МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ СИГНАЛІВ ТА СИСТЕМ

УДК 621.391:519.22

КОГЕРЕНТНИЙ ВЗАЄМОСПЕКТРАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ЧАСОВИХ РЯДІВ

І. М. Яворський [1,2], Р. М. Юзефович [1], І. Й. Мацько [1]

[1] **Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів;**

[2] **Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща**

E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com, matskoivan@gmail.com

Розглянуто дискретні оцінки взаємоспектральної густини періодично корельованих випадкових процесів, які знаходять за методом Блекмана-Тьюкі. Проаналізовано вплив інтервалу дискретизації на статистичні характеристики оцінки. Отримано умови відсутності накладання, що може суттєво збільшити і систематичну, і середньоквадратичну похибки оцінювання. Виведено асимптотичні формули для статистичних характеристик, які конкретизовано для амплітудно- та фазомодульованих сигналів.

Ключові слова: *періодично корельовані випадкові сигнали, взаємокореляційна функція, змінна спектральна густина, когерентний взаємоспектральний аналіз.*

COHERENT CROSS-SPECTRAL ANALYSIS OF TIME SERIES

I. M. Javorskyj [1,2], R. M. Yuzefovych [1], I. Y. Matsko [1]

[1] **Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine;**

[2] **Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Bydgoszcz, Poland**

Properties of discrete estimators for cross-spectral densities of periodically correlated random processes computed with using the Blackman-Tuki method are considered. The influence of sampling interval on estimator statistical characteristics is analyzed. Conditions of aliasing absence, that significantly increases systematic and root mean square errors of estimation are obtained. Asymptotical formulae for statistical characteristics specified for amplitude- and phase modulated processes are formulated. It is shown that mutual statistical analysis of vibration allows us to investigate and to describe dimensional properties of vibration and on this base to create facilities for effective detection of defects, their localization and separation.

Keywords: *periodically correlated random signals, cross-correlation function, time varying spectral density, coherent cross-spectral analysis.*

Методи багатовимірного статистичного аналізу вібрацій на основі їх моделей у вигляді взаємозв’язаних періодично корельованих випадкових процесів (ПКВП) виявились ефективними під час розв’язання низки діагностичних задач [1–3]. Їх перевага проти тих, що ґрунтуються на моделях стаціонарних випадкових процесів, насамперед у тому, що вдається описати не тільки спектральний склад коливань, а й їх часову структуру. Взаємний статистичний аналіз переміщень, швидкостей та прискорень дає змогу дослідити й описати просторові властивості вібрацій, а отже, створити можливості для ефективного виявлення дефектів, їх локалізації та розділення.

Спектральна густина потужності – усереднена енергетична характеристика коливань, що лежить в основі стаціонарного підходу, ефективна лише для розпізнавання передаварійних ситуацій механізмів. Використовуючи її, що підтверджують результати багатьох спектральних досліджень вібраційних коливань і діагностичних робіт на підприємствах України, важко проконтролювати зародження, розвиток і тип дефектів (викришування, тріщини, задири). Ефективними тут є методи ПКВП [4], при цьому за аналізом властивостей оцінок спектральних характеристик ПКВП можна визначити особливості кожного з дефектів, а отже, розділяти їх.

Оцінити ваємоспектральні характеристики ПКВП за експериментальними даними можна, використовуючи метод Блекмана–Тьюкі, коли спектральні параметри оцінюють за згладженими оцінками кореляційних. Підхід Блекмана–Тьюкі застосуємо також для оцінки миттєвої взаємоспектральної густини за дискретними даними, змінюючи відповідне інтегральне перетворення [5, 6] на інтегральну суму за методом прямокутників. Тоді така оцінка набуде вигляду

$$\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{\Delta u}{2\pi}\sum_{r=-L}^{L}k(r\Delta u)\hat{b}_{\xi\eta}(t,r\Delta u)e^{-i\omega r\Delta u}, \quad L=\frac{u_m}{\Delta u}, \tag{1}$$

де $\hat{b}_{\xi\eta}(t,r\Delta u)$ – оцінка взаємокореляційної функції; $k(r\Delta u)$ – кореляційне вікно; u_m – точка усічення корелограми; Δu – інтервал дискретизації за зсувом. Дискретизація зумовлює додаткові похибки, тому інтервал Δu доцільно вибирати так, щоб похибки дискретного й неперервного оцінювання були близькі. Для цього насамперед потрібно проаналізувати вплив інтервалу дискретизації на систематичну і середньоквадратичну похибки.

