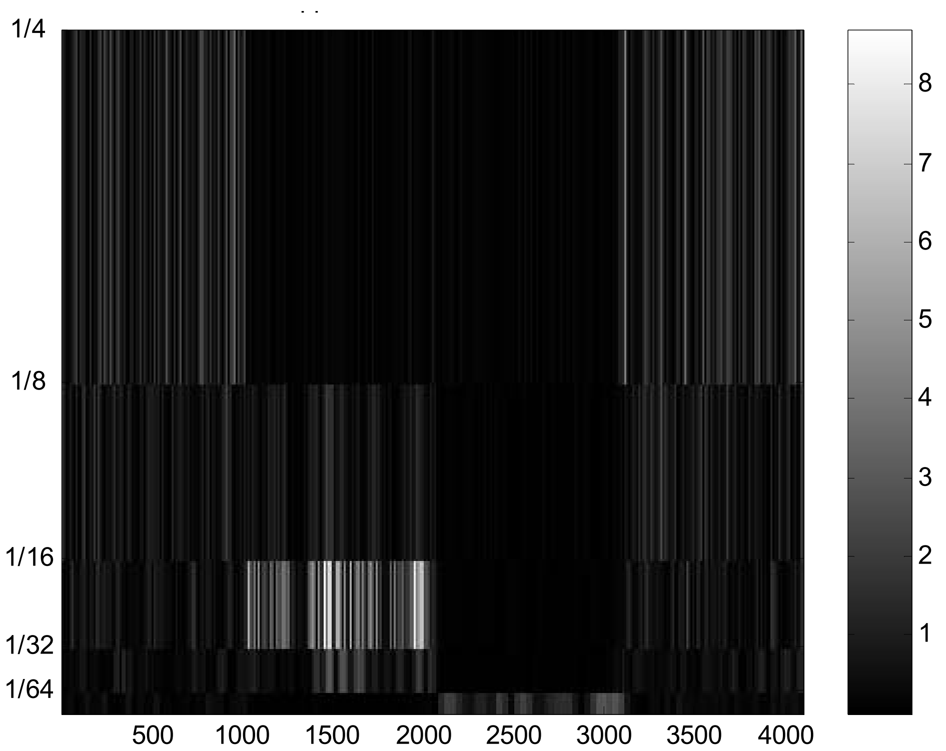

Рис. 3. Частотно-часовий (LSS) розклад сигналу у сплайнових базисах:
F_s – частота дискретизації сигналу; $T_s = 1/F_s$ – період дискретизації.

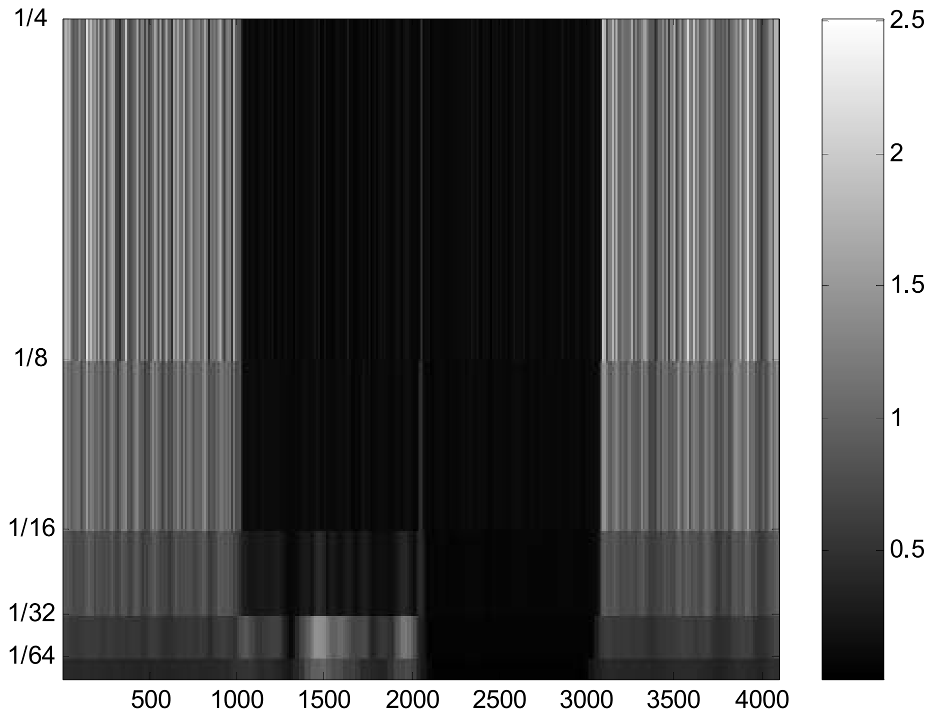

Рис. 4. СКВ похибок розкладу.

