УДК 621.391:519.22

МНК-ГАРМОНІЧНИЙ АНАЛІЗ БІПЕРІОДИЧНО НЕСТАЦІОНАРНИХ ВИПАДКОВИХ ВІБРАЦІЙНИХ СИГНАЛІВ

І. М. Яворський [1, 2], Р. М. Юзефович [1, 3], О. Ю. Дзерин [1]

[1] Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів;

[2] Інститут телекомунікації Технологічно-природничого університету, Бидгощ, Польща;

[3] Національний університет “Львівська політехніка”

E-mail: roman.yuzefovych@gmail.com

Проаналізовано оцінки параметрів детермінованої складової біперіодично нестаціонарного вібраційного сигналу, які отримують методом найменших квадратів (МНК). Показано, що МНК-оцінювання дає можливість уникнути ефектів просочування. Отримані умови слушності оцінок. Виведені формули для дисперсій оцінок, що описують залежність останніх від довжини реалізації та кореляційних компонентів сигналу. Результати конкретизовані для квадратурної моделі сигналу.

Ключові слова: *біперіодично нестаціонарний вібраційний сигнал, метод найменших квадратів, оцінки параметрів детермінованої складової, незміщеність, слушність.*

LSM-HARMONIC ANALYSIS OF BI-PERIODIC NONSTATIONARY VIBRATION SIGNALS

I. M. Javorskyj [1, 2], R. M. Yuzefovych [1, 3], O. Y. Dzeryn [1]

[1] H. V. Karpenko Physico-Mechanical Institute of the NAS of Ukraine, Lviv;

[2] Telecommunication Institute of University of Technology and Life Science, Bydgoszcz, Poland;

[3] Lviv Polytechnic National University

The estimators of parameters of bi-periodic nonstationary vibration signal deterministic part, obtained with using the least squares method (LSM), are analyzed. LSM estimation allows avoiding aliasing effects. The formulas for estimators of variance and bias, which describe their dependences on realization length and signal covariance components, are derived. The results are specified for the quadrature model of the signal. LSM has shown its efficiency for separation of harmonics with close frequencies, so it should be considered as the main method for vibration signals analysis. It is shown that its usage allows one to obtain unbiased estimators of bi-periodic nonstationary vibration signal deterministic part regardless of realization length and harmonic frequencies.

Key words: *bi-periodic nonstationary vibration signal, least squares method, estimators of deterministic part parameters, unbiasedness, and consistency.*

Під час дослідження властивостей стохастичних коливань різного фізичного походження часто зустрічаються ситуації, коли повторюваності різних періодів не тільки накладаються, а й взаємодіють між собою. Навіть під час аналізу найпростіших механічних обертових вузлів практично завжди маємо справу з елементами з різною швидкістю обертання. А це може призвести до присутності у вібраційному сигналі гармонік з відповідними частотами. Серед основних частот збудження, наприклад, вібрацій підшипника кочення, є частоти обертання валу, сепаратора, тіл обертання. Поява розподілених дефектів (порушення співвісності валів, дисбаланс, перекоси зовнішнього чи внутрішнього кілець) проявляється у стохастичній амплітудній і фазовій модуляціях гармонік обертання валу. Розподілені дефекти, розвиваючись, можуть спричинити появу локальних (каверн, відшарувань, тріщин), які викликають у сигналах вібрацій модуляції гармонік вже з частотами сепаратора, тіл обертання. Як правило, обидва типи модуляцій є взаємозалежними. Проаналізувати кореляційну та взаємокореляційну структуру кожної з модуляцій можна на основі імовірнісної моделі вібрацій у вигляді біперіодично корельованих випадкових процесів (БПКВП) [1–3]. Для оцінювання характеристик БПКВП на основі експериментальних результатів можна використати як когерентний, так і компонентний методи [4, 5], однак за близьких значень комбінаційних частот обидва методи можуть призводити до значних систематичних похибок, зумовлених ефектами просочування [1–3]. Таких похибок можна уникнути, якщо оцінювати за допомогою методу найменших квадратів (МНК). Аналізу властивостей МНК-оцінок параметрів детермінованої складової і присвячена ця стаття.

