УДК 004.056.5:517.[3+4+51]

ЧИСЛОВЕ ІНТЕГРУВАННЯ ТАБЛИЧНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ З ВИКОРИСТАННЯМ МНОГОЧЛЕНА ТЕЙЛОРА

Ю. І. Грицюк, Я. П. Драґан

Національний університет "Львівська політехніка"

E-mail: yurii.i.hrytsiuk@lpnu.ua, yuroslav.p.dragan@lpnu.ua

Показано можливість числового інтегрування табличних функцій двох змінних з використанням многочлена Тейлора. Встановлено, що у багатьох практичних задачах не завжди вдається виразити первісну функцію від підінтегральної через елементарні функції. Розроблено метод числового інтегрування табличної функції, який дає змогу обчислити означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних, а також означений подвійний інтеграл за двома змінними. Розроблено алгоритм обчислення площ перерізів тривимірної фігури та її об'єму, заданої двома табличними функціями від двох змінних.

Ключові слова: *многочлен Тейлора; таблична функція від двох змінних; числове інтегрування табличних функцій; означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних; означений подвійний інтеграл за двома змінними; площа перерізу тривимірної фігури.*

USE OF TAYLOR POLYNOMIAL FOR NUMERICAL INTEGRATION OF TABLE FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

Yu. I. Gryciuk, Ya. P. Dragan

National University "Lviv Polytechnic"

The possibility of numerical integration of table functions of two variables with the use of Taylor polynomial is shown. It is found out that in many practical problems it is not always possible to express the primitive of a subintegral function in terms of elementary functions. A method of numerical integration of a table function which enables us to calculate definite unary integrals with respect to each the variables, as well as to calculate a definite double integral with respect to its two variables is developed. With the use of Taylor polynomial, an algorithm of calculation of the areas of sections and volume of a three-dimensional geometrical solid which is determined by means of two table functions of two variables is developed.

Keywords: *arbitrary point of a space of independent variables; Taylor polynomial; table function of two variables; numerical integration of table functions; definite unary integrals with respect to each the variables; definite double integral with respect to two variables.*

Для аналізу даних існує багато прикладних задач, для математичного формулювання яких необхідно обчислити інтеграли – неозначені й означені, одинарні, подвійні й потрійні, криволінійні та за поверхнею тощо [1]. У таких задачах певну підінтегральну функцію під час інженерних розрахунків часто подають у вигляді таблиці.

З курсу вищої математики [1, с. 261; 2, с. 349] відомо, що для функції $f[x]$, неперервної на відрізку $[a, b]$, означений інтеграл існує та визначається за формулою Ньютона–Лейбніца:

$$I = \int_a^b f[x]dx = F[x]\Big|_a^b = F[b] - F[a], \qquad (1)$$

де $F[x]$ – первісна функція для $f[x]$. Однак для більшості практичних задач первісну функцію $F[x]$ не завжди вдається виразити через елементарні функції. В інженерних розрахунках функцію $f[x]$ часто задають у вигляді таблиці її значень для певних його значень. Тому для обчислення означеного інтеграла (1) часто використовують наближені числові методи [2], за якими можна безпосередньо знайти його значення, базуючись на відомій підінтегральній функції (а інколи і на її похідних) у заданих точках, які називають вузлами.

На сьогодні розроблено велику кількість методів і алгоритмів числового інтегрування і аналітичних, і табличних функцій від однієї, двох і трьох змінних з використанням різних квадратурних формул [2, с. 355]. Однак спробуємо дещо удосконалити цю методику, особливо її матричні алгоритми, позаяк вона має ще багато прихованих можливостей. Тому розроблення надійної матричної системи числового інтегрування табличних функцій від однієї, двох і трьох змінних з допомогою многочлена Тейлора – актуальне завдання, деякі результати реалізації якого продемонстровано нижче.

Числове інтегрування табличних функцій. Задачі числового інтегрування табличних функцій з однією, двома чи трьома незалежними змінними можуть мати одну з двох формулювань [2, с. 349]. У праці [3] розглядали алгоритми розв'язання деяких задач для табличної функції від однієї змінної, застосовуючи многочлен Тейлора. Тут зосередимо увагу на деяких алгоритмах числового інтегрування табличної функції від двох змінних.