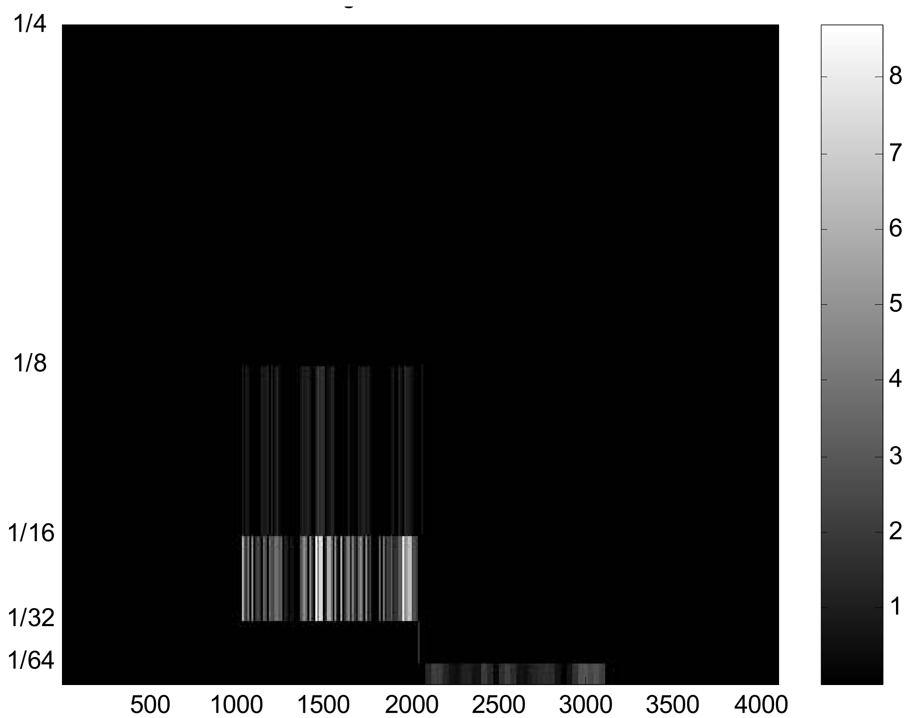

Рис. 5. Статистично значимі коефіцієнти частотно-часового розкладу.