Якщо оцінку взаємокореляційної функції обчислюють за формулою

$$\hat{b}_{\xi\eta}(t,r\Delta u)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT)\eta(t+r\Delta u+nT)-\hat{m}_{\xi}(t)\hat{m}_{\eta}(t+r\Delta u), \tag{2}$$

де
$$\hat{m}_{\xi}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\xi(t+nT), \qquad \hat{m}_{\eta}(t)=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\eta(t+nT),$$

а N – кількість періодів усереднення, то

$$E\hat{b}_{\xi\eta}(t,r\Delta u)=b_{\xi\eta}(t,r\Delta u)-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_{\xi\eta}(t,r\Delta u+nT),$$

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\frac{\Delta u}{2\pi}\sum_{r=-L}^{L}k(r\Delta u)b_{\xi\eta}(t,r\Delta u)e^{-i\omega r\Delta u}-$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{\Delta u}{2\pi}\sum_{r=-L}^{L}k(r\Delta u)b_{\xi\eta}(t,r\Delta u+nT)e^{-i\omega r\Delta u}\right].$$

Підставляючи в цей вираз подання

$$k(r\Delta u)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)e^{i\omega_1 r\Delta u}d\omega_1, \tag{3}$$

$$b_{\xi\eta}(t,r\Delta u)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{\xi\eta}(\omega_2,t)e^{i\omega_2 r\Delta u}d\omega_2, \tag{4}$$

знаходимо:

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\int\lambda(\omega_1)\hat{f}_{\xi\eta}(\omega_2,t)\left[1-g(\omega_2,N)\right]\left[\frac{\Delta u}{2\pi}\sum_{n\in Z}e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega)n\Delta u}\right]d\omega_1 d\omega_2,$$

де
$$g(\omega,N)=\frac{1}{N^2}\sum_{m,n=0}e^{i\omega(m-n)T}=\frac{\sin^2\frac{\omega}{2}NT}{N^2\sin^2\frac{\omega}{2}T}.$$

Використовуючи формулу Пуассона

$$\frac{\Delta u}{2\pi}\sum_{n\in Z} e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega)n\Delta u}=\sum_{n\in Z}\delta\left(\omega_1-\omega+\omega_2+n\frac{2\pi}{\Delta u}\right),$$

приходимо до співвідношення

$$E\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)=\sum_{n\in Z}\left[\begin{array}{l}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\left(\omega-\omega_1-n\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\,d\omega_1-\\ -\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\left(\omega-\omega_1-n\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_{\xi\eta}(\omega_1,t)g(\omega_1,N)\,d\omega_1\end{array}\right].$$

Через дискретність даних з'являються додаткові члени у складових, які визначають математичне сподівання оцінки (1). Перша з них не залежить від кількості усереднювальних періодів *N*, тобто від довжини відрізка реалізації. Тому її можна вважати систематичною похибкою оцінювання, яка залежить від форми кореляційного вікна, де одним з найважливіших параметрів є точка усічення корелограми u_m. Для прямокутного кореляційного вікна, коли $k(u)=1$ при $|u|\le u_m$ і $k(u)=0$ при $|u|>u_m$, спектральна вагова функція

$$\lambda(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-u_m}^{u_m}e^{-i\omega u}du=\frac{\sin\omega u_m}{\pi\omega}.$$

Якщо $u_m\to\infty$, то $\lambda(\omega)\to\delta(\omega)$, де $\delta(\omega)$ – дельта-функція Дірака. В цьому випадку перша складова набуде вигляду

$$\sum_{n\in Z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\omega-\omega_1-n\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\,d\omega_1=\sum_{n\in Z}f_{\xi\eta}\left(\omega-n\frac{2\pi}{\Delta u},t\right).$$

Відтак, ефект накладання, який зумовлює додаткові складові у систематичній похибці оцінювання, не зникає і в асимптотиці. Його аж ніяк не можна позбутися, збільшуючи точку усічення корелограми, що в свою чергу обов'язково викличе ріст довжини відрізка реалізації.

