

УДК 621.391:519.22

## ВИЗНАЧЕННЯ ПОКОМПОНЕНТНОЇ ФУНКЦІЇ КОГЕРЕНТНОСТІ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНИХ ПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ СИГНАЛІВ

Р. М. Юзефович<sup>1</sup>, І. М. Яворський<sup>1,2</sup>, І. Й. Мацько<sup>1</sup>, П. О. Семенов<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України;

<sup>2</sup> Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету,  
Бидгощ, Польща;

<sup>3</sup> Товариство з обмеженою відповідальністю “ПОРТТЕХЕКСПЕРТ”

E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com, matskoivan@gmail.com

Проаналізовано властивості функції когерентності взаємозв'язаних періодично нестационарних випадкових сигналів, сформованої на основі спектральних характеристик стаціонарних випадкових процесів, які модулюють їх несучі гармоніки. Розглянуто метод її обчислення, який ґрунтується на виділенні таких процесів за допомогою відповідного переносу частот і низькочастотної фільтрації. Метод верифіковано на основі симульованих на комп'ютері модульованих сигналів.

**Ключові слова:** *періодично нестационарні випадкові сигнали, стаціонарні компоненти, покомпонентна функція когерентності, модульовані сигнали.*

## ESTIMATION OF COMPONENT-WISE COHERENCE FUNCTION FOR JOINT PERIODICALLY CORRELATED RANDOM SIGNALS

R. M. Yuzefovych<sup>1</sup>, I. M. Javorskyj<sup>1,2</sup>, I. Y. Matsko<sup>1</sup>, P. O. Semenov<sup>3</sup>

<sup>1</sup> H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine;

<sup>2</sup> Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science,  
Bydgoszcz, Poland;

<sup>3</sup> Limited liability company “PORTTECHEXPERT”

The analysis of properties of coherence function for joint periodically correlated random signals, formed on the base of spectral characteristics of stationary random processes, which modulate their carrier harmonics, is provided. The method of its estimation based on the separation of such processes using respective frequency translation and low frequency filtration is considered. Verification of such a method is provided on the base of computer simulated modulated processes. Formulas for estimation of the component-wise coherence function are proposed. The scheme of component-wise coherence function calculation is given. It is shown that coherence function tends to zero rapidly if damping coefficients are small and increase of damping coefficients leads to frequency domain widening where properties of nonstationarity of the one signal affect the properties of nonstationarity of the other signal.

**Keywords:** *periodically nonstationary random signals, stationary components, component-wise coherence function, modulated signals.*

Функцію когерентності, введена для аналізу пов'язаності стаціонарних випадкових сигналів, визначають взаємоспектральною густиною сигналів, а також їх спектральними густинами потужності. Вона дає можливість виділити ту частину потужності одного з сигналів, яка на частоті  $\omega$  визначається потужністю іншого [1, 2]. Взаємоспектральна густина стаціонарних випадкових сигналів  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$  не дорівнює нулю тільки тоді, коли спектри потужності обох сигналів пере-

© Р. М. Юзефович, І. М. Яворський, І. Й. Мацько, П. О. Семенов, 2016

криваються. А це означає, що у гармонічних поданнях стаціонарних випадкових сигналів

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_{\xi}(\omega), \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_{\eta}(\omega)$$

взаємкорельованими можуть бути тільки гармонічні складові з однаковими частотами, тобто

$$Ed \overset{\circ}{z}_{\xi}(\omega_1) d \overset{\circ}{z}_{\eta}(\omega_2) = f_{\xi\eta}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2.$$

Тут  $\overset{\circ}{z}_{\xi}(\omega) = z_{\xi}(\omega) - m_{\xi}U(\omega)$ ,  $\overset{\circ}{z}_{\eta}(\omega) = z_{\eta}(\omega) - m_{\eta}U(\omega)$ ,  $U(\omega)$  – функція Хевісайда,  $\delta(\omega)$  – дельта-функція Дірака, “ $\overset{\circ}{\cdot}$ ” – знак спряження, при цьому  $Edz_{\xi}(\omega) = m_{\xi}\delta(\omega)d\omega$ ,  $Edz_{\eta}(\omega) = m_{\eta}\delta(\omega)d\omega$ , де  $m_{\xi}$  і  $m_{\eta}$  – математичні сподівання сигналів:  $m_{\xi} = E\xi(t)$  і  $m_{\eta} = E\eta(t)$ . З іншого боку, корельованість гармонік нестаціонарних випадкових процесів є їх визначальною рисою. Це пов’язано з тим, що нестаціонарність сигналів проявляється у впливі певних детермінованих факторів на умови їх протікання в часі, а це призводить до переносу гармонічних складових за частотою.