Табличну функцію $\overline{Y} = f[\overline{X}_1, \overline{X}_2]$ від двох змінних (табл. 1) подамо аналітично її інтерполянтою [4] у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$\begin{aligned} y = f^n[x_1,x_2] = c_0 + c_1\frac{x_1}{1!} + c_2\frac{x_2}{1!} + c_3\frac{x_1^2}{2!} + c_4\frac{x_1x_2}{1!1!} + c_5\frac{x_2^2}{2!} + \ldots \\ + c_p\frac{x_2^n}{n!} = \overline{T}^n[x_1,x_2]\times\overline{C}^T, \end{aligned} \tag{2}$$

де $\overline{T}^n[x_1,x_2]$ – рядок Тейлора n-го степеня для двох змінних; $\overline{C}^T$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів інтерполянти.

Таблиця 1. Загальний вигляд табличної функції від двох змінних

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\overline{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\overline{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	…	$x_{2,i}$	…	$x_{2,p}$
$\overline{Y}$	y_0	y_1	…	y_i	…	y_p

У цій таблиці введено такі позначення: $\overline{\overline{X}} = [\overline{X}_k = [x_{k,i},\ i = \overline{1,p}];\ k = \overline{1,m}]$ – значення аргументів табличної функції у вузлових точках; p – кількість вузлових точок; $\overline{Y} = [y_i, i = \overline{1,p}]$ – значення табличної функції у цих точках; m = 2 – кількість змінних.

Для знаходження значень стовпця $\overline{C}^T$ з виразу (2) потрібно сформувати таку лінійну систему рівнянь [5]:

$$\begin{cases} c_0 + c_1 \dfrac{x_{1,0}}{1!} + c_2 \dfrac{x_{2,0}}{1!} + c_3 \dfrac{x_{1,0}^2}{2!} + c_4 \dfrac{x_{1,0} x_{2,0}}{1!1!} + c_5 \dfrac{x_{2,0}^2}{2!} + c_6 \dfrac{x_{1,0}^3}{3!} + ... + c_p \dfrac{x_{2,0}^n}{n!} = y_1; \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ c_0 + c_1 \dfrac{x_{1,p}}{1!} + c_2 \dfrac{x_{2,p}}{1!} + c_3 \dfrac{x_{1,p}^2}{2!} + c_4 \dfrac{x_{1,p} x_{2,p}}{1!1!} + c_5 \dfrac{x_{2,p}^2}{2!} + c_6 \dfrac{x_{1,p}^3}{3!} + ... + c_p \dfrac{x_{2,p}^n}{n!} = y_p, \end{cases} \Rightarrow \tag{3}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2] \times \overline{C}^T = \overline{Y}^T,$$

звідки

$$\overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2]^{-1} \times \overline{Y}^T = \overline{C}^T, \tag{4}$$

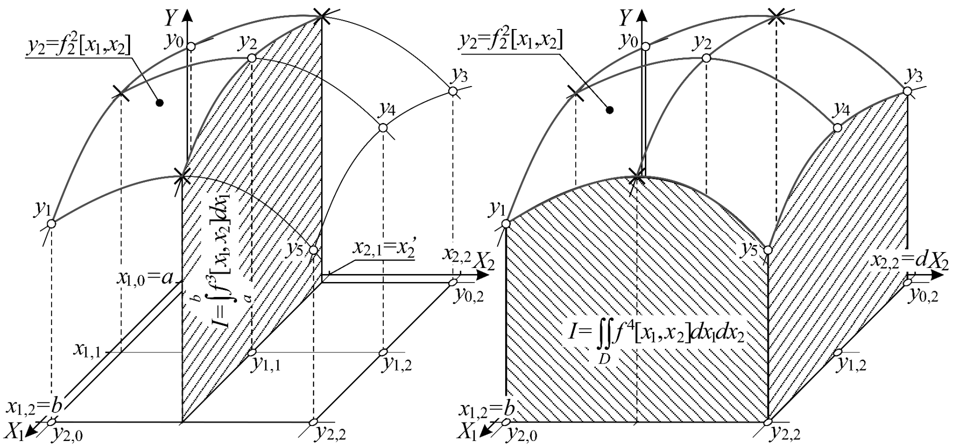
де $\overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2]$ – матриця Тейлора, значення елементів якої обчислюють за координатами вузлів $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ інтерполяції; $\overline{\overline{T}}[\overline{X}_1, \overline{X}_2]^{-1}$ – матриця, обернена до матриці Тейлора; $\overline{Y}^T$ – вектор-стовпець вузлових значень інтерполяції.