Першу складову також можна подати у вигляді

$$\sum_{n\in Z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\left(\omega-\omega_1-n\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_{\xi\eta}(\omega_1,t)\,d\omega_1=\sum_{n\in Z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)f_{\xi\eta}\left(\omega-\omega_1-n\frac{2\pi}{\Delta u},t\right)d\omega_1.$$

Розкладемо функцію $f_{\xi\eta}(\omega-\omega_1-n[2\pi/\Delta u]t)$ у ряд Тейлора в околах точок $\omega-n[2\pi/\Delta u]$. З точністю до складових другого порядку маємо:

$$\sum_{n\in Z}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1)f_{\xi\eta}\left(\omega-\omega_1-n\frac{2\pi}{\Delta u},t\right)d\omega_1=\sum_{n\in Z}\left[f_{\xi\eta}\left(\omega-n\frac{2\pi}{\Delta u},t\right)+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega_1^2\lambda(\omega_1)\,d\omega_1\right]f''_{\xi\eta}\left(\omega+n\frac{2\pi}{\Delta u},t\right)+\ldots\right].$$

Отже, на значення змінної спектральної густини $f_{\xi\eta}(\omega,t)$ на частотах $\omega\in\left[-\frac{\pi}{\Delta u},\frac{\pi}{\Delta u}\right]$ накладаються ті її значення, які відповідають частотам, що належать до цього інтервалу. Ефект накладання впливає і на значення члена, який визначає друга похідна взаємної спектральної густини, що принципово може змінити поведінку оцінки в області екстремумів. Результати оцінки не спотворюватимуться, коли функція $f_{\xi\eta}(\omega,t)$ відмінна від нуля тільки в певному інтервалі частот $\omega\in[-\omega_{\max},\omega_{\max}]$ і при цьому $\Delta u<\pi/\omega_{\max}$. За такого кроку дискретизації систематична складова зміщення дорівнює відповідній неперервної оцінки [7]. Загалом у першому наближенні для зміщення отримуємо:

$$\varepsilon\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=\sum_{l\in Z}e^{il\omega_0 t}\left[\sum_{\substack{r\in Z\\ r\neq 0}}f_l\left(\omega+r\frac{2\pi}{\Delta u}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{N}\sum_{r\in Z}f_l\left(\omega+r\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\left[\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)k(nT)e^{i\left(\omega+r\frac{2\pi}{\Delta u}\right)nT}\right]\right].$$

Дисперсію оцінки (1) визначає формула

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=\frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2}\sum_{r,s\in Z}k(r\Delta u)k(s\Delta u)R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,r\Delta u,s\Delta u)e^{i\omega(s-r)\Delta u}, \tag{5}$$

де $R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,r\Delta u,s\Delta u)=E\hat{b}_{\xi\eta}(t,r\Delta u)\hat{b}_{\xi\eta}(t,s\Delta u)-E\hat{b}_{\xi\eta}(t,r\Delta u)E\hat{b}_{\xi\eta}(t,s\Delta u)$ – кореляційна функція оцінки (2).

Для гауссових ПКВП у першому наближенні

$$R_{\hat{b}_{\xi\eta}}(t,r\Delta u,s\Delta u)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N-1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)b_\zeta(t,nT,r\Delta u,s\Delta u),$$

де

$$b_\zeta(t,nT,r\Delta u,s\Delta u)=b_\zeta(t,nT)b_\eta(t+r\Delta u,(s-r)+nT)+$$
$$+b_{\xi\eta}(t,s\Delta u+nT)b_{\xi\eta}(t,r\Delta u-nT).$$

Функція $b_\zeta(t,nT,r\Delta u,s\Delta u)$ є періодичною за часом, тому її можна подати у вигляді ряду Фур'є:

$$b_\zeta(t,nT,r\Delta u,s\Delta u)=\sum_{k\in Z}\tilde{B}_k(nT,r\Delta u,s\Delta u)e^{ik\omega_0 t}.$$

Тоді

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=$$

$$=\sum_{k\in Z}e^{ik\omega_0 t}\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2}\sum_{r,s\in Z}k(r\Delta u)k(s\Delta u)\tilde{B}_k(nT,r\Delta u,s\Delta u)e^{i\omega(s-r)\Delta u}\right]\right].$$

