УДК 621.391:519.22

ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ КОРЕЛЯЦІЙНИХ ІНВАРІАНТІВ ВЕКТОРНИХ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

І. М. Яворський [1,2], І. Й. Мацько [1], Р. М. Юзефович [1], В. Б. Шевчик [1]

[1] **Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України;**

[2] **Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща**

E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com, matskoivan@gmail.com

Розглянуті подання кореляційного тензора векторного періодично нестаціонарного вібраційного сигналу та його інваріантів у вигляді рядів Фур'є. Проаналізовано властивості коефіцієнтів Фур'є відповідних рядів. Наведені приклади гармонічного аналізу інваріантів амплітудно- та фазомодульованих сигналів, які показують нові можливості для розділення рухомого й нерухомого дефектів.

Ключові слова: *періодично нестаціонарні вібраційні сигнали, інваріанти кореляційного тензора, гармонічний аналіз.*

CORRELATION INVARIANTS HARMONIC ANALYSIS FOR VECTORIAL PERIODICALLY NONSTATIONARY VIBRATION SIGNALS

I. M. Javorskyj [1,2], I. Y. Matsko [1], R. M. Yuzefovych [1], V. B. Shevchyk [1]

[1] **Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine;**

[2] **Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Bydgoszcz, Poland**

Use of a vibration signal model in the form of vectorial periodically non-stationary random processes (PNRP) is proposed. It is shown that correlation function of linear and quadratic invariants may be used for detection of mechanical system faults or may be a basis for diagnostic criteria grounding. Representations of correlation tensor of vectorial periodical non-stationary vibration signal and its invariants in the form of Fourier series are considered. Fourier coefficients properties of those series are analyzed. The examples of harmonic analysis of amplitude and phase modulated signals that allow creation of new criteria for separation of moving and stationary defects are presented. It is shown that the second order curves for the case of stationary defect have an ellipse-shape form. Also it is shown that the second correlation component is defined by only odd parts of the cross-correlation function of the processes what modulates harmonics of the vector orthogonal components.

Keywords: *periodically non-stationary vibration signals, correlation tensor invariants, harmonic analysis.*

Фізичні величини, які характеризують вібрації, а саме: переміщення, швидкість, прискорення, є векторами. Для кожної зі складових таких векторів (вертикальної, горизонтальної чи осьової) за наявності пошкоджень механізмів властиві риси повторюваності та стохастичності, які адекватно можуть бути відображені в імовірнісних характеристиках періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) – математичному сподіванні, кореляційній функції, спектральній густині, а також їх коефіцієнтах Фур'є [1, 2]. Різні типи дефектів по-різному проявляються в імовірнісній структурі ПКВП, що описує відповідну складову вібрацій, тому для виявлення дефектів доводиться аналізувати кожну з них. Ефективність виявлення дефектів, розділення їх джерел, встановлення типів дефектів зростає, якщо виконувати сумісний аналіз складових вібрацій на основі їх моделей у вигляді векторних ПКВП [1, 3, 4]. Властивості останніх у межах теорії другого порядку можна описати кореляційною та спектральною тензор-функціями та їх лінійними і квадратичними інваріантами, які не залежать від того, в якій системі координат вимірювали. Елементи кореляційного чи спектрального тензорів, а також їх інваріанти є періодичними функціями часу й можуть бути однозначно подані у вигляді рядів Фур'є. З використанням таких подань може бути здійснений гармонічний аналіз цих величин і досліджена їх структура. Задачі гармонічного аналізу кореляційних інваріантів векторних ПКВП розглядаються в цій статті.