Математичне сподівання $m(t)=E\xi(t)$, де E – оператор усереднення за розподілом і кореляційну функцію $b(t,u)=E\,\overset{\circ}{\xi}(t)\overset{\circ}{\xi}(t+u)$, $\overset{\circ}{\xi}(t)=\xi(t)-m(t)$ БПКВП можна подати рядами

$$m(t)=\sum_{l,k\in Z} m_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t}\,,\quad \Lambda_{kl}=k\frac{2\pi}{T_1}+l\frac{2\pi}{T_1}\,, \tag{1}$$

$$b(t,u)=\sum_{l,k\in Z} B_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t}\,, \tag{2}$$

де T_1 і T_2 – додатні величини, які називають періодами бінестаціонарності. Надалі кількість гармонік з основними частотами Λ_{k0} і Λ_{0l}, а також комбінаційними Λ_{kl} вважатимемо скінченною і покладемо, що $k=\overline{-N_1,N_1}$ і $l=\overline{-N_1,N_1}$ для математичного сподівання, а для кореляційної функції $k=\overline{-N_2,N_2}$ і $l=\overline{-N_2,N_2}$. Очевидно, що $\Lambda_{-k,-l}=-\Lambda_{kl}$ і $m_{-k,-l}=\overline{m}_{k,l}$, а також $B_{-k,-l}(u)=\overline{B_{k,l}(u)}$, “¯” – знак спряження.

Коефіцієнти Фур’є рядів (1) і (2) теоретично визначають за граничними співвідношеннями

$$m_{kl}=\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} m(t)\,e^{-i\Lambda_{kl}}dt\,, \tag{3}$$

$$B_{kl}=\lim_{\theta\to\infty}\frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} b(t,u)\,e^{-i\Lambda_{kl}}dt\,.$$

Під час обробки експериментальних результатів маємо справу з реалізаціями, заданими на скінченному інтервалі. Побудована за аналогією до формули (3) статистика для оцінювання коефіцієнтів m_{kl} тоді має вигляд

$$\hat{m}_{kl}=\frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta}\xi(t)\,e^{-i\Lambda_{kl}t}dt\,. \tag{4}$$

Її математичне сподівання визначають за виразом

$$E\hat{m}_{kl}=\frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta}E\xi(t)\,e^{-i\Lambda_{kl}t}dt=m_{kl}+\sum_{\substack{r,s=-N_1\\ r\neq k\wedge s\neq l}}^{N_1} m_{rs}\varphi(\Lambda_{r-k,s-l}\theta)\,, \tag{5}$$

де

$$\varphi(\Lambda_{r-k,s-l}\theta)=\frac{\sin\Lambda_{r-k,s-l}\theta}{\Lambda_{r-k,s-l}\theta}.$$

З формули (5) випливає, що статистика (4) є зміщеною, оскільки на величину m_{kl} накладаються коефіцієнти інших номерів. Величину такого накладання визначають функцією $\varphi(\Lambda_{r-k,s-l}\theta)$, яка залежить від різниці комбінаційних частот. Накладання буде відсутнє, якщо θ вибирати так, щоб $\theta=M_1T_1=M_2T_2$, де M_1 і M_2 – цілі числа. Тоді $\varphi(\Lambda_{r-k,s-l}\theta)=0\ \forall k,l\in[-N_1,N_1]$. Однак забезпечити виконання цієї умови під час аналізу сигналів вібрацій практично неможливо. Тому розглянемо метод оцінювання, який ґрунтується на мінімізації функціонала

$$F\left(\hat m_0,\hat m_{11}^c,\ldots,\hat m_{kl}^c,\ldots,\hat m_{N_1N_1}^s\right)=\int_0^\theta\left[\xi(t)-\hat m(t)\right]^2dt, \tag{6}$$

де

$$\hat m(t)=\sum_{k,l=-N_1}^{N_1}\hat m_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t},\quad \hat m_{kl}=\frac{1}{2}\left[\hat m_{kl}^c-i\hat m_{kl}^s\right].$$

Для подальшого аналізу подамо математичне сподівання БПКВП і його оцінку у дійсній формі. Враховуючи, що $m_{-k,-l}=\overline{m}_{kl}$, отримуємо:

$$m(t)=\sum_{k=-N_1}^{-1}\left[\sum_{l=-N_1}^{-1}m_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t}+\sum_{l=0}^{N_1}m_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t}\right]+\sum_{k=0}^{N_1}\left[\sum_{l=-N_1}^{-1}m_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t}+\sum_{l=0}^{N_1}m_{kl}e^{i\Lambda_{kl}t}\right]=$$

$$=m_{00}+\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_1}(m_{kl}^c\cos\Lambda_{kl}t+m_{kl}^s\sin\Lambda_{kl}t)+\sum_{l=0}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}(m_{k,-l}^c\cos\Lambda_{k,-l}t+m_{k,-l}^s\sin\Lambda_{k,-l}t). \tag{7}$$