Ввівши функції

$$D_k(\omega)=\frac{1}{N}\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)\left[\frac{(\Delta u)^2}{4\pi^2}\sum_{r,s\in Z}k(r\Delta u)k(s\Delta u)\tilde{B}_k(nT,r\Delta u,s\Delta u)e^{i\omega(s-r)\Delta u}\right],$$

вираз для дисперсії (5) перепишемо у вигляді

$$D\left[\hat{f}_{\xi\eta}(\omega,t)\right]=\sum_{k\in Z}D_k(\omega)e^{ik\omega_0 t}.$$

Беручи до уваги, що

$$b_\xi(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(\xi)}(u)e^{ik\omega_0 t},\ b_\eta(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t},\ b_{\xi\eta}(t,u)=\sum_{k\in Z}B_k^{(\xi\eta)}(u)e^{ik\omega_0 t},$$

отримуємо:

$$\tilde{B}_k(nT, r\Delta u, s\Delta u) = \sum_{l\in Z}\left[\begin{array}{l} B_{k+l}^{(\xi)}(nT)\overline{B_l^{(\eta)}}[(s-r)\Delta u + nT] + \\ +B_{l+k}^{(\xi\eta)}(s\Delta u + nT)\overline{B_l^{(\xi\eta)}}(nT - r\Delta u)\end{array}\right] e^{-il\omega_0 r\Delta u}.$$

Подамо авто- та взаємокореляційні компоненти інтегралами Фур'є:

$$B_k^{(\xi)}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega) e^{-i\omega u} du,$$

$$B_k^{(\eta)}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\eta)}(\omega) e^{-i\omega u} du, \quad B_k^{(\xi\eta)}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi\eta)}(\omega) e^{-i\omega u} du.$$

Після перетворень знаходимо:

$$D_k(\omega) = \sum_{l\in Z}\sum_{p,q\in Z}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\lambda\left(\omega+\omega_1+p\frac{2\pi}{\Delta u}+l\omega_0\right)\lambda\left(\omega+\omega_1-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\times\right.$$

$$\times f_{k+l}^{(\xi)}(\omega_2) f_{-l}^{(\eta)}(\omega_1) g(\omega_1+\omega_2, N) + \lambda\left(\omega-\omega_1+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\lambda\left(\omega+\omega_2+q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\times$$

$$\left.\times f_{k+l}^{(\xi\eta)}(\omega_2) f_{-l}^{(\xi\eta)}(\omega_1) g(\omega_2-\omega_1, N)\right] d\omega_1 d\omega_2. \qquad (6)$$

Припускаючи, що на ширині спектрального вікна $\lambda(\omega)$ спектральні компоненти змінюються несуттєво і мають вигляд гострих піків, першу складову цього виразу наближено подамо так:

$$D_k^{(l)}(\omega) \approx \sum_{p\in Z} f_0^{(\eta)}\left(\omega+\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(\xi)}(\omega_2)\left[\frac{1}{N}\sum_{n=-N+1}^{N-1}\left(1-\frac{|n|}{N}\right)e^{i\omega_2 nT}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\left(\omega_1+\omega+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)e^{i\omega_1 nT} d\omega_1\right] d\omega_2.$$

Легко бачити, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\left(\omega_1+\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)e^{i\omega_1 nT} d\omega_1 = e^{-i\left(\omega+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)nT}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 nT}\lambda^2(\omega_1) d\omega_1,$$

а тоді

$$D_k^{(l)}(\omega) = \sum_{p\in Z} f_0\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega_1+\omega_2-\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_k^{(\xi)}(\omega_2) d\omega_1\right] d\omega_2.$$

Для внутрішнього інтеграла отримуємо:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g\left(\omega_1+\omega_2-\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_k^{(\xi)}(\omega_2) d\omega_2 =$$

$$= \sum_{q\in Z}\int_{(2q-1)\frac{\pi}{T}}^{(2q+1)\frac{\pi}{T}} f_k^{(\xi)}(\omega_2) g\left(\omega_1+\omega_2-\omega+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) d\omega_2 \approx \frac{2\pi}{\theta}\sum_{q\in Z} f_k^{(\xi)}\left(\omega-\omega_1+q\omega_0+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right).$$