Випадковий процес $\boldsymbol{\xi}(t) = \mathbf{i}\xi_1(t) + \mathbf{j}\xi_2(t)$, де $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ – базові орти, будемо називати векторним ПКВП [1, 4, 5], якщо математичне сподівання $\mathbf{m}_\xi(t) = E\boldsymbol{\xi}(t)$ є вектором, складові якого періодично змінюються за часом

$$\mathbf{m}_\xi(t) = \mathbf{i}m_{\xi_1}(t+T) + \mathbf{j}m_{\xi_2}(t+T) = \mathbf{m}_\xi(t+T),$$

а кореляційна функція $\boldsymbol{b}_\xi(t,u) = E\overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}(t) \otimes \overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}(t+u)$, де $\overset{\circ}{\boldsymbol{\xi}}(t) = \boldsymbol{\xi}(t) - \mathbf{m}_\xi(t)$, а $\otimes$ – знак тензорного добутку, є періодичною за часом тензорною функцією: $\boldsymbol{b}_\xi(t,u) = \boldsymbol{b}_\xi(t+T,u)$. Відмітимо, що величина $T > 0$ є однаковою для математичного сподівання та кореляційної функції, при цьому умова періодичності не накладається на поведінку кореляційної функції за зсувом u, хоча при означенні ПКВП цей випадок не відкидається.

Для фіксованих t і u величина $\boldsymbol{b}_\xi(t,u)$ є діадним тензором. З матричного подання тензора

$$\boldsymbol{b}_\xi(t,u) = \begin{bmatrix} b_{\xi_1}(t,u) & b_{\xi_1\xi_2}(t,u) \\ b_{\xi_2\xi_1}(t,u) & b_{\xi_2}(t,u) \end{bmatrix} \tag{1}$$

та умови $\boldsymbol{b}_\xi(t+T,u) = \boldsymbol{b}_\xi(t,u)$ випливає, що автокореляційні функції $\boldsymbol{b}_{\xi_1}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}_1(t)\overset{\circ}{\xi}_1(t+u)$, $\boldsymbol{b}_{\xi_2}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}_2(t)\overset{\circ}{\xi}_2(t+u)$ складових вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$, а також їх взаємокореляційні функції $b_{\xi_1\xi_2}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}_1(t)\overset{\circ}{\xi}_2(t+u)$ і $b_{\xi_2\xi_1}(t,u) = E\overset{\circ}{\xi}_2(t)\overset{\circ}{\xi}_1(t+u)$ є періодичними функціями часу t. Кореляційна тензорна функція $\boldsymbol{b}_\xi(t,u)$ характеризує взаємозв'язок напрямлених флуктуаційних змін вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$ в моменти часу t і $t+u$, а дисперсія $\boldsymbol{d}_\xi(t_1) = \boldsymbol{b}_\xi(t,0)$, що є тензорною функцією часу t, дає кількісну оцінку інтенсивності таких змін і їх орієнтації у вибраній системі координат [1,6,7].

Подамо елементи матриці (1) – автокореляційної функції $b_{\xi_1}(t,u)$ і $b_{\xi_2}(t,u)$, а також взаємокореляційні функції $b_{\xi_1\xi_2}(t,u)$ і $b_{\xi_2\xi_1}(t,u)$ – у вигляді рядів Фур'є:

$$b_{\xi_p}(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{(\xi_p)}(u)e^{ik\omega_0 t} = B_0^{(\xi_p)}(u) + \sum_{k\in N}\begin{bmatrix} C_k^{(\xi_p)}(u)\cos k\omega_0 t + \\ +S_k^{(\xi_p)}(u)\sin k\omega_0 t \end{bmatrix}, \quad p = \overline{1,2}, \tag{2}$$

$$b_{\xi_p\xi_q}(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)e^{ik\omega_0 t} = B_0^{(\xi_p\xi_q)}(u) + \sum_{k\in N}\begin{bmatrix} C_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)\cos k\omega_0 t + \\ +S_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)\sin k\omega_0 t \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} p = \overline{1,2}, \\ q = \overline{1,2}, \\ p \neq q. \end{matrix} \tag{3}$$