Математичне сподівання БПКВП у загальному випадку, як бачимо, містить адитивні складові з частотами $k\frac{2\pi}{T_1}$, $l\frac{2\pi}{T_2}$, $k,l\in[1,N_1]$ і комбінаційні гармоніки з частотами $k\frac{2\pi}{T_1}\pm l\frac{2\pi}{T_2}$. Подавши оцінку $\hat m(t)$ подібно до (7), функціонал (6) перепишемо у формі

$$F\left(\hat m_{00},\hat m_{kl}^c,m_{kl}^s,\hat m_{k,-l}^c,\hat m_{k,-l}^s\right)=\int_0^\theta\left[\xi(t)-\left[\hat m_{00}+\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_1}\left(\hat m_{kl}^c\cos\Lambda_{kl}t+\hat m_{kl}^s\sin\Lambda_{kl}t\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{l=0}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}\left(\hat m_{k,-l}^c\cos\Lambda_{k,-l}t+\hat m_{k,-l}^s\sin\Lambda_{k,-l}t\right)\right]\right]^2dt. \tag{8}$$

Оцінки величин $\hat m_{00}$, $\hat m_{kl}^c$, m_{kl}^s, $\hat m_{k,-l}^c$, $\hat m_{k,-l}^s$ знаходимо, розв'язуючи систему лінійних рівнянь, яка забезпечує необхідні умови для існування мінімуму функціонала (8):

$$\frac{\partial F}{\partial\hat m_{00}}=0,\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial\hat m_{kl}^c}=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\hat m_{kl}^s}=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}k=\overline{0,N_1},\\ l=\overline{1,N_1},\end{array}\qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial F}{\partial\hat m_{k,-l}^c}=0\\[2ex]\dfrac{\partial F}{\partial\hat m_{k,-l}^s}=0\end{array}\right\}\begin{array}{l}k=\overline{1,N_1},\\ l=\overline{0,N_1}.\end{array}$$

Така система має вигляд

$$\theta\hat{m}_{00}+\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_1}\left[\hat{m}_{kl}^{c}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{kl}tdt+\hat{m}_{kl}^{s}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{kl}tdt\right]+$$

$$+\sum_{l=0}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}\left[\hat{m}_{k,-l}^{c}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{k,-l}tdt+\hat{m}_{k,-l}^{s}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{k,-l}tdt\right]=\int_0^{\theta}\xi(t)\,dt\,,$$

$$\hat{m}_{00}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{rs}tdt+\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_1}\hat{m}_{kl}^{c}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{kl}t\cos\Lambda_{rs}tdt+\hat{m}_{kl}^{s}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{kl}t\cos\Lambda_{rs}tdt+$$

$$+\sum_{l=0}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}\Big[\hat{m}_{k,-l}^{c}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{k,-l}t\cos\Lambda_{rs}tdt+\hat{m}_{k,-l}^{s}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{kl}t\cos\Lambda_{rs}tdt=\int_0^{\theta}\xi\left(t\right)\cos\Lambda_{rs}tdt\,,$$

$$\hat{m}_{00}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{rs}tdt+\sum_{k=0}^{N_1}\sum_{l=1}^{N_1}\hat{m}_{kl}^{s}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{kl}t\sin\Lambda_{rs}tdt+\hat{m}_{k,-l}^{s}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{kl}t\sin\Lambda_{rs}tdt+$$

$$+\sum_{l=0}^{N_1}\sum_{k=1}^{N_1}\Big[\hat{m}_{k,-l}^{c}\int_0^{\theta}\cos\Lambda_{k,-l}\sin\Lambda_{rs}tdt+\hat{m}_{k,-l}^{s}\int_0^{\theta}\sin\Lambda_{kl}t\sin\Lambda_{rs}tdt=\int_0^{\theta}\xi\left(t\right)\sin\Lambda_{rs}tdt\,.$$

У двох останніх рівняннях $r,s=\overline{-N_1,N_1}$, $r=s\neq 0$. Аналіз розв’язків системи рівнянь, записаній у такій формі, є громіздким, тому зробимо перепозначення як частот гармонічних складових, так і їхніх амплітуд. У табл. 1 наведені частоти гармонічних складових, які формують оцінку математичного сподівання, а в табл. 2 – їх перепозначені відповідники.