Після його перетворення за частотою ω_1

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2(\omega_1) f_k^{(\xi)}\left(\omega-\omega_1+q\omega_0+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) d\omega_1 \approx f_k^{(\xi)}\left(\omega+q\omega_0+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(\omega_1) d\omega_1 =$$

$$= W(0) f_k^{(\xi)}\left(\omega+q\omega_0+p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)$$

приходимо до наближеного співвідношення

$$D_k^{(1)}(\omega) \approx \frac{2\pi}{\theta} W(0) \sum_{p\in Z} f_0^{(\eta)}\left(\omega - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{q\in Z} f_k^{(\xi)}\left(\omega + q\omega_0 - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right).$$

За малих змін взаємоспектральних компонент на ширині спектрального вікна для другої складової коефіцієнтів (6) наближено маємо:

$$D_k^{(2)}(\omega) = \sum_{l\in Z} \sum_{p,q\in Z} f_{k+l}^{(\xi\eta)}\left(-\omega - q\frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-l}^{(\xi\eta)}\left(\omega - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \int_{-\infty}^{\infty}\int \lambda\left(\omega + \omega_2 + q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\times$$

$$\times\lambda\left(\omega + \omega_2 + q\frac{2\pi}{\Delta u}\right) g(\omega_2 - \omega_1, N)\, d\omega_1 d\omega_2 .$$

Вважаючи, що

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left(\omega - \omega_1 - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\lambda\left(\omega + \omega_2 - q\frac{2\pi}{\Delta u}\right) g(\omega_2 - \omega_1, N)\, d\omega_1 d\omega_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega_1)\, g\left(\omega_1 - 2\omega + p\frac{2\pi}{\Delta u} + q\frac{2\pi}{\Delta u}\right) d\omega_1 \approx \frac{2\pi}{\theta} W\left(2\omega + n\omega_0 - (p+q)\frac{2\pi}{\Delta u}\right),$$

отримуємо

$$D_k^{(2)}(\omega) = \frac{2\pi}{\theta} \sum_{l\in Z} \sum_{p,q\in Z} f_{k+l}^{(\xi\eta)}\left(-\omega - q\frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-l}^{(\xi\eta)}\left(\omega - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\times$$

$$\times \sum_{n\in Z} W\left(2\omega - (p+q)\frac{2\pi}{\Delta u} + n\omega_0\right),$$

а звідси

$$D_k(\omega) = \frac{2\pi}{\theta}\left[W(0) \sum_{p\in Z} f_0^{(\eta)}\left(\omega - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{q\in Z} f_k^{(\xi)}\left(\omega + q\omega_0 - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{l\in Z} \sum_{p,q\in Z} f_{k+l}^{(\xi\eta)}\left(-\omega - q\frac{2\pi}{\Delta u}\right) f_{-l}^{(\xi\eta)}\left(\omega - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{n\in Z} W\left(2\omega - (p+q)\frac{2\pi}{\Delta u} + n\omega_0\right)\right]. \quad (7)$$

Отже, дисперсія дискретної оцінки взаємної спектральної густини залежить не тільки від значень взаємних спектральних компонент на оцінюваній частоті, а й від значень на частотах, зсунутих відносно ω на величини, кратні $2\pi / \Delta u$ [7]. Дисперсія $D_k(\omega)$ містить всі ті складові, які попадають в область ненульових значень взаємної спектральної густини. Якщо $\Delta u < \pi / \omega_{\max}$, то у виразі (7) присутня тільки складова, яка відповідає умові $p = q = 0$. Вона така сама, як у неперервному випадку. Якщо ж умова $\Delta u < \pi / \omega_{\max}$ не виконується, то різниця між дисперсіями неперервної і дискретної оцінок ставатиме все істотнішою зі збільшенням Δu, і за таких його значень, коли поза інтервалом $\left[-\frac{\pi}{\Delta u}, \frac{\pi}{\Delta u}\right]$ взаємоспектральна густина досить суттєва за абсолютними значеннями, статистична похибка дискретної оцінки перевищуватиме неперервну.