Означені одинарні інтеграли від многочлена (2) (рис. 1*а*) за однією зі змінних x_1 та x_2 з урахуванням виразу (4) визначають формули:

$$\int_a^b f^n[x_1, x_2] dx_1 = \left(\overline{T}_1^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=b \\ x_2=x_2'}} - \overline{T}_1^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=x_2'}} \right) \times \overline{\overline{Ix_1}} \times \overline{C}^T; \tag{5}$$

$$\int_c^d f^n[x_1, x_2] dx_2 = \left(\overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=d}} - \overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1' \\ x_2=c}} \right) \times \overline{\overline{Ix_2}} \times \overline{C}^T, \tag{6}$$

де $\overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]$ – рядок Тейлора (n+1)-го степеня для двох змінних; $\overline{\overline{Ix_1}}$ і $\overline{\overline{Ix_2}}$ – матриці його інтегрування за змінними x_1 та за x_2.



а *б*

Рис. 1. Схема обчислення означених одинарного (*а*) та подвійного (*б*) інтегралів, обмежених гладкими кривими.

Означений подвійний інтеграл від многочлена (2) (рис. 1*б*) за двома змінними x_1 та x_2 з урахуванням виразу (4) визначають за формулою

$$\iint_D f^n[x_1, x_2] dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_c^d f^n[x_1, x_2] dx_2 = \int_c^d dx_2 \int_a^b f^n[x_1, x_2] dx_1 =$$
$$= \left(\overline{T}^{n+2}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=b \\ x_2=d}} - \overline{T}^{n+2}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=c}} \right) \times \overline{\overline{Ix_1x_2}} \times \overline{C}^T, \tag{7}$$

де $\bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]$ – рядок Тейлора (n+2)-го степеня для двох змінних; $\overline{\overline{\overline{Ix_1x_2}}}$ – матриця його інтегрування за змінними x_1 і x_2.

Отже, для обчислення одинарних і подвійних інтегралів від функції, заданої табл. 1, потрібно виконати такі дії:

– за даними таблиці сформувати матричне рівняння (3) та розв'язати його;

– сформувати рядок Тейлора (n+1)-го степеня $\bar{T}^{n+1}[x_1, x_2]$ та матриці його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1}}$ і $\overline{\overline{Ix_2}}$ відповідно за змінними x_1 та за x_2;

– сформувати рядок Тейлора (n+2)-го степеня $\bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]$ та матрицю його інтегрування $\overline{\overline{\overline{Ix_1x_2}}}$ за змінними x_1 і x_2;

– для обчислення означеного одинарного інтеграла потрібно підставити у формулу (5) чи (6) корінь $\bar{C}^{\mathrm{T}}$ рівняння (4) та значення $x_1 = b$, $x_2 = x_2'$ і $x_1 = a$, $x_2 = x_2'$ (чи $x_1 = x_1'$, $x_2 = d$ і $x_1 = x_1'$, $x_2 = c$) і виконати вказані у формулах (5) чи (6) дії множення матриць;

– для знаходження означеного подвійного інтеграла слід підставити у формулу (7) корінь $\bar{C}^T$ рівняння (4) та значення $x_1 = b$, $x_2 = d$ і $x_1 = a$, $x_2 = c$ і виконати вказані в (7) дії множення матриць.

Обчислення площ перерізів тривимірної фігури та її об'єму. Загалом тривимірна фігура, обмежена зверху і знизу опуклими поверхнями, має вигляд, як на рис. 2*а*. У цьому випадку табличні функції від двох змінних, які описують опуклі поверхні тривимірної фігури, задамо у вигляді табл. 2.

Таблиця 2. Загальний вигляд двох табличних функцій двох змінних

№ вузла	0	1	…	i	…	p
$\bar{X}_1$	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	…	$x_{1,i}$	…	$x_{1,p}$
$\bar{X}_2$	$x_{2,0}$	$x_{2,1}$	…	$x_{2,i}$	…	$x_{2,p}$
$\bar{Y}_1$	$y_{1,0}$	$y_{1,1}$	…	$y_{2,i}$	…	$y_{1,p}$
$\bar{Y}_2$	$y_{2,0}$	$y_{3,1}$	…	$y_{2,i}$	…	$y_{2,p}$