Тут
$B_k^{(\xi_p)}(u)=\frac{1}{2}\left[C_k^{(\xi_p)}(u)-iS_k^{(\xi_p)}(u)\right],\quad B_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)=\frac{1}{2}\left[C_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)-iS_k^{(\xi_p\xi_q)}(u)\right],\quad k\neq 0$.
Тоді
$$\boldsymbol{b}_\xi(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(\xi)}(u)e^{ik\omega_0 t}=\boldsymbol{B}_0^{(\xi)}(u)+\sum_{k\in N}\left[\boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 t+\boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(u)\sin k\omega_0 t\right],$$
де
$$\boldsymbol{B}_k^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix}B_k^{(\xi_1)}(u) & B_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\\ B_k^{(\xi_2\xi_1)}(u) & B_k^{(\xi_2)}(u)\end{bmatrix},$$
$$\boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix}C_k^{(\xi_1)}(u) & C_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\\ C_k^{(\xi_2\xi_1)}(u) & C_k^{(\xi_2)}(u)\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix}S_k^{(\xi_1)}(u) & S_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)\\ S_k^{(\xi_2\xi_1)}(u) & S_k^{(\xi_2)}(u)\end{bmatrix},$$
при цьому $\boldsymbol{B}_k^{(\xi)}(u)=\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(u)-i\boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(u)\right]$. Коефіцієнти Фур'є тензор-функції $\boldsymbol{b}_\xi(t,u)$ є відповідними тензор-функціями зсуву u, властивості яких доцільно аналізувати на основі їх інваріантів. Зокрема, для нульового кореляційного тензор-компонента маємо:
$$\boldsymbol{B}_0^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix}B_0^{(\xi_1)}(u) & \frac{1}{2}\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)+B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right]\\ \frac{1}{2}\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)+B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] & B_0^{(\xi_2)}(u)\end{bmatrix}+$$
$$+\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)-B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right]\\ \frac{1}{2}\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)-B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] & 0\end{bmatrix}.$$

Перша матриця є симетричним тензором $\tilde{\boldsymbol{B}}_0^{(\xi)}(u)$, а друга – асиметричним $\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_0^{(\xi)}(u)$. Легко бачити, що $\boldsymbol{B}_0^{(\xi)}(-u)=\left[\boldsymbol{B}_0^{(\xi)}(u)\right]^T$, а для симетричної і асиметричної частин виконуються рівності: $\tilde{\boldsymbol{B}}_0^{(\xi)}(-u)=\tilde{\boldsymbol{B}}_0^{(\xi)}(u)$, $\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_0^{(\xi)}(-u)=-\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_0^{(\xi)}(u)$, тобто перша є парною, а друга – непарною тензор-функціями зсуву. При $u=0$ асиметрична частина тензор-функції приймає нульові значення $\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_0^{(\xi)}(0)=0$, тому тензор-функція $\boldsymbol{B}_0^{(\xi)}(0)$ в цілому є симетричною.

Лінійні інваріанти
$$B_0^{(I_1)}(u)=B_0^{(\xi_1)}(u)+B_0^{(\xi_2)}(u),$$
$$B_0^{(D)}(u)=B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)-B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)$$
дають можливість охарактеризувати незалежно від вибраної системи координат усереднену за часом кореляційну структуру колінеарних і ортогональних коливань вектора $\xi(t)$ на інтервалі часу $[t,t+u]$. Інваріант $B_0^{(I_1)}(u)$ є парною функцією зсуву $B_0^{(I_1)}(-u)=B_0^{(I_1)}(u)$, а інваріант $B_0^{(D)}(u)$, який є індикатором обертового руху, є непарною функцією: $B_0^{(D)}(-u)=-B_0^{(D)}(u)$.

Інваріанти

$$\lambda_{1,2}^{(0)}(u)=\frac{1}{2}\left[B_0^{(\xi_1)}(u)+B_0^{(\xi_2)}(u)\pm\sqrt{\left[B_0^{(\xi_1)}(u)-B_0^{(\xi_2)}(u)\right]^2+\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)+B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right]^2}\right]$$

є власними значеннями тензора $\tilde{B}_0^{(\xi)}(u)$. За аналогією до праць [3, 4, 7] їх можна інтерпретувати як повздовжню та поперечну кореляційні функції стаціонарного наближення векторного ПКВП. При фіксованому u вони є екстремальними значеннями кореляційних функцій вектора на ортогональні напрями.