Таблиця 1. Частоти гармонічних складових оцінки $\hat{m}(t)$

$\Lambda_{N_1,-N_1}$	$\Lambda_{N_1,-N_1+1}$	…	$\Lambda_{N_1,-1}$	$\Lambda_{N_1 0}$	$\Lambda_{N_1 1}$	$\Lambda_{N_1 2}$	…	$\Lambda_{N_1 N_1}$
$\Lambda_{N_1-1,-N_1}$	$\Lambda_{N_1-1,-N_1+1}$	…	$\Lambda_{N_1-1,-1}$	$\Lambda_{N_1-1,0}$	$\Lambda_{N_1-1,1}$	$\Lambda_{N_1-1,2}$	…	Λ_{N_1-1,N_1}
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$\Lambda_{2,-N_1}$	$\Lambda_{2,-N_1+1}$	…	$\Lambda_{2,-1}$	$\Lambda_{2,0}$	$\Lambda_{2,1}$	$\Lambda_{2,2}$	…	Λ_{2,N_1}
$\Lambda_{1,-N_1}$	$\Lambda_{1,-N_1+1}$	…	$\Lambda_{1,-1}$	$\Lambda_{1,0}$	$\Lambda_{1,1}$	$\Lambda_{1,2}$	…	Λ_{1,N_1}
					$\Lambda_{0,1}$	$\Lambda_{0,2}$	…	Λ_{0,N_1}

Таблиця 2. Перепозначені частоти оцінки $\hat{m}(t)$

$\omega_{2N_1(N_1+1)}$	…	$\omega_{N_1(2N_1+1)}$	$\omega_{N_1(2N_1+1)}$	$\omega_{N_1^2+1}$	$\omega_{N_1^2+2}$	…	$\omega_{N_1^2+N_1-1}$	$\omega_{N_1(N_1+1)}$
$\omega_{N_1(2N_1+1)-1}$	…	$\omega_{2N_1^2}$	$\omega_{2N_1^2-1}$	$\omega_{(N_1-1)N_1+1}$	$\omega_{(N_1-1)N_1+2}$	…	$\omega_{N_1^2-1}$	$\omega_{N_1^2}$
…			…	…	…	…	…	…
$\omega_{N_1(N_1+3)+2}$	…	$\omega_{N_1(N_1+2)+2}$	$\omega_{N_1(N_1+2)+2}$	ω_{2N_1+1}	ω_{2N_1+2}	…	ω_{3N_1-1}	ω_{3N_1}
$\omega_{N_1(N_1+2)+1}$	…	$\omega_{N_1(N_1+1)+2}$	$\omega_{N_1(N_1+1)+1}$	ω_{N_1+1}	ω_{N_1+2}	…	ω_{2N_1-1}	ω_{2N_1}
				ω_1	ω_2	…	ω_{N_1-1}	ω_{N_1}

Так, наприклад, комбінаційній частоті $\Lambda_{N_1 N_1} = N_1\left(\frac{2\pi}{T_1}+\frac{2\pi}{T_2}\right)$ відповідає частота $\omega_{N_1(N_1+1)}$, гармоніка з цією частотою має комплексну амплітуду $m_{N_1(N_1+1)} = = \frac{1}{2}\left[m^c_{N_1(N_1+1)} - i\hat{m}^s_{N_1(N_1+1)}\right]$. Найвищою частотою в спектрі є комбінаційна частота $\omega_{2N_1(N_1+1)} = \Lambda_{N_1,-N_1} = N_1\left(\frac{2\pi}{T_1}-\frac{2\pi}{T_2}\right)$, комплексна амплітуда відповідної гармоніки дорівнює $m_{2N_1(N_1+1)}$. Функціонал (8) після таких перепозначень набуває вигляду

$$F\left(\hat{m}_0, \hat{m}_1^c, ..., \hat{m}_L^c, \hat{m}_1^s, ..., \hat{m}_L^s\right) = \int_0^\theta \left[\xi(t) - \left(\hat{m}_0 + \sum_{r=1}^{L}\left(\hat{m}_r^c \cos\omega_r t + \hat{m}_r^s \sin\omega_r t\right)\right)\right]^2 dt ,$$

де $L = 2N_1(N_1+1)$. Необхідні умови для існування його мінімуму

$$\frac{\partial F}{\partial \hat{m}_0} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{m}_r^c} = 0 , \quad \frac{\partial F}{\partial \hat{m}_r^s} = 0 , \quad r = \overline{1, L} ,$$