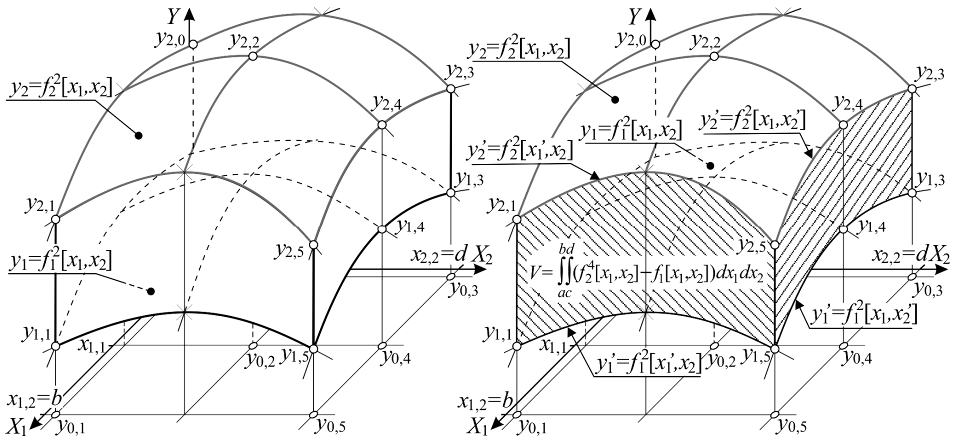
У цій таблиці введено такі позначення: $\bar{\bar{Y}} = \left[\bar{Y}_k = [y_{k,i},\ i = \overline{1, p}];\ k = \overline{1,2}\ \right]$ – значення табличних функцій у вузлових точках. Табличні функції $\bar{Y}_k = f_k[\bar{X}_1, \bar{X}_2],\quad k = \overline{1,2}$ від двох змінних подамо аналітично їх інтерполянтою (2) у вигляді многочлена Тейлора n-го степеня:

$$y_k = f_k^n[x_1, x_2] = \bar{T}^n[x_1, x_2] \times \bar{C}_k^T, k = \overline{1,2}, \tag{8}$$

де $\bar{C}_k^T, k = \overline{1,2}$ – транспонований рядок (стовпець) коефіцієнтів k-ої інтерполянти. Згідно з виразом (3), k-й стовпець $\bar{C}_k^T$ з виразу (8) є коренем такого лінійного матричного рівняння:

$$\bar{\bar{T}}[\bar{X}_1, \bar{X}_2] \times \bar{C}_k^T = \bar{Y}_k^T,\ \ k = \overline{1,2} \Rightarrow \bar{\bar{T}}[\bar{X}_1, \bar{X}_2]^{-1} \times \bar{Y}_k^T = \bar{C}_k^T,\ \ k = \overline{1,2}, \tag{9}$$

де $\bar{Y}_k^T, k = \overline{1,2}$ – транспонований рядок (стовпець) значень вузлових точок k-ої інтерполяції.



а *б*

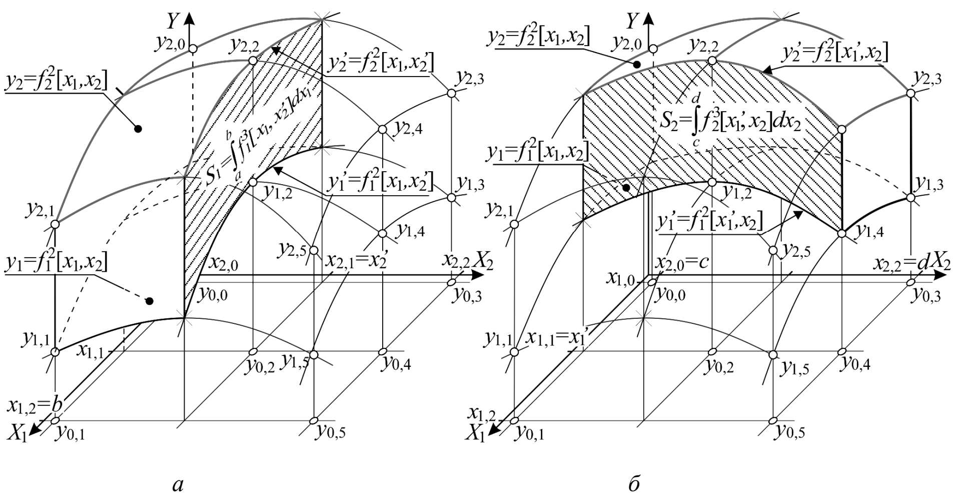
Рис. 2. Загальний вигляд тривимірної фігури (*а*), обмеженої гладкими поверхнями, та схема обчислення її об'єму (*б*).