Індикатором форми центральної кривої другого порядку тензора $\tilde{\boldsymbol{B}}_0^{(\xi)}(u)$ є квадратичний інваріант

$$B_0^{(I_2)}(u)=B_0^{(\xi_1)}(u)B_0^{(\xi_2)}(u)-\frac{1}{4}\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)+B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right]^2.$$

Оскільки для нульових зсувів

$$\left[B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u)\right]^2\le B_0^{(\xi_1)}(0)B_0^{(\xi_2)}(0),$$

то $B_0^{(I_2)}(0)\ge 0$. За виконання строгої нерівності тензорна крива буде еліпсом, осі якого мають напрями власного базису тензора $\tilde{\boldsymbol{B}}_0^{(\xi)}(u)$. Цей базис повернутий відносно вибраного на кут

$$\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B_0^{(\xi_1\xi_2)}(0)}{B_0^{(\xi_1)}(0)-B_0^{(\xi_2)}(0)}.$$

Значення осей є обернено пропорційними до коренів квадратних інваріантів $\lambda_{1,2}^{(0)}(u)$. Якщо $B_0^{(I_2)}(0)=0$, то тензорні криві вироджуються в прямі.

Враховуючи рівності

$$\boldsymbol{B}_k^{(\xi)}(-u)=\left[\boldsymbol{B}_k^{(\xi)}(u)\right]^T e^{-ik\omega_0 u},\ \boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(-u)=\left[\boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(u)\right]^T\cos k\omega_0 u-\left[\boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(u)\right]^T\sin k\omega_0 u,\tag{4}$$

$$\boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(-u)=\left[\boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(u)\right]^T\sin k\omega_0 u+\left[\boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(u)\right]^T\cos k\omega_0 u,\tag{5}$$

їх також можна подати у вигляді суми симетричної і асиметричної складових

$$\boldsymbol{B}_k^{(\xi)}(-u)=\tilde{\boldsymbol{B}}_k^{(\xi)}(u)+\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_k^{(\xi)}(u),\quad \boldsymbol{C}_k^{(\xi)}(u)=\tilde{\boldsymbol{C}}_k^{(\xi)}(u)+\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_k^{(\xi)}(u),$$

$$\boldsymbol{S}_k^{(\xi)}(u)=\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{(\xi)}(u)+\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_k^{(\xi)}(u),$$

де

$$\tilde{\boldsymbol{N}}_k^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix} C_k^{(\xi_1)}(u) & \frac{1}{2}\left[C_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)+C_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] \\ \frac{1}{2}\left[C_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)+C_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] & C_k^{(\xi_2)}(u)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{N}}}_k^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[C_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)-C_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] \\ \frac{1}{2}\left[C_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)-C_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] & 0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{(\xi)}(u)=\begin{bmatrix} S_k^{(\xi_1)}(u) & \frac{1}{2}\left[S_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)+S_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] \\ \frac{1}{2}\left[S_k^{(\xi_1\xi_2)}(u)+S_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] & S_k^{(\xi_2)}(u)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_k^{(\xi)}(u) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left[S_k^{(\xi_1\xi_2)}(u) - S_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] \\ \frac{1}{2}\left[S_k^{(\xi_1\xi_2)}(u) - S_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right] & 0 \end{bmatrix},$$

а також $\tilde{\boldsymbol{B}}_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\boldsymbol{C}}_k^{(\xi)}(u) - \mathrm{i}\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{(\xi)}(u)\right]$, $\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2}\left[\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_k^{(\xi)}(u) - \mathrm{i}\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_k^{(\xi)}(u)\right]$.