За періодично нестаціонарних випадкових сигналів (ПНВП) взаємодію детермінованої періодичності і стохастичності описуємо гармонічними рядами [3, 4]:

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \xi_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad \eta(t) = \sum_{k \in Z} \eta_k(t) e^{ik\omega_0 t}, \quad (1)$$

де  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ ,  $T$  – період нестаціонарності, а  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$  – стаціонарно зв’язані випадкові процеси, у гармонічних поданнях котрих

$$\xi_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_k^{(\xi)}(\omega), \quad \eta_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_k^{(\eta)}(\omega)$$

прирости  $dz_k^{(\xi)}(\omega)$  і  $dz_k^{(\eta)}(\omega)$  є некорельованими:

$$Ed \overset{\circ}{z}_k^{(\xi)}(\omega_1) d \overset{\circ}{z}_l^{(\eta)}(\omega_2) = f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1) d\omega_1 d\omega_2. \quad (2)$$

Тут  $\overset{\circ}{z}_k^{(\xi)}(\omega) = z_k^{(\xi)}(\omega) - m_k^{(\xi)}U(\omega)$ ,  $\overset{\circ}{z}_k^{(\eta)}(\omega) = z_k^{(\eta)}(\omega) - m_k^{(\eta)}U(\omega)$ ,  $m_k^{(\xi)} = E\xi_k(t)$ ,  $m_k^{(\eta)} = E\eta_k(t)$ .

Стохастичні ряди (1) перепишемо у вигляді

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_{\xi}(\omega), \quad \eta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dz_{\eta}(\omega), \quad (3)$$

де

$$dz_{\xi}(\omega) = \sum_{k \in Z} dz_k^{(\xi)}(\omega - k\omega_0), \quad dz_{\eta}(\omega) = \sum_{k \in Z} dz_k^{(\eta)}(\omega - k\omega_0).$$

Прийнявши до уваги співвідношення (2), знаходимо:

$$Ed \overset{\circ}{z}_{\xi}(\omega_1) d \overset{\circ}{z}_{\eta}(\omega_2) = \sum_{k, l \in Z} Ed \overset{\circ}{z}_k^{(\xi)}(\omega_1 - k\omega_0) d \overset{\circ}{z}_l^{(\eta)}(\omega_1 - l\omega_0) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k,l \in Z} f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega_1 - k\omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_1 + (l-k)\omega_0) d\omega_1 d\omega_2 = \\
&= \sum_{k \in Z} \sum_{l \in Z} f_{l,l-k}^{(\xi\eta)}(\omega_1 - l\omega_0) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1 d\omega_2,
\end{aligned}$$

де  $f_{l,k}^{(\xi\eta)}(\omega)$  – взаємна спектральна густина стаціонарно зв'язаних процесів  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ . Позначивши

$$f_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \sum_{l \in Z} f_{l,l-k}^{(\xi\eta)}(\omega - l\omega_0), \quad (4)$$

приходимо до співвідношення

$$E d z_{\xi}(\omega_1) d z_{\eta}(\omega_2) = \sum_{k \in Z} f_k^{(\xi\eta)}(\omega_1) \delta(\omega_2 - \omega_1 + k\omega_0) d\omega_1 d\omega_2.$$

З наведеного вище випливає, що корельованість різночастотних гармонік взаємозв'язаних ПНВП є наслідком модуляції її несучих гармонік з частотами  $k\omega_0$ , тобто результатом переносу спектрів модулюючих процесів  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ . При цьому корельованість гармонік у поданнях (3) і модулюючих процесів у стохастичних рядах (1) рівнозначна.

Взаємкореляційні компоненти сигналів  $f_k^{(\xi\eta)}(\omega)$ , які характеризують корельованість гармонік сигналів, покладені в основу визначення введеної в праці [5] функції когерентності

$$\gamma_k^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{f_k^{(\xi\eta)}\left(\omega + k \frac{\omega_0}{2}\right)}{f_0^{(\xi)}\left(\omega - k \frac{\omega_0}{2}\right) f_0^{(\eta)}\left(\omega + k \frac{\omega_0}{2}\right)}, \quad (5)$$

яка при  $k \neq 0$  є нормованою кількісною характеристикою корельованості гармонік сигналів на частотах  $\omega - k \frac{\omega_0}{2}$  та  $\omega + k \frac{\omega_0}{2}$ , різниця між якими є кратною до несучої частоти  $\omega_0$ . При цьому значення нульових спектральних компонентів сигналів, які визначають розподіл за частотою середньочасових потужностей сигналів, відповідають крайнім частотам інтервалу  $\left[\omega - k \frac{\omega_0}{2}, \omega + k \frac{\omega_0}{2}\right]$ , а значення взаємних спектральних компонентів – його верхній частоті. У результаті введення зсувів функція когерентності (5) не змінюється під час лінійних перетворень [5]. Число  $k$  називають порядком функції когерентності (5). При  $k = 0$  формула (5) приймає такого ж вигляду, що й формула для функції когерентності стаціонарно зв'язаних випадкових сигналів [1–3]. Для сигналів, що є результатом лінійних перетворень одного й того ж сигналу,  $\gamma_0^{(\xi\eta)}(\omega) = 1$ .