Визначення площ перерізів тривимірної фігури (площ плоских фігур). Згідно з працею [1, с. 269], площа плоскої фігури (рис. 3*а*), обмеженої гладкими кривими $y_1' = f_1^n[x_1, x_2']$ і $y_2' = f_2^n[x_1, x_2']$ (де $f_1^n[x_1, x_2'] \le f_2^n[x_1, x_2']$, $x_2' - \text{const}$), а також прямими $x_1 = a$, $x_1 = b$ та $x_2 = x_2'$,

$$S_1 = \int_a^b \Big(f_2^n[x_1, x_2'] - f_1^n[x_1, x_2'] \Big) dx_1 \,, \tag{10}$$

а обмеженої гладкими кривими $y_1'' = f_1^n[x_1', x_2]$ і $y_2'' = f_2^n[x_1', x_2]$ (де $f_1^n[x_1', x_2] \le$ $\le f_2^n[x_1', x_2]$, $x_1' - \text{const}$), а також прямими $x_1 = x_1'$, $x_2 = c$ і $x_2 = d$ (рис. 3*б*), така:

$$S_2 = \int_c^d \Big(f_2^n[x_1', x_2] - f_1^n[x_1', x_2] \Big) dx_2 \,. \tag{11}$$



а *б*

Рис. 3. Схема обчислення площ перерізів тривимірної фігури (площ плоских фігур), обмежених гладкими кривими.

Якщо опуклі поверхні тривимірної фігури (рис. 3*a*) аналітично задати двома інтерполянтами $y_k = f_k^n[x_1, x_2],\ k = \overline{1,2}$ від двох змінних у вигляді многочлена Тейлора *n*-го степеня (8), то площі перерізів двох плоских фігур S_1 та S_2 у буквеному записі будуть:

$$S_1 = F[y_1', y_2']\Big|_{\substack{x_1\in[a,b]\\ x_2=x_2'}} = f_2^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}^{x_1=b} - f_1^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}^{x_1=b}, \tag{12}$$

$$S_2 = F[y_1'', y_2'']\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2\in[c,d]}} = f_2^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}^{x_2=d} - f_1^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}^{x_2=d}. \tag{13}$$

Водночас у матричному записі вирази (12) та (13) з урахуванням (9) матимуть вигляд

$$\begin{aligned} S_1 &= \overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}^{x_1=b} \times \overline{\overline{Ix_1}} \times \left(\overline{C}_2^T - \overline{C}_1^T\right) = \\ &= \left(\overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=b\\ x_2=x_2'}} - \overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=x_2'}}\right) \times \overline{\overline{Ix_1}} \times \Delta\overline{C}^T; \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}^{x_2=d} \times \overline{\overline{Ix_2}} \times \left(\overline{C}_2^T - \overline{C}_1^T\right) = \\ &= \left(\overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=d}} - \overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=x_1'\\ x_2=c}}\right) \times \overline{\overline{Ix_2}} \times \Delta\overline{C}^T. \end{aligned} \tag{15}$$

Отже, для обчислення площ плоских фігур S_1 та S_2 від двох функцій, заданих табл. 2, потрібно виконати такі дії:

– за даними таблиці сформувати два матричні рівняння (9) та розв'язати їх;

– сформувати рядок Тейлора (*n*+1)-го степеня $\overline{T}^{n+1}[x_1, x_2]$ і відповідні матриці його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1}}$ та $\overline{\overline{Ix_2}}$;

– підставити у формулу (14) корені $\overline{C}_1^{\mathrm{T}}$ k = 1-го матричного рівняння (9) та значення аргументів $x_1 = a$ і $x_1 = b$ та $x_2 = x_2'$, а далі, щоб отримати площу S_1, виконати дії множення матриць;

– підставити у формулу (15) корені $\overline{C}_2^{\mathrm{T}}$ k = 2-го матричного рівняння (9) та значення аргументів $x_1 = x_1'$ та $x_2 = c$ і $x_2 = d$, після чого для визначення площі S_2 виконати дії множення матриць.

Приклад 1. Нехай від функцій $\overline{Y}_k = \overline{Y}_k[x_1, x_2],\ k = \overline{1,2}$, заданих табл. 3, потрібно обчислити площі плоских фігур S_1 та S_2 за таких обмежень: $x_1 = b$ = 20, $x_1 = a$ = –10 та $x_2 = x_2'$ = 70; $x_1 = x_1'$ = 15, $x_2 = d$ = 95, $x_2 = c$ = 46.