Умови (4)–(5) для симетричної і асиметричної складових тензор-компонентів набувають вигляду

$$\tilde{\boldsymbol{B}}_k^{(\xi)}(-u) = \tilde{\boldsymbol{B}}_k^{(\xi)}(u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 u}, \quad \tilde{\boldsymbol{C}}_k^{(\xi)}(-u) = \tilde{\boldsymbol{C}}_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 u - \tilde{\boldsymbol{S}}_k^{(\xi)}(u)\sin k\omega_0 u,$$

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_k^{(\xi)}(-u) = \tilde{\boldsymbol{C}}_k^{(\xi)}(u)\sin k\omega_0 u + \tilde{\boldsymbol{S}}_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 u,$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_k^{(\xi)}(u) = -\tilde{\tilde{\boldsymbol{B}}}_k^{(\xi)}(u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 u}, \quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_k^{(\xi)}(-u) = -\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 u + \tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_k^{(\xi)}(u)\sin k\omega_0 u,$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_k^{(\xi)}(-u) = -\tilde{\tilde{\boldsymbol{C}}}_k^{(\xi)}(u)\sin k\omega_0 u - \tilde{\tilde{\boldsymbol{S}}}_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 u.$$

Легко бачити, що лінійні інваріанти кореляційних тензор-компонентів

$$B_k^{(I_1)}(u) = B_k^{(\xi_1)}(u) + B_k^{(\xi_2)}(u),$$

$$C_k^{(I_1)}(u) = C_k^{(\xi_1)}(u) + C_k^{(\xi_2)}(u),$$

$$S_k^{(I_1)}(u) = S_k^{(\xi_1)}(u) + S_k^{(\xi_2)}(u)$$

є відповідними коефіцієнтами Фур'є лінійного інваріанта $I_1(t,u)$, тобто

$$I_1(t,u) = \sum_{k\in Z} B_k^{(I_1)}(u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 t} = B_0^{(I_1)}(u) + \sum_{k\in N}\left[C_k^{(I_1)}(u)\cos k\omega_0 t + S_k^{(I_1)}(u)\sin k\omega_0 t\right].$$

Вони визначають амплітуди й фази гармонічних складових усередненого скалярного добутку векторів $\overset{\circ}{\xi}(t)$ і $\overset{\circ}{\xi}(t+u)$ – кореляційної функції компленарних складових вектора $\xi(t)$, а при $u=0$ – амплітуди й фази гармонічних складових інтенсивності флуктуаційних змін вектора $\xi(t)$. Легко бачити, що

$$B_k^{(I)}(-u) = B_k^{(I)}(u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 u},$$

$$C_k^{(I)}(-u) = C_k^{(I)}(u)\cos k\omega_0 u - S_k^{(I)}(u)\sin k\omega_0 u,$$

$$S_k^{(I)}(-u) = C_k^{(I)}(u)\sin k\omega_0 u + S_k^{(\xi)}(u)\cos k\omega_0 u.$$

Подібно, інваріанти

$$B_k^{(D)}(u) = B_k^{(\xi_1\xi_2)}(u) - B_k^{(\xi_2\xi_1)}(u),$$

$$C_k^{(D)}(u) = C_k^{(\xi_1\xi_2)}(u) - C_k^{(\xi_2\xi_1)}(u),$$

$$S_k^{(D)}(u) = S_k^{(\xi_1\xi_2)}(u) - S_k^{(\xi_2\xi_1)}(u)$$

визначають параметри гармонік часових змін усередненого векторного добутку векторів $\xi(t)$ і $\xi(t+u)$, тобто кореляційних зв'язків ортогональних складових векторного процесу $\xi(t)$:

$$D(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(D)}(u)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}=B_0^{(D)}(u)+\sum_{k\in N}\left[C_k^{(D)}(u)\cos k\omega_0 t+S_k^{(D)}(u)\sin k\omega_0 t\right].$$

Для коефіцієнтів Фур'є цього інваріанта маємо:

$$B_k^{(D)}(-u)=-B_k^{(D)}(u)e^{-\mathrm{i}k\omega_0 u},$$

$$C_k^{(D)}(-u)=-C_k^{(D)}(u)\cos k\omega_0 u+S_k^{(D)}(u)\sin k\omega_0 u,$$

$$S_k^{(D)}(-u)=-C_k^{(D)}(u)\sin k\omega_0 u-S_k^{(D)}(u)\cos k\omega_0 u.$$

Формули для коефіцієнтів Фур'є нелінійного інваріанта $I_2(t,u)$ отримаємо, виходячи зі співвідношення

$$I_2(t,u)=b_{\xi_1}(t,u)b_{\xi_2}(t,u)-\frac{1}{4}\left[b_{\xi_1\xi_2}(t,u)+b_{\xi_2\xi_1}(t,u)\right]^2$$