Отже, функція когерентності (5) при  $k \neq 0$  характеризує пов'язаність нестационарних властивостей сигналів. Зі співвідношення (4) випливає, що взаємоспектральні компоненти визначають сумою спектральних густин від процесів  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ , які модулюють несучі гармоніки, тому її можна вважати інтегральною характеристикою такої пов'язаності. Для аналізу взаємозв'язку окремих модулюючих процесів можна використати функцію когерентності [6]:

$$\gamma_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega)|}{\left[ f_k^{(\xi)}(\omega) f_l^{(\eta)}(\omega) \right]^{1/2}}, \quad (6)$$

де  $f_k^{(\xi)}(\omega)$  і  $f_l^{(\eta)}(\omega)$  – спектральні густини потужності процесів  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ . Далі називатимемо її покомпонентною функцією когерентності, а різницю між номерами стаціонарних компонентів  $k$  і  $l$  – її порядком.

Покажемо, що покомпонентна функція когерентності (6) також не змінюється за лінійних перетворень. На виході лінійних перетворювачів маємо:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_1(\tau) \xi(t-\tau) d\tau, \\ \tilde{\eta}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau) \eta(t-\tau) d\tau, \end{aligned}$$

де  $h_1(\tau)$  і  $h_2(\tau)$  – імпульсні передавальні функції. На основі подань (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{\xi}(t) &= \sum_{k \in Z} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega + k\omega_0) e^{i\omega t} dz_k^{(\xi)}(\omega), \\ \tilde{\eta}(t) &= \sum_{k \in Z} e^{ik\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} H_2(\omega + k\omega_0) e^{i\omega t} dz_k^{(\eta)}(\omega). \end{aligned}$$

Звідси для авто- та взаємкореляційних функцій одержуємо:

$$\begin{aligned} R_{kk}^{(\tilde{\xi})}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_1(\omega + k\omega_0)|^2 f_{kk}^{(\xi)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \\ R_{kk}^{(\tilde{\eta})}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} |H_2(\omega + k\omega_0)|^2 f_{kk}^{(\eta)}(\omega) e^{i\omega u} d\omega, \\ R_{kl}^{(\tilde{\xi}\tilde{\eta})}(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega + k\omega_0) \overline{H_2(\omega + k\omega_0)} f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} f_k^{(\tilde{\xi})}(\omega) &= |H_1(\omega + k\omega_0)|^2 f_k^{(\xi)}(\omega), \\ f_k^{(\tilde{\eta})}(\omega) &= |H_2(\omega + k\omega_0)|^2 f_k^{(\eta)}(\omega), \\ f_{kl}^{(\tilde{\xi}\tilde{\eta})}(\omega) &= H_1(\omega + k\omega_0) \overline{H_2(\omega + k\omega_0)} f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega). \end{aligned}$$

Таким чином, функція когерентності вихідних сигналів

$$\gamma_{kl}^{(\tilde{\xi}\tilde{\eta})}(\omega) = \frac{|H_1(\omega + k\omega_0)| |H_2(\omega + k\omega_0)| |f_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega)|}{\left[ |H_1(\omega + k\omega_0)|^2 |H_2(\omega + k\omega_0)|^2 f_k^{(\xi)}(\omega) f_l^{(\eta)}(\omega) \right]^{1/2}} = \gamma_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega).$$

Отже, покомпонентна функція когерентності (6), як і (5), також не змінюється за лінійних інваріантних перетворень. Така важлива властивість цієї величини дає можливість ефективно використовувати її під час розв'язування багатьох за-

дач перетворення й обробки сигналів, в тому числі для розділення й ідентифікації дефектів механічного обладнання під час вібраційних обстежень. Останнє зумовлено тим, що виникнення пошкоджень в окремих вузлах обладнання призводить до нелінійних ефектів, кожен з яких характеризується специфічними частотними властивостями.

Першою задачею, яка виникає під час знаходження покомпонентної функції когерентності, є виділення стаціонарних компонентів  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ . Як показано раніше [3, 7], його можна здійснити за допомогою перетворень

$$\tilde{\xi}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\xi(\tau)e^{-ik\omega_0\tau}d\tau,$$

$$\tilde{\eta}_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\eta(\tau)e^{-ik\omega_0\tau}d\tau,$$

де  $h(\tau)$  – імпульсна передавальна функція ідеального низькочастотного фільтра зі смугою  $\left[-\frac{\omega_0}{2}, \frac{\omega_0}{2}\right]$ :

$$h(\tau) = \frac{\sin\left(\frac{\omega_0\tau}{2}\right)}{\pi\tau}.$$

У частотній області маємо:

$$\tilde{\xi}_k(t) = \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{i\omega t} dz_{\xi}(\omega + k\omega_0), \quad (7)$$

$$\tilde{\eta}_k(t) = \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{i\omega t} dz_{\eta}(\omega + k\omega_0). \quad (8)$$

Як бачимо, перетворення (7) і (8) полягають у частотному зсуві кожного з сигналів вліво на  $k\omega_0$  та низькочастотній фільтрації. Виділені випадкові процеси  $\tilde{\xi}_k(t)$  і  $\tilde{\eta}_k(t)$  є стаціонарними та стаціонарно зв'язаними, а їх спектральні густини для вузькосмугових модуляцій збігаються зі спектральними густинами стаціонарних компонентів  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ . За широкосмугових модуляцій спектральні густини зсунутих за частотою сусідніх процесів  $\tilde{\xi}_k(t)$  і  $\tilde{\eta}_k(t)$  накладатимуться і тоді компоненти  $\tilde{\xi}_k(t)$  і  $\tilde{\eta}_k(t)$  формуються багатьма процесами  $\xi_k(t)$  і  $\eta_k(t)$ . Однак подання процесів у вигляді стохастичних рядів (1) і рядів

$$\xi(t) = \sum_{k \in Z} \tilde{\xi}_k(t)e^{ik\omega_0 t}, \quad \eta(t) = \sum_{k \in Z} \tilde{\eta}_k(t)e^{ik\omega_0 t}$$