Згідно з даними табл. 3, аналітичний вираз інтерполянти другого степеня для *k*-ої табличної функції повинен мати вигляд

$$\begin{aligned} y_k = f_k^2[x_1, x_2] &= c_{0,k} + c_{1,k}\frac{x_1}{1!} + c_{2,k}\frac{x_2}{1!} + c_{3,k}\frac{x_1^2}{2!} + c_{4,k}\frac{x_1 x_2}{1!1!} + c_{5,k}\frac{x_2^2}{2!} = \\ &= \overline{T}^2[x_1, x_2] \times \overline{C}_k^T,\ k = \overline{1,2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Рядок Тейлора третього степеня для змінних x_1 та x_2

$$\bar{T}^3[x_1,x_2]=\left|1 \quad \frac{x_1}{1!} \quad \frac{x_2}{1!} \quad \frac{x_1^2}{2!} \quad \frac{x_1x_2}{1!1!} \quad \frac{x_2^2}{2!} \quad \frac{x_1^3}{3!} \quad \frac{x_1^2x_2}{2!1!} \quad \frac{x_1x_2^2}{1!2!} \quad \frac{x_2^3}{3!}\right|, \tag{17}$$

а матриці його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1}}$ та $\overline{\overline{Ix_2}}$ за змінними x_1 та за x_2

$$\overline{\overline{Ix_1}}=\left\|\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\\ \mathbf{1}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\mathbf{1}&0&0\\ 0&0&0&0&\mathbf{1}&0\\ 0&0&0&0&0&\mathbf{1}\\ 0&0&0&0&0&0\end{matrix}\right\|,\quad \overline{\overline{Ix_2}}=\left\|\begin{matrix}0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&\mathbf{1}&0&0&0&0\\ 0&0&\mathbf{1}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\mathbf{1}&0&0\\ 0&0&0&0&\mathbf{1}&0\\ 0&0&0&0&0&\mathbf{1}\end{matrix}\right\|. \tag{18}$$

Таблиця 3. Значення табличних функцій, що описують опуклі поверхні тривимірної фігури

№ вузла	1	2	3	4	5	6
$\bar{X}_1$	–10	–10	–10	5	5	20
$\bar{X}_2$	46	68	95	62	84	74
$\bar{Y}_1$	5	8	18	6	11	9
$\bar{Y}_2$	10	14	26	12	18	14

Згідно з даними табл. 3, сформуємо лінійні матричні рівняння (9), результатом розв'язання яких є значення елементів таких двох векторів-стовпців:

$$\bar{C}_1^T=\left|\begin{matrix}c_{1,0}\\c_{1,1}\\c_{1,2}\\c_{1,3}\\c_{1,4}\\c_{1,5}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}15,4854\\0,2334\\-0,4493\\0,0103\\-0,0041\\0,0096\end{matrix}\right|;\quad \bar{C}_2^T=\left|\begin{matrix}c_{2,0}\\c_{2,1}\\c_{2,2}\\c_{2,3}\\c_{2,4}\\c_{2,5}\end{matrix}\right|=\left|\begin{matrix}21,3887\\0,3150\\-0,4829\\0,0033\\-0,0054\\0,0107\end{matrix}\right|;\quad \Delta\bar{C}^T=\left|\begin{matrix}5,9033\\0,0816\\-0,0336\\-0,0070\\-0,0012\\0,0012\end{matrix}\right|. \tag{19}$$

З урахуванням виразів (17) та (18) введемо деякі проміжні змінні та виконаємо відповідні обчислення:

$$\Delta\bar{T}^3[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10\\x_2=70}}^{x_1=20}=\bar{T}^3[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=20\\x_2=70}}-\bar{T}^3[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10\\x_2=70}}=$$
$$=\left|0 \quad 30 \quad 0 \quad 150 \quad 2100 \quad 0 \quad 1500 \quad 10500 \quad 73500 \quad 0\right|. \tag{20}$$

$$\Delta\bar{T}^3[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=15\\x_2=46}}^{x_2=95}=\bar{T}^3[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=15\\x_2=46}}-\bar{T}^3[x_1,x_2]\Big|_{\substack{x_1=15\\x_2=95}}=$$
$$=\left|0 \quad 0 \quad 49 \quad 0 \quad 735 \quad 3454,5 \quad 0 \quad 5512,5 \quad 51817,5 \quad 126673,2\right|. \tag{21}$$

Площа плоскої фігури, обмеженої двома інтерполянтами (16) другого степеня від двох змінних $y'_k = f_k^2[x_1, x'_2], k = \overline{1,2}$, а також прямими $x_1 = b$ = 20, $x_1 = a$ = = –10 та $x_2 = x'_2$ = 70, з урахуванням виразів (14), (18)–(20) буде:

$$S_1 = \Delta \bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10 \\ x_2=70}}^{x_1=20} \times \overline{\overline{Ix_1}} \times \Delta \bar{C}^T = 181{,}05.$$

Площа плоскої фігури, обмеженої двома інтерполянтами (16) другого степеня від двох змінних $y''_k = f_k^2[x'_1, x_2], k = \overline{1,2}$, а також прямими $x_1 = x'_1$ = 15, $x_2 = d$ = = 95, $x_2 = c$ = 46, з урахуванням виразів (15), (18), (19) і (21) така:

$$S_2 = \Delta \bar{T}^3[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=15 \\ x_2=46}}^{x_2=95} \times \overline{\overline{Ix_2}} \times \Delta \bar{C} = 277{,}92.$$

Площі плоских фігур, обчислених за формулами трапецій з кроком $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5$, відповідно становлять S_1 = 180,55 та S_2 = 278,03 кв. од., що практично збігається з отриманими вище результатами.