і рядів Фур'є для кореляційних функцій (2) і (3). Оскільки

$$b_{\xi_p}(t,u)b_{\xi_q}(t,u)=\sum_{k\in Z}e^{\mathrm{i}k\omega_0 t}\sum_{l\in Z}B_l^{(\xi_p)}(u)\overline{B_{l-k}^{(\xi_q)}(u)},$$

то

$$I_2(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(I_2)}(u)e^{\mathrm{i}k\omega_0 t},$$

де

$$B_k^{(I_2)}(u)=\sum_{l\in Z}\left[B_l^{(\xi_1)}(u)\overline{B_{l-k}^{(\xi_2)}(u)}-\frac{1}{4}\left[\begin{array}{l}B_l^{(\xi_1\xi_2)}(u)\overline{B_{l-k}^{(\xi_1\xi_2)}(u)}+B_l^{(\xi_2\xi_1)}(u)\overline{B_{l-k}^{(\xi_2\xi_1)}(u)}-\\-2B_l^{(\xi_1\xi_2)}(u)\overline{B_{l-k}^{(\xi_2\xi_1)}(u)}\end{array}\right]\right].$$

Структуру кореляційних тензор-компонентів можна конкретизувати, виходячи з гармонічних подань складових $\xi_1(t)$ і $\xi_2(t)$:

$$\xi_1(t)=\sum_{k\in Z}\xi_k^{(1)}(t)e^{ik\omega_0 t}, \tag{6}$$

$$\xi_2(t)=\sum_{k\in Z}\xi_k^{(2)}(t)e^{ik\omega_0 t}, \tag{7}$$

$$B_k^{(I)}(u)=\sum_{l\in Z}\left[R_{l-k,l}^{(\xi_1)}(u)+R_{l-k,l}^{(\xi_2)}(u)\right]e^{\mathrm{i}k\omega_0 u}, \tag{8}$$

$$B_k^{(D)}(u)=\sum_{l\in Z}\left[R_{l-k}^{(\xi_1\xi_2)}(u)-R_{l-k}^{(\xi_2\xi_1)}(u)\right]e^{\mathrm{i}k\omega_0 u}. \tag{9}$$

Співвідношення (8) і (9) суттєво спрощуються для квадратурної моделі, коли відмінними від нуля в поданнях (6) і (7) є тільки перші стаціонарно зв'язані компоненти

$$\xi_{\pm1}^{(1)}(t)=\frac{1}{2}\left[\mu_c(t)\mp\mathrm{i}\mu_s(t)\right],$$

$$\xi_{\pm1}^{(2)}(t)=\frac{1}{2}\left[\nu_c(t)\mp\mathrm{i}\nu_s(t)\right].$$

Тоді компоненти вектора $\boldsymbol{\xi}(t)$ мають вигляд:

$$\xi_1(t)=\mu_c(t)\cos\omega_0 t+\mu_s(t)\sin\omega_0 t,$$

$$\xi_2(t)=\nu_c(t)\cos\omega_0 t+\nu_s(t)\sin\omega_0 t.$$

На основі цих виразів знаходимо

$$b_{\xi_1}(t,u) = B_0^{(\xi_1)}(u) + C_2^{(\xi_1)}(u)\cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi_1)}(u)\sin 2\omega_0 t\ ,$$

$$b_{\xi_2}(t,u) = B_0^{(\xi_2)}(u) + C_2^{(\xi_2)}(u)\cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi_2)}(u)\sin 2\omega_0 t\ ,$$

$$b_{\xi_p\xi_q}(t,u) = B_0^{(\xi_p\xi_q)}(u) + C_2^{(\xi_p\xi_q)}(u)\cos 2\omega_0 t + S_2^{(\xi_p\xi_q)}(u)\sin 2\omega_0 t\ ,$$