будуть еквівалентні, оскільки імовірнісні характеристики випадкових процесів  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$ , виражені через імовірнісні характеристики процесів  $\tilde{\xi}_k(t)$  і  $\tilde{\eta}_k(t)$  з одного боку, а з другого – через характеристики виділених компонентів, збігатимуться [3, 7].

Випадкові функції у співвідношеннях (7) і (8) подамо у вигляді  $z_{\xi}(\omega) = z_{\xi}^c(\omega) - iz_{\xi}^s(\omega)$ ,  $z_{\eta}(\omega) = z_{\eta}^c(\omega) - iz_{\eta}^s(\omega)$  і виділимо дійсні та уявні частини випадкових процесів (7) і (8):

$$\xi_k(t) = \frac{1}{2} [\xi_k^c(t) - i\xi_k^s(t)], \quad \eta_k(t) = \frac{1}{2} [\eta_k^c(t) - i\eta_k^s(t)].$$

Тут

$$\xi_k^c(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \cos \omega t dz_{\xi}^c(\omega + k\omega_0) + \sin \omega t dz_{\xi}^s(\omega + k\omega_0) \right],$$

$$\xi_k^s(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \cos \omega t dz_{\xi}^s(\omega + k\omega_0) - \sin \omega t dz_{\xi}^c(\omega + k\omega_0) \right],$$

$$\eta_k^c(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \cos \omega t dz_{\eta}^c(\omega + k\omega_0) + \sin \omega t dz_{\eta}^s(\omega + k\omega_0) \right],$$

$$\eta_k^s(t) = 2 \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \cos \omega t dz_{\eta}^s(\omega + k\omega_0) - \sin \omega t dz_{\eta}^c(\omega + k\omega_0) \right].$$

Звідси для авто- та взаємкореляційних функцій виділених процесів отримуємо:

$$R_{\xi_k}^c(u) = \frac{1}{4} \left[ R_{\xi_k}^c(u) + R_{\xi_k}^c(u) + i \left[ R_{\xi_k}^{cs}(u) - R_{\xi_k}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{\eta_k}^c(u) = \frac{1}{4} \left[ R_{\eta_k}^c(u) + R_{\eta_k}^c(u) + i \left[ R_{\eta_k}^{cs}(u) - R_{\eta_k}^{sc}(u) \right] \right],$$

$$R_{\xi_k \eta_l}^c(u) = \frac{1}{4} \left[ R_{\xi_k \eta_l}^c(u) + R_{\xi_k \eta_l}^c(u) + i \left[ R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u) - R_{\xi_k \eta_l}^{sc}(u) \right] \right],$$

де

$$R_{\xi_k}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t), \quad R_{\eta_k}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t),$$

$$R_{\xi_k}^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^c(t+u) \overset{\circ}{\xi}_k^s(t), \quad R_{\eta_k}^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\eta}_k^c(t+u) \overset{\circ}{\eta}_k^s(t),$$

$$R_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t+u) \overset{\circ}{\eta}_l^{c,s}(t), \quad R_{\xi_k \eta_l}^{cs}(u) = E \overset{\circ}{\xi}_k^c(t+u) \overset{\circ}{\eta}_l^s(t),$$

$$\overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) = \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t) - \tilde{m}_{\xi_k}^{c,s}, \quad \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t) = \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t) - \tilde{m}_{\eta_k}^{c,s},$$

$$\tilde{m}_{\xi_k}^{c,s} = E \overset{\circ}{\xi}_k^{c,s}(t), \quad \tilde{m}_{\eta_k}^{c,s} = E \overset{\circ}{\eta}_k^{c,s}(t).$$

Оскільки  $R_{\xi_k}^{CS}(u) = R_{\xi_k}^{SC}(-u)$ ,  $R_{\eta_k}^{CS}(u) = R_{\eta_k}^{SC}(-u)$ , то  $R_{\xi_k}^{CS}(u) - R_{\xi_k}^{SC}(-u) = \tilde{R}_{\xi_k}^{CS}(u)$ ,  $R_{\eta_k}^{CS}(u) - R_{\eta_k}^{SC}(-u) = \tilde{R}_{\eta_k}^{CS}(u)$ , де  $\tilde{R}_{\xi_k}^{CS}(u)$  і  $\tilde{R}_{\eta_k}^{CS}(u)$  – непарні складові відповідних кореляційних функцій. Спектральні густини процесів (7) і (8) подамо так:

$$f_{\xi_k}^{\tilde{z}}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[ R_{\xi_k}^C(u) + R_{\xi_k}^S(u) \right] \cos \omega u + 2\tilde{R}_{\xi_k}^{CS}(u) \sin \omega u \, du,$$

$$f_{\eta_k}^{\tilde{z}}(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\infty} \left[ R_{\eta_k}^C(u) + R_{\eta_k}^S(u) \right] \cos \omega u + 2\tilde{R}_{\eta_k}^{CS}(u) \sin \omega u \, du.$$