Обчислення об'єму тривимірної фігури. Згідно з працею [2, с. 271], об'єм фігури, обмеженої гладкими поверхнями $y_1 = f_1^2[x_1, x_2]$ і $y_2 = f_2^2[x_1, x_2]$ (де $f_1^2[x_1, x_2] \le f_2^2[x_1, x_2]$), а також прямими $x_1 = a$ і $x_1 = b$ та $x_2 = c$ і $x_2 = d$, такий:

$$V = \int_a^b \int_c^d \left(f_2^n[x_1, x_2] - f_1^n[x_1, x_2] \right) dx_1 dx_2 . \tag{22}$$

Якщо опуклі поверхні тривимірної фігури (рис. 2*а*) аналітично задати двома інтерполянтами $y_k = f_k^2[x_1, x_2],\ k = \overline{1,2}$ від двох змінних у вигляді многочлена Тейлора другого степеня (16), то з урахуванням виразу (9) її об'єм (рис. 2*б*) у буквеному записі визначає формула

$$V = F[y_1, y_2]\Big|_{\substack{x_1 \in [a,b] \\ x_2 \in [c,d]}} = f_2^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=c}}^{\substack{x_1=b \\ x_2=d}} - f_1^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=c}}^{\substack{x_1=b \\ x_2=d}}, \tag{23}$$

а в матричному – формула

$$\begin{aligned} V &= \bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=c}}^{\substack{x_1=b \\ x_2=d}} \times \overline{\overline{Ix_1x_2}} \times \left(\bar{C}_2^{\mathrm{T}} - \bar{C}_1^T \right) = \\ &= \left(\bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=b \\ x_2=d}} - \bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a \\ x_2=c}} \right) \times \overline{\overline{Ix_1x_2}} \times \Delta \bar{C}^T . \end{aligned} \tag{24}$$

Отже, для обчислення об'єму тривимірної фігури V, опуклі поверхні якої описують дві табличні функції, потрібно виконати такі дії:

– за даними таблиці сформувати два матричні рівняння (9) та розв'язати їх;

– сформувати рядок Тейлора (n+2)-го степеня $\bar{T}^{n+2}[x_1, x_2]$ і відповідну матрицю його інтегрування $\overline{\overline{Ix_1x_2}}$;

– підставити у формулу (24) корені $\bar{C}_k^{\mathrm{T}}$ k-го матричного рівняння (9) та значення аргументів $x_1 = a$ і $x_1 = b$ та $x_2 = c$ і $x_2 = d$, після чого для отримання V виконати дії множення матриць.

Приклад 2. Нехай від функцій $\bar{Y}_k = \bar{Y}_k[x_1, x_2],\ k = \overline{1,2}$, заданих табл. 3, потрібно обчислити об'єм тривимірної фігури за таких обмежень: $x_1 = b$ = 20, $x_1 = a$ =

$= -10$; $x_2 = d = 95$, $x_2 = c = 46$.

Рядок Тейлора четвертого степеня для змінних x_1 та x_2 матиме вигляд

$$\bar{T}^4[x_1, x_2] =$$
$$= \left| 1 \quad \frac{x_1}{1!} \quad \frac{x_2}{1!} \quad \frac{x_1^2}{2!} \quad \frac{x_1 x_2}{1!1!} \quad \frac{x_2^2}{2!} \quad \frac{x_1^3}{3!} \quad \frac{x_1^2 x_2}{2!1!} \quad \frac{x_1 x_2^2}{1!2!} \quad \frac{x_2^3}{3!} \quad \frac{x_1^4}{4!} \quad \frac{x_1^3 x_2}{3!1!} \quad \frac{x_2^2 x_2^2}{2!2!} \quad \frac{x_1 x_2^3}{1!3!} \quad \frac{x_2^4}{4!} \right|. \quad (25)$$

Розв’язками двох лінійних матричних рівнянь (9) є значення двох векторів-стовпців (19).