при цьому

$$B_0^{(\xi_1)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(u) + R_{\mu_s}(u)\right]\cos\omega_0 + R^{-}_{\mu_c\mu_s}(u)\sin\omega_0 u\ , \quad (10)$$

$$C_2^{(\xi_1)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(u) - R_{\mu_s}(u)\right]\cos\omega_0 + R^{+}_{\mu_c\mu_s}(u)\sin\omega_0 u\ , \quad (11)$$

$$S_2^{(\xi_1)}(u) = R^{+}_{\mu_c\mu_s}(u)\cos\omega_0 u + \frac{1}{2}\left[R_{\mu_s}(u) - R_{\mu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\ , \quad (12)$$

$$B_0^{(\xi_2)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\nu_c}(u) + R_{\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 + R^{-}_{\nu_c\nu_s}(u)\sin\omega_0 u\ , \quad (13)$$

$$C_2^{(\xi_2)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\nu_c}(u) - R_{\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 + R^{+}_{\nu_c\nu_s}(u)\sin\omega_0 u\ , \quad (14)$$

$$S_2^{(\xi_2)}(u) = R^{+}_{\nu_c\nu_s}(u)\cos\omega_0 u + \frac{1}{2}\left[R_{\nu_s}(u) - R_{\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\ , \quad (15)$$

$$B_0^{(\xi_1\xi_2)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_c}(u) + R_{\mu_s\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 + \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_s}(u) - R_{\mu_s\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\ , \quad (16)$$

$$C_2^{(\xi_1\xi_2)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_c}(u) - R_{\mu_s\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 + \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_s}(u) + R_{\mu_s\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\ , \quad (17)$$

$$S_2^{(\xi_1\xi_2)}(u) = \frac{1}{2}\left[R_{\mu_c\nu_s}(u) + R_{\mu_s\nu_c}(u)\right]\cos\omega_0 + \frac{1}{2}\left[R_{\mu_s\nu_s}(u) - R_{\mu_c\nu_c}(u)\right]\sin\omega_0 u\ , \quad (18)$$

де $R_{\mu_{c,s}}(u)$, $R_{\nu_{c,s}}(u)$, $R_{\mu_{c,s}\nu_{c,s}}(u)$ – авто- та взаємокореляційні функції випадкових процесів $\mu_c(t)$, $\mu_s(t)$, $\nu_c(t)$ і $\nu_s(t)$, а $R^{\pm}_{\mu_c\mu_s}(u)$, $R^{\pm}_{\nu_c\nu_s}(u)$ – парні і непарні складові взаємокореляцій.

Формули для кореляційних компонентів $B_0^{(\xi_2\xi_1)}(u)$, $C_2^{(\xi_2\xi_1)}(u)$ і $S_2^{(\xi_2\xi_1)}(u)$ є подібними до (16)–(18) з тією відмінністю, що в них змінений порядок кореляцій моделюючих процесів $\mu_c(t)$, $\mu_s(t)$ і $\nu_c(t)$, $\nu_s(t)$.

На основі співвідношень (10)–(15) приходимо до таких виразів для кореляційних компонентів інваріанта $I_1(t,u)$:

$$B_0^{(I)}(u) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left[R_{\mu_c}(u) + R_{\nu_c}(u)\right] + \\ +\left[R_{\mu_s}(u) + R_{\nu_s}(u)\right]\end{bmatrix}\cos\omega_0 u + \left[R^{-}_{\mu_c\mu_s}(u) + R^{-}_{\nu_c\nu_s}(u)\right]\sin\omega_0 u\ ,$$

$$C_2^{(I)}(u) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left[R_{\mu_c}(u) - R_{\mu_s}(u)\right] + \\ +\left[R_{\nu_c}(u) - R_{\nu_s}(u)\right]\end{bmatrix}\cos\omega_0 u + \left[R^{+}_{\mu_c\mu_s}(u) + R^{+}_{\nu_c\nu_s}(u)\right]\sin\omega_0 u\ ,$$

$$S_2^{(I)}(u)=\left[R^{+}_{\mu_c\mu_s}(u)+R^{+}_{\nu_c\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\left[R_{\mu_c}(u)-R_{\mu_s}(u)\right]+\\+\left[R_{\nu_c}(u)-R_{\nu_s}(u)\right]\end{bmatrix}\sin\omega_0 u .$$