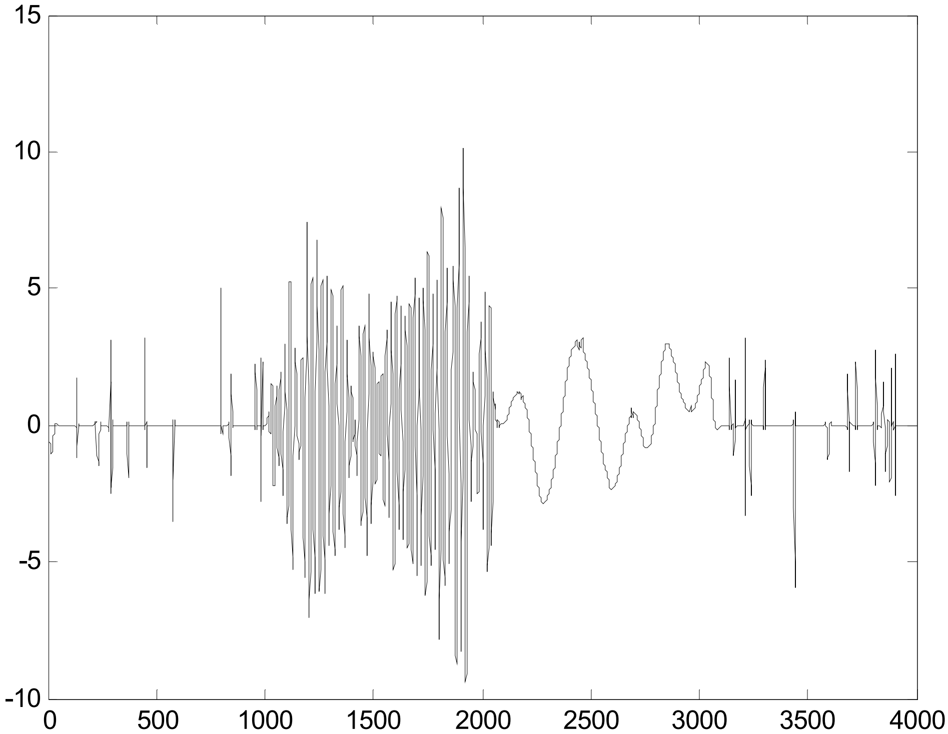

Рис. 6. Результат фільтрації сигналу з рівнем значимості 0,05.

Результат фільтрації з рівнем помилки першого роду 0,001 показано на рис. 2. Очевидною особливістю фільтра є можливість усунення з часової послідовності білого шуму. У тестовому сигналі це фрагменти на початку і у кінці сигналу. На рис. 3 показано картину частотно-часового розкладу, що подібна до вейвлет-розкладу. Застосування локальних сплайнових базисів та методу найменших квадратів для розкладу дали змогу отримати карту оцінок середньоквадратичного відхилення коефіцієнтів розкладу (рис. 4). Це дало можливість розрахувати порогові значення критерію Стьюдента для коефіцієнтів. На рис. 5 показано картину частотно-часового розкладу із статистично значимими коефіцієнтами. За допомогою синтезу з цими коефіцієнтами отримано вихідний сигнал у часовій області, показаний на рис. 2. Рівень порогу й результат фільтрації суттєво залежить від заданого рівня помилки першого роду. Підвищення рівня до 0,05 (рис. 6) призводить до пропусків окремих фрагментів випадкового шуму на початку й у кінці тестового сигналу. Також можна помітити фрагменти шуму на екстремумах низькочастотного сигналу.

ВИСНОВКИ

Запропонований фільтр L3S, який ґрунтується на частотно-часовому розкладі сигналів за методом найменших квадратів у сплайнових базисах та наступною пороговою селекцією коефіцієнтів розкладу за критерієм Стьюдента.

Фільтр можна розглядати як різновид Thresholding методів очищення сигналів від шумів з адаптивним порогом селекції, що залежить від числа даних на фрагменті сплайна та дисперсії оцінок коефіцієнтів за методом найменших квадратів.

Фільтр поєднує лінійний метод зниження дисперсії шумів за рахунок застосування оцінок методу найменших квадратів, відкидання високочастотної складової та порогову селекцію коефіцієнтів розкладу за критерієм Стьюдента.

Особливістю L3S фільтра є видалення із сигналу фрагментів білого шуму. Завдяки цьому фільтр можна застосовувати у системах зв'язку, акустичних системах для вилучення шуму у паузах.

Подальший розвиток полягає у розробці апаратних схем реалізації фільтра у програмованій логіці та розробці способів порівняння сигналів.

1. *Яворський І. М., Юзефович Р. М., Кравець І. Б.* Виділення детермінованої складової періодично нестаціонарних випадкових процесів методом найменших квадратів [Електронний ресурс]. – Режим доступу: URL: http://www.ipm.lviv.ua/editions/vidbir/vidbir-an-2010-32_ue.php. – Назва з екрана.
2. *Шелевицький І. В.* Сплайн-методи і засоби аналізу і синтезу цифрових сигналів: дис. ... доктор тех. наук: 05.12.17. – К., 2005. – 346 с.
3. *Comparative* Analysis of Advanced Thresholding Methods for Speech-Signal Denoising [Electronic resource]. – Access mode: http://research.ijcaonline.org/volume59/number16/pxc3884373.pdf
4. *Donoho D. L., Johnstone I. M.* Threshold selection for wavelet shrinkage of noisy data. Engineering Advances: New Opportunities for Biomedical Engineers // Proc. 16th Annual Int. Conf. of the IEEE Eng. in Medicine and Biology Society. – 1994. – **1**. – P. A24–A25.

Національний авіаційний університет, Київ
Криворізький національний університет

Одержано
12.05.2014