З урахуванням виразу (25) введемо деяку проміжну змінну та виконаємо відповідні обчислення:

$$\Delta\bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10\\ x_2=46}}^{\substack{x_1=20\\ x_2=95}} = \bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=20\\ x_2=95}} - \bar{T}_2^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=-10\\ x_2=46}}$$
$$= |0 \quad 30 \quad 49 \quad 150 \quad 2360 \quad 3454{,}5 \quad 1500 \quad 16700 \quad 100830 \quad (26)$$
$$126673{,}2 \quad 6250 \quad 134333{,}3 \quad 849600 \quad 3020143 \quad 3207215|.$$

Об’єм тривимірної фігури (рис. 2*б*), обмеженої двома інтерполянтами (16) другого степеня від двох змінних $y_k = f_k^2[x_1, x_2], k = \overline{1,2}$, а також прямими $x_1 = b$ = = 20, $x_1 = a$ = –10 та $x_2 = d$ = 95, $x_2 = c$ = 46, з урахуванням виразів (19), (24) та (26) такий:

$$V = \Delta\bar{T}^4[x_1, x_2]\Big|_{\substack{x_1=a\\ x_2=c}}^{\substack{x_1=b\\ x_2=d}} \times \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \Delta\bar{C}^{\mathrm{T}} = 9062{,}16.$$

Об’єм тривимірної фігури, обчислений за формулами трапецій з кроком $\Delta x_1 = \Delta x_2 = 5$, становить 9056,12 куб. од., що практично збігається з отриманим вище результатом.

ВИСНОВКИ

Під час обчислення інтегралів не завжди вдається виразити первісну від підінтегральної функцію через елементарні функції. В інженерних розрахунках підінтегральну функцію часто задають таблицею її значень для певних значень аргументу.

Наведено метод числового інтегрування табличної функції від двох змінних з використанням многочлена Тейлора, за яким можна обчислити означені одинарні інтеграли за кожною зі змінних і означений подвійний інтеграл – за двома змінними. Визначення означеного одинарного інтеграла за кожною змінною зводиться до множення виразу, який є різницею між рядками Тейлора (n+1)-го степеня в заданих межах (кінцевій та початковій), на відповідну матрицю інтегрування та на стовпець коефіцієнтів інтерполянти, а означеного подвійного інтеграла за двома змінними – до множення виразу, який є різницею між рядками Тейлора (n+2)-го степеня в заданих межах (кінцевій та початковій), на матрицю інтегрування та стовпець коефіцієнтів інтерполянти.

Розроблено алгоритм обчислення площ плоских фігур (перерізів тривимірної фігури), заданих табличними функціями від двох змінних, з використанням многочлена Тейлора n-го степеня. Для визначення площі плоскої фігури потрібно помножити рядок Тейлора (n+1)-го степеня на матрицю інтегрування для однієї зі змінних, а також на вираз, який є різницею між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують гладкі криві плоскої фігури.

Опрацьовано алгоритм розрахунку об’єму тривимірної фігури, опуклі поверхні якої задано табличними функціями від двох змінних, з використанням многочлена Тейлора n-го степеня. Для обчислення об’єму цієї фігури потрібно помножити рядок Тейлора (n+2)-го степеня на матрицю інтегрування для двох змінних, а також на вираз, який є різницею між стовпцями коефіцієнтів інтерполянт (верхньої та нижньої), які описують опуклі поверхні тривимірної фігури.

1. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Вычислительная математика в упражнениях и задачах: Уч. пос. для студентов ВТУЗов. – М.: Высш. шк., 1980. – Ч. I. – 320 с.
2. *Вычислительная* математика: Уч. пос. / Н. И. Данилина, Н. С. Дубровская, О. П. Кваша, Г. Л. Смирнов. – М.: Высш. шк., 1985. – 472 с.
3. *Грицюк Ю. І., Драґан Я. П.* Числове інтегрування табличних функцій для однієї змінної з використанням многочлена Тейлора // Наук. вісник НЛТУ України. – 2016. – Вип. 26.3. – С. 350–360.
4. *Фільц Р. В.* Наближення таблично заданих функцій (інтерполяція та апроксимація). Конспект лекцій з предмету “Математичні задачі електромеханіки” / Для студентів спец. 1801 “Електромеханіка”. – Львів: Вид-во ДУ ЛП, 1995. – 60 с.
5. *Фильц Р. В., Коцюба М. В., Грицюк Ю. И.* Алгоритм вычисления на ЭВМ многочлена Тейлора и его производных // Изв. вузов. Электромеханика. – 1991. – № 5. – С. 5–10.

Одержано 17.06.2016