Взаємна спектральна густина цих процесів є комплекснозначною функцією  $f_{\xi_k \eta_l}^{\tilde{z}}(\omega) = \text{Re } f_{\xi_k \eta_l}^{\tilde{z}}(\omega) - i \text{Im } f_{\xi_k \eta_l}^{\tilde{z}}(\omega)$ , при цьому

$$\text{Re } f_{\xi_k \eta_l}^{\tilde{z}}(\omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_{\xi_k \eta_l}^C(u) + R_{\xi_k \eta_l}^S(u) \right] \cos \omega u + \left[ R_{\xi_k \eta_l}^{CS}(u) - R_{\xi_k \eta_l}^{SC}(u) \right] \sin \omega u \, du,$$

$$\text{Im } f_{\xi_k \eta_l}^{\tilde{z}}(\omega) = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ R_{\xi_k \eta_l}^C(u) + R_{\xi_k \eta_l}^S(u) \right] \sin \omega u + \left[ R_{\xi_k \eta_l}^{CS}(u) - R_{\xi_k \eta_l}^{SC}(u) \right] \cos \omega u \, du.$$

На основі наведених вище теоретичних формул сформуємо статистики для оцінювання відповідних величин за експериментальними результатами.

Припустимо, що реалізація ПНВС  $\xi(t)$  і  $\eta(t)$  задані для часу  $t \in [-\theta, \theta]$ . Формули для виділення стаціонарних компонентів тоді набувають вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\xi}_k(t) \\ \hat{\eta}_k(t) \end{array} \right\} = \int_{-\theta}^{\theta} h(t-\tau) \left\{ \begin{array}{l} \xi(\tau) \\ \eta(\tau) \end{array} \right\} \cos k\omega_0 \tau d\tau - i \int_{-\theta}^{\theta} h(t-\tau) \left\{ \begin{array}{l} \xi(\tau) \\ \eta(\tau) \end{array} \right\} \sin k\omega_0 \tau d\tau.$$

Візьмемо до уваги, що

$$h(t-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\omega_0}{2}}^{\frac{\omega_0}{2}} \cos \omega(t-\tau) d\omega,$$

і введемо позначення

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\xi}(\omega) \\ b_{\xi}(\omega) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \xi(\tau) \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{array} \right\} d\tau,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{\eta}(\omega) \\ b_{\eta}(\omega) \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \eta(\tau) \left\{ \begin{array}{l} \cos \omega \tau \\ \sin \omega \tau \end{array} \right\} d\tau.$$

Врахувавши, що  $a_{\xi, \eta}(-\omega) = a_{\xi, \eta}(\omega)$ , а  $b_{\xi, \eta}(-\omega) = -b_{\xi, \eta}(\omega)$ , знаходимо:

$$\hat{\xi}_k^c(t) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \begin{array}{l} a_{\xi}(\omega + k\omega_0) + \\ + a_{\xi}(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[ \begin{array}{l} b_{\xi}(\omega + k\omega_0) + \\ + b_{\xi}(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega,$$

$$\hat{\xi}_k^s(t) = \int_0^{\frac{\omega_0}{2}} \left[ \begin{array}{l} b_{\xi}(\omega + k\omega_0) - \\ - b_{\xi}(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[ \begin{array}{l} a_{\xi}(\omega - k\omega_0) - \\ - a_{\xi}(\omega + k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega,$$

$$\hat{\eta}_k^c(t) = \int_0^{\omega_0} \left[ \begin{array}{l} a_\eta(\omega + k\omega_0) + \\ + a_\eta(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[ \begin{array}{l} b_\eta(\omega + k\omega_0) + \\ + b_\eta(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega,$$

$$\hat{\eta}_k^s(t) = \int_0^{\omega_0} \left[ \begin{array}{l} b_\eta(\omega + k\omega_0) - \\ - b_\eta(\omega - k\omega_0) \end{array} \right] \cos \omega t + \left[ \begin{array}{l} a_\eta(\omega - k\omega_0) - \\ - a_\eta(\omega + k\omega_0) \end{array} \right] \sin \omega t \, d\omega.$$

Під час обчислення на комп'ютері інтегральні перетворення необхідно замінити на інтегральні суми. Покладемо, що  $\theta = Kh$ , де  $K$  – натуральне число;  $h$  – інтервал дискретизації. Тоді

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{a}_\xi(\omega \pm k\omega_0) \\ \hat{a}_\eta(\omega \pm k\omega_0) \end{array} \right\} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=-K}^K \left\{ \begin{array}{l} \xi(nh) \\ \eta(nh) \end{array} \right\} \cos(\omega \pm k\omega_0),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{b}_\xi(\omega \pm k\omega_0) \\ \hat{b}_\eta(\omega \pm k\omega_0) \end{array} \right\} = \frac{h}{\pi} \sum_{n=-K}^K \left\{ \begin{array}{l} \xi(nh) \\ \eta(nh) \end{array} \right\} \sin(\omega \pm k\omega_0).$$