Для нульових зсувів $u=0$:

$$B_0^{(I)}(0)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(0)+R_{\nu_c}(0)+R_{\mu_s}(0)+R_{\nu_s}(0)\right],$$

$$C_2^{(I)}(0)=\frac{1}{2}\left[R_{\mu_c}(0)-R_{\mu_s}(0)+R_{\nu_c}(0)-R_{\nu_s}(0)\right],\quad S_2^{(I)}(0)=R^{+}_{\mu_c\mu_s}(0)+R^{+}_{\nu_c\nu_s}(0).$$

З отриманих виразів випливає, що як величина нульового кореляційного компонента $B_0^{(I)}(u)$, так і модуль другого кореляційного компонента $\left|B_2^{(I)}(u)\right|$ зростають порівняно з тими величинами, що характеризують властивості кореляційних функцій окремих складових вектора, тобто порівняно з останніми зростає як усереднене за часом значення інваріанта $I_1(t,u)$, так і глибина його часових змін. А це створює можливості для ефективнішого аналізу стану системи, яка породжує векторний сигнал $\xi(t)$.

Кореляційні компоненти інваріанта $D(t,u)$ мають вигляд:

$$B_0^{(D)}(u)=\left[R^{-}_{\mu_c\nu_c}(u)+R^{-}_{\mu_s\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+\left[R^{+}_{\mu_c\nu_s}(u)+R^{-}_{\mu_s\nu_s}(u)\right]\sin\omega_0 u ,$$

$$C_2^{(D)}(u)=\left[R^{-}_{\mu_c\nu_c}(u)+R^{-}_{\nu_s\mu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+\left[R^{-}_{\mu_s\nu_c}(u)+R^{-}_{\mu_c\nu_s}(u)\right]\sin\omega_0 u ,$$

$$S_2^{(D)}(u)=\left[R^{-}_{\mu_s\nu_c}(u)+R^{-}_{\mu_c\nu_s}(u)\right]\cos\omega_0 u+\left[R^{-}_{\mu_c\nu_c}(u)+R^{-}_{\nu_s\mu_s}(u)\right]\sin\omega_0 u ,$$

де знаки “+” і “–” означають відповідно парні й непарні кореляції. Характерною особливістю других кореляційних компонентів, як бачимо, є те, що вони визначаються тільки непарними складовими взаємокореляційних функцій процесів, які модулюють гармоніки ортогональних складових вектора $\xi(t)$. Це, наприклад, можна використати у вібродіагностиці для розділення рухомих і нерухомих дефектів, оскільки властивий вібросигналу характер непарних кореляційних зв’язків для цих двох випадків є різним.

1. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: Фіз.-мех. ін-т НАН України, 2013. – 802 с.
2. *Методи* та засоби ранньої вібродіагностики підшипникових вузлів турбоагрегатів ТЕС / І. М. Яворський, І. Б. Кравець, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Енергетика та електрифікація. – 2012. – № 8 (348). – С. 58–67.
3. *Векторна* діагностика підшипника кочення при розвитку дефекту на зовнішньому кільці / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 2 (76). – С. 101–110.
4. *Інваріантний* кореляційний аналіз векторних періодично корельованих випадкових процесів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько // Відбір і обробка інформації. – 2011. – № 35 (111). – С. 22–31.
5. *Яворский И. Н.* Статистический анализ векторных периодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации. – 1987. – № 76. – С. 3–12.
6. *Белышев А. П., Клеванцов Ю. П., Рожков В. А.* Вероятностный анализ морских течений. – Л.: Гидрометеоиздат, 1983. – 264 с.
7. *Рожков В. А.* Методы вероятностного анализа океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 280 с.

Одержано 14.05.2015