Конкретизуємо формулу (7) для амплітудно- і фазомодульованих сигналів, коли взаємна спектральна густина містить тільки нульову та другі спектральні компоненти:

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega)\, e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi\eta)}(\omega)\, e^{i2\omega_0 t} .$$

Тоді

$$D_0(\omega) = \frac{2\pi}{\theta}\left[W(0) \sum_{p\in Z} f_0^{(\eta)}\left(\omega - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) \sum_{q\in Z} f_0^{(\xi)}\left(\omega + q\omega_0 - p\frac{2\pi}{\Delta u}\right) + \right.$$

$$+\sum_{p,q\in Z}\left[f_0^{(\xi\eta)}\left(-\omega-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_0^{(\xi\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)+f_2^{(\xi\eta)}\left(-\omega-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_{-2}^{(\xi\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)+\right.$$

$$\left.+f_{-2}^{(\xi\eta)}\left(-\omega-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_2^{(\xi\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\right]\times\sum_{n\in Z}W\left(2\omega-(p+q)\frac{2\pi}{\Delta u}+n\omega_0\right)\Bigg],\qquad(8)$$

$$D_2(\omega)=\frac{2\pi}{\theta}\left[W(0)\sum_{p\in Z}f_0^{(\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\sum_{q\in Z}f_2^{(\xi)}\left(\omega+q\omega_0-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)+\right.$$

$$+\sum_{p,q\in Z}\left[f_2^{(\xi\eta)}\left(-\omega-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_0^{(\xi\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)+f_0^{(\xi\eta)}\left(-\omega-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_2^{(\xi\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\right]\times$$

$$\left.\times\sum_{n\in Z}W\left(2\omega-(p+q)\frac{2\pi}{\Delta u}+n\omega_0\right)\right],\qquad(9)$$

$$D_4(\omega)=\frac{2\pi}{\theta}\left[\sum_{p,q\in Z}f_2^{(\xi\eta)}\left(-\omega-q\frac{2\pi}{\Delta u}\right)f_2^{(\xi\eta)}\left(\omega-p\frac{2\pi}{\Delta u}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{n\in Z}W\left(2\omega-(p+q)\frac{2\pi}{\Delta u}+n\omega_0\right)\right].\qquad(10)$$

Очевидно, що $D_{-2}(\omega)=D_2^*(\omega)$, $D_{-4}(\omega)=D_4^*(\omega)$. Всі інші коефіцієнти ряду дорівнюють нулю. За відсутності накладання, коли $\Delta u<\pi/\omega_{\max}$, вирази (8)–(10) значно спрощуються і збігаються зі співвідношеннями, виведеними для неперервної оцінки взаємоспектральної густини [5, 6].

Підставляючи вирази для взаємоспектральних компонент, коли відомі взаємокореляційні функції модулівних процесів, у наведені формули, можна проаналізувати залежність дисперсії оцінки взаємоспектральної густини від кроку дискретизації, а отже, обґрунтувати її вибір.

1. *Віброакустична* система ВАС-1 для ранньої вібраційної діагностики обертових механізмів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько, П. П. Луферчик // Наука та інновації. – 2013.– № 3. – С. 19–26.
2. *Інформаційно-вимірювальна* система для багатовимірної вібраційної діагностики / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець, І. Й. Мацько, І. Г. Стецько // Проблемы машиностроения. – 2013. – **16**, № 3. – С. 45–50.
3. *Векторна* діагностика підшипника кочення при розвитку дефекту на зовнішньому кільці / І. М. Яворський, І. Й. Мацько, Р. М. Юзефович, І. Б. Кравець // Вібрації в техніці та технологіях. – 2014. – № 2 (76). – С. 101–110.
4. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: Фіз.-мех. ін-т НАН України, 2013. – 802 с.
5. *Когерентний* взаємоспектральний аналіз періодично нестаціонарних вібраційних сигналів / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І. Й. Мацько, В. Б. Шевчик // Відбір і обробка інформації. – 2014. – № 41 (117). – С. 12–19.
6. *Wzajemna* analiza widmowa okresowo niestacjonarnych sygnałów losowych / I. Jaworski, R. Juzefowych, Z. Zakrzewski, J. Majewski // Przegląd Telekomunikacyjny. – 2014. – № 8–9. – S. 900–904.
7. *Юзефович Р. М.* Оцінювання взаємоспектральних компонентів періодично нестаціонарних випадкових сигналів // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка". Сер.: Радіоелектроніка та телекомунікації. – 2014. – № 796. – С. 14–21.

Одержано 21.10.2015