Частотний інтервал  $\left[ \omega, \frac{\omega_0}{2} \right]$  поділимо на інтервали  $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{2L}$ , де  $L$  – натуральне число. Тоді за дискретної обробки

$$\begin{aligned} \xi_k^c(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} \left[ \left[ \hat{a}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{a}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t + \right. \\ \left. + \left[ \hat{b}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{b}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \xi_k^s(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} \left[ \left[ \hat{a}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) - \hat{a}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t + \right. \\ \left. + \left[ \hat{b}_\xi(n\Delta\omega + k\omega_0) - \hat{b}_\xi(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_k^c(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} \left[ \left[ \hat{a}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{a}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t + \right. \\ \left. + \left[ \hat{b}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) + \hat{b}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t \right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_k^s(t) = \Delta\omega \sum_{n=0}^{L-1} \left[ \left[ \hat{a}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) - \hat{a}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) \right] \sin n\Delta\omega t + \right. \\ \left. + \left[ \hat{b}_\eta(n\Delta\omega + k\omega_0) - \hat{b}_\eta(n\Delta\omega - k\omega_0) \right] \cos n\Delta\omega t \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

За співвідношеннями (9)–(12) формуємо ряди  $\hat{\xi}_k^{c,s}(rh)$  і  $\hat{\eta}_k^{c,s}(rh)$ , де  $r$  – ціле число, на основі яких обчислюємо оцінки авто- і взаємкореляційних функцій:

$$\hat{R}_{\xi_k}^{c,s}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \hat{\xi}_k^{c,s}((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^{c,s} \right] \left[ \hat{\xi}_k^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\xi_k}^{c,s} \right],$$



$$\begin{aligned} \hat{R}_{\eta_k}^{c,s}(jh) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \hat{\eta}^{c,s}((n+j)h) - \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} \right] \left[ \hat{\eta}^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} \right], \\ \hat{R}_{\xi_k}^{cs}(jh) &= \hat{R}_{\xi_k}^{cs}(jh) - \hat{R}_{\xi_k}^{sc}(jh) = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \left[ \hat{\xi}_k^c((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^c \right] \left[ \hat{\xi}_k^s(nh) - \hat{m}_{\xi_k}^s \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left[ \hat{\xi}_k^s((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^s \right] \left[ \hat{\xi}_k^c(nh) - \hat{m}_{\xi_k}^c \right] \right], \\ R_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(jh) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \hat{\xi}_k^{c,s}((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^{c,s} \right] \left[ \hat{\eta}_l^{c,s}(nh) - \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} \right], \\ \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{c,s}(jh) &= \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \left[ \hat{\xi}_k^c((n+j)h) - \hat{m}_{\xi_k}^c \right] \left[ \hat{\eta}_l^s(nh) - \hat{m}_{\eta_k}^s \right]. \end{aligned}$$

Тут  $j$  – ціле число, а також

$$\hat{m}_{\xi_k}^{c,s} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \hat{\xi}_k^{c,s}(nh), \quad \hat{m}_{\eta_k}^{c,s} = \frac{1}{K} \sum_{n=0}^{K-1} \hat{\eta}_k^{c,s}(nh).$$

Для обчислення оцінок спектральних густин використовуємо корелограмний метод Блекмана–Т'юкі. Тоді

$$\hat{f}_{\xi_k}(\omega) = \frac{\Delta u}{4\pi} \sum_{r=0}^L \left[ \left[ \hat{R}_{\xi_k}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\xi_k}^s(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u + \hat{R}_{\xi_k}^{cs}(r\Delta u) \sin \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u),$$

$$\hat{f}_{\eta_k}(\omega) = \frac{\Delta u}{4\pi} \sum_{r=0}^{L-1} \left[ \left[ \hat{R}_{\eta_k}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\eta_k}^s(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u + \hat{R}_{\eta_k}^{cs}(r\Delta u) \sin \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u),$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \hat{f}_{\xi_k \eta_l}(\omega) &= \frac{\Delta u}{8\pi} \sum_{r=-L}^L \left[ \left[ \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^s(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{cs}(r\Delta u) - \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{sc}(r\Delta u) \right] \sin \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \hat{f}_{\xi_k \eta_l}(\omega) &= \frac{\Delta u}{8\pi} \sum_{r=-L}^L \left[ \left[ \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^c(r\Delta u) + \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^s(r\Delta u) \right] \sin \omega r \Delta u + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{sc}(r\Delta u) - \hat{R}_{\xi_k \eta_l}^{cs}(r\Delta u) \right] \cos \omega r \Delta u \right] k(r\Delta u), \end{aligned}$$

де  $k(u)$  – вікно Хеммінга.

Оцінка покомпонентної функції когерентності тоді набуває вигляду

$$\hat{\gamma}_{kl}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{\left[ \operatorname{Re} \hat{f}_{\xi_k \eta_k}(\omega) \right]^2 + \left[ \operatorname{Im} \hat{f}_{\xi_k \eta_k}(\omega) \right]^2 \right]^{1/2}}{\left[ \left| \hat{f}_{\xi_k}(\omega) \right| \left| \hat{f}_{\eta_k}(\omega) \right| \right]^{1/2}}.$$

Загальна схема обчислення покомпонентної функції когерентності наведена на рис. 1. Зауважимо, що параметри статистичної обробки вибирають на основі аналізу властивостей відповідних оцінок [3, 8].

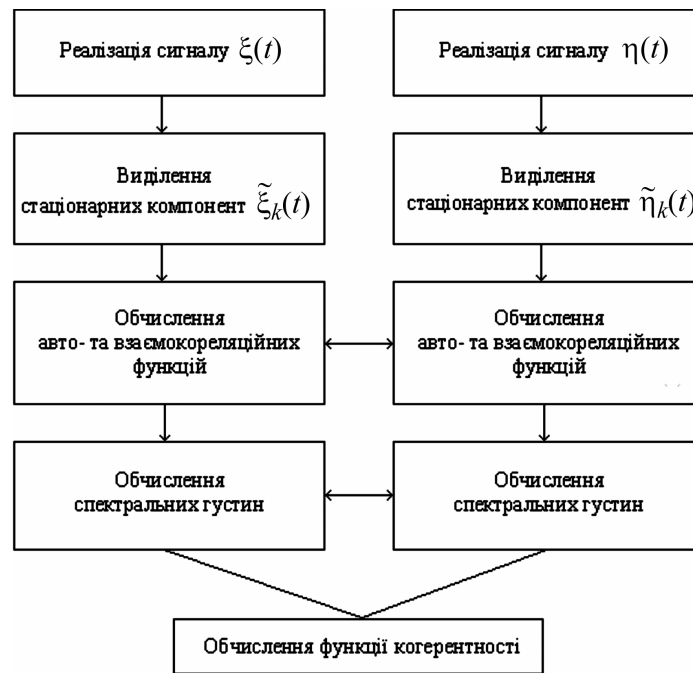


Рис. 1. Загальна схема обчислення покомпонентної функції когерентності.

Розглянутий метод верифіковано на основі реалізацій симульованих амплітудно-модульованих сигналів:

$$\xi(t) = \mu(t) \cos \omega_0 t, \quad \eta(t) = \nu(t) \cos \omega_0 t.$$

Стационарні компоненти таких сигналів мають вигляд

$$\xi_1(t) = \xi_{-1}(t) = \frac{1}{2} \mu(t), \quad \eta_1(t) = \eta_{-1}(t) = \frac{1}{2} \nu(t).$$

У цьому випадку

$$\gamma_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{|f_{\mu\nu}(\omega)|}{[f_{\mu}(\omega)f_{\nu}(\omega)]^{1/2}},$$

де  $f_{\mu}(\omega)$  і  $f_{\nu}(\omega)$  – спектральні густини потужності випадкових процесів  $\mu(t)$  і  $\nu(t)$ , а  $f_{\mu\nu}(\omega)$  – їх взаємоспектральна густина. Такий вигляд мають і функції когерентності  $\gamma_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  і  $\gamma_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ .

Взаємоспектральну густину сигналів визначають виразом

$$f_{\xi\eta}(\omega, t) = f_0^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega) e^{-i2\omega_0 t} + f_2^{(\xi\eta)}(\omega) e^{i2\omega_0 t},$$

при цьому

$$f_0^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) + f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega), \quad f_2^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega), \quad f_{-2}^{(\xi\eta)}(\omega) = f_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega).$$

Як бачимо, середньоквадратичне значення функції  $f_{\xi\eta}(\omega, t)$  визначається спектральними густинами  $f_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  і  $f_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ , а її періодичні зміни в часі – спектральними густинами  $f_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  і  $f_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$ . З цього випливає, що функції когерентності  $\gamma_{1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  і  $\gamma_{-1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  слід розглядати як характеристики взаємозв'язу

ності сигналів у стаціонарному наближенні, а функції когерентності  $\gamma_{-1,1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  і  $\gamma_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega)$  – як характеристики взаємозв’язаності нестационарних властивостей сигналів. У цьому випадку функції однакові, оскільки стаціонарні компоненти  $\xi_{\pm 1}(t)$  і  $\eta_{\pm 1}(t)$  формуються одними й тими ж модулюючими процесами  $\mu(t)$  і  $\nu(t)$ . Така властивість ПНВС названа спектральною надлишковістю [9]. Це означає, що з взаємоспектральними характеристиками модулюючих компонент пов’язана та ж інформація, що й з їх спектральними характеристиками. Однак, незважаючи на це, власне таку надлишковість можна ефективно використовувати під час розв’язування багатьох практичних задач [10].

Припустимо, що

$$R_{\mu}(u) = D_{\mu}e^{-\alpha_{\mu}|u|}, \quad R_{\nu}(u) = D_{\nu}e^{-\alpha_{\nu}|u|}, \quad R_{\mu\nu}(u) = D_{\mu\nu}e^{-\alpha_{\mu\nu}|u|}.$$

Тоді

$$f_{\mu}(\omega) = \frac{D_{\mu}\alpha_{\mu}}{\pi(\alpha_{\mu}^2 + \omega^2)}, \quad f_{\nu}(\omega) = \frac{D_{\nu}\alpha_{\nu}}{\pi(\alpha_{\nu}^2 + \omega^2)}, \quad f_{\mu\nu}(\omega) = \frac{D_{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}}{\pi(\alpha_{\mu\nu}^2 + \omega^2)}.$$

А звідси

$$\gamma_{1,-1}^{(\xi\eta)}(\omega) = \frac{D_{\mu\nu}\alpha_{\mu\nu}[(\alpha_{\mu}^2 + \omega^2)(\alpha_{\nu}^2 + \omega^2)]^{1/2}}{[D_{\mu}D_{\nu}\alpha_{\mu}\alpha_{\nu}]^{1/2}(\alpha_{\mu\nu}^2 + \omega^2)}. \quad (13)$$

Графіки отриманої функції когерентності для різних декрементів зникання кореляційних зв’язків показано на рис. 2. Для малих значень декрементів зникання функція когерентності швидко зменшується до нуля. Збільшення значень декрементів призводить до розширення області частот, де властивості нестационарності одного з сигналів впливають на властивості нестационарності іншого.

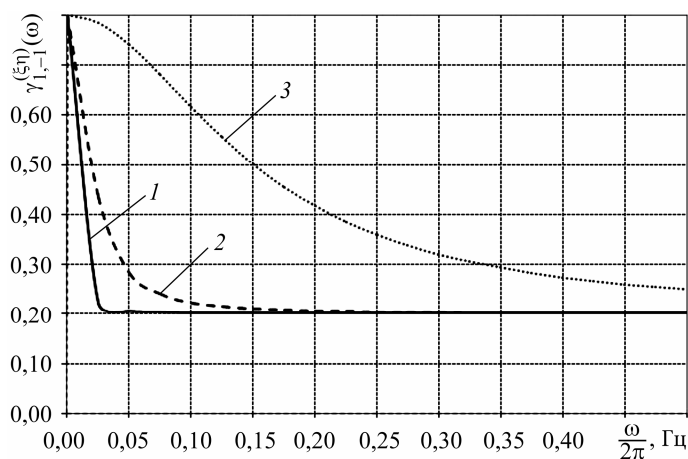


Рис. 2. Покомпонентна функція когерентності амплітудно-модульованих сигналів при  $D_{\mu} = D_{\nu} = 1$ ,  $D_{\mu\nu} = 0,4$ ,  $\alpha_{\mu} = \alpha_{\nu} = 0,02$ ,  $\alpha_{\mu\nu} = 0,01$  (1);  $\alpha_{\mu} = \alpha_{\nu} = 0,08$ ,  $\alpha_{\mu\nu} = 0,04$  (2);  $\alpha_{\mu} = \alpha_{\nu} = 0,6$ ,  $\alpha_{\mu\nu} = 0,3$  (3).

Графік (рис. 2) можна розглядати як тестовий під час верифікації розглянутого методу для визначення покомпонентної функції когерентності на основі експериментальних даних. Така функція визначається взаємоспектральними характеристиками окремих випадкових процесів, які модулюють несучі гармоніки ПНВС. Порівняно з інтегральною функцією когерентності вона дає змогу деталь-

ніше проаналізувати взаємозв'язаність ПНВС, уникаючи при цьому впливу переносу частот, який виникає під час модуляції.

1. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. – М.: Мир, 1985. – 546 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Применения корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
3. Яворський І. М. Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: Фіз.-мех. ін-т НАН України, 2013. – 804 с.
4. Яворський І. М., Кравець І. Б., Юзефович Р. М. Взаємозв'язані періодично корельовані випадкові процеси // Відбір і обробка інформації. – 2011. – № 34 (110). – С. 69–77.
5. Функция когерентности взаимосвязанных периодически нестационарных случайных сигналов / И. Н. Яворский, Р. М. Юзефович, И. И. Мацько, З. Закжевски // Изв. вузов. Радиоэлектроника. – 2016. – 59, № 3. – С. 40–51.
6. Розробка вібродіагностичної системи для визначення дефектів промислового обладнання з використанням методів нестационарної статистичної обробки вібраційних та акустичних коливань / І. М. Яворський, Р. М. Юзефович, І.Й. Мацько, І. Б. Кравець, І. Г. Стецько // Техническая диагностика и неразрушающий контроль. – 2015. – № 4. – С. 36–41.
7. Linear filtration methods for statistical analysis of periodically correlated random processes. Part II : Harmonic Series Representation / I. Yavorskyj, I. Kravets, I. Isayev, E. Gajecka // Signal Processing. – 2011. – 91. – P. 2506–2519.
8. Яворський І. М., Ісаєв І. Ю., Кравець І. Б. Оцінювання ймовірних характеристик вібраційних сигналів на основі виділення стаціонарних компонентів // Відбір і обробка інформації. – 2008. – № 28(104). – С. 30–38.
9. Gardner W. A. Exploitation of Spectral Redundancy in Cyclostationarity Signals // IEEE SP Magazine. – 1991. – P. 14–36.
10. Cyclostationarity in Communications and Signal Processing / Ed.: W. A. Gardner. – New York: IEEE Press., 1994. – 504 p.

Одержано 23.06.2016