тепер переписуємо в такій формі:

$$\hat{m}_0\theta + \sum_{k=1}^{L}\left[\hat{m}_k^c \int_0^\theta \cos\omega_k t dt + \hat{m}_k^s \int_0^\theta \sin\omega_k t dt\right] = \int_0^\theta \xi(t)\, dt ,$$

$$\hat{m}_0 \int_0^\theta \cos\omega_r t dt + \sum_{k=1}^{L}\left[\hat{m}_k^c \int_0^\theta \cos\omega_k t \cos\omega_r t dt + \hat{m}_k^s \int_0^\theta \sin\omega_k t \cos\omega_r t dt = \int_0^\theta \xi(t)\cos\omega_r t dt ,\right.$$

$$\hat{m}_0 \int_0^\theta \sin\omega_r t dt + \sum_{k=1}^{L}\left[\hat{m}_k^c \int_0^\theta \cos\omega_k t \sin\omega_r t dt + \hat{m}_k^s \int_0^\theta \sin\omega_k t \sin\omega_r t dt = \int_0^\theta \xi(t)\sin\omega_r t dt .\right. \quad (9)$$

Введемо позначення

$$c_{rk}(\theta) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \cos\omega_r t \cos\omega_k t dt ,$$

$$s_{rk}(\theta) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \sin\omega_r t \sin\omega_k t dt ,$$

$$a_{rk}(\theta) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \cos\omega_r t \sin\omega_k t dt ,$$

а також

$$\tilde{m}_0 = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\, dt , \quad \tilde{m}_k^c = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\cos\omega_r t dt , \quad \tilde{m}_k^s = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta \xi(t)\sin\omega_r t dt$$

і систему рівнянь (9) запишемо в матричній формі

$$D\hat{m} = \tilde{m} , \quad (10)$$

де

$$\hat{m} = \left[\hat{m}_0, \hat{m}_1^c, ..., \hat{m}_L^c, \hat{m}_1^s, ..., \hat{m}_L^s\right]^T ,$$

$$\tilde{m} = \left[\tilde{m}_0, \tilde{m}_1^c, ..., \tilde{m}_L^c, \tilde{m}_1^s, ..., \tilde{m}_L^s \right]^T,$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0L} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0L} \\ c_{10} & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1L} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{L0} & c_{L1} & c_{L2} & \cdots & c_{LL} & a_{L1} & a_{L2} & \cdots & a_{LL} \\ a_{01} & a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{L1} & s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1L} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{0L} & a_{1L} & a_{2L} & \cdots & a_{LL} & s_{L1} & s_{L2} & \cdots & s_{LL} \end{bmatrix} = \left[d_{rk} \right], \quad \begin{matrix} r = \overline{1, 2L+1}, \\ k = \overline{1, 2L+1}. \end{matrix} \quad (11)$$

Розв’язок матричного рівняння (10) має вигляд

$$\hat{m} = D^{-1}\tilde{m} = \frac{[D_{rk}]^T}{|D|}\tilde{m}, \quad (12)$$

де $|D|$ – визначник матриці (11), а $[D_{rk}]^T$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень:

$$\left[D_{rk} \right]^T = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{2L+1,1} \\ D_{12} & D_{22} & \cdots & D_{2L+1,2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{1,2L+1} & D_{2,2L+1} & \cdots & D_{2L+1,2L+1} \end{bmatrix}.$$

Для математичного сподівання матриці оцінок (12) маємо:

$$E\tilde{m} = \frac{1}{|D|} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & D_{31} & \cdots & D_{2L+1,1} \\ D_{12} & D_{22} & D_{32} & \cdots & D_{2L+1,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ D_{1,2L} & D_{2,2L} & D_{3,2L} & \cdots & D_{2L+1,2L} \\ D_{1,2L+1} & D_{2,2L+1} & D_{3,2L+1} & \cdots & D_{2L+1,2L+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E\tilde{m}_0 \\ E\tilde{m}_1^c \\ \vdots \\ E\tilde{m}_L^c \\ E\tilde{m}_1^s \\ \vdots \\ E\tilde{m}_L^s \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|D|} \begin{bmatrix} E\tilde{m}_0 D_{11} + \sum_{r=1}^{L} D_{r+1,1} E\tilde{m}_r^c + \sum_{r=1}^{L} D_{L+r+1} E\tilde{m}_r^s \\ E\tilde{m}_0 D_{12} + \sum_{r=1}^{L} D_{r+1,2} E\tilde{m}_r^c + \sum_{r=1}^{L} D_{L+r+2} E\tilde{m}_r^s \\ \vdots \\ E\tilde{m}_0 D_{1,L+1} + \sum_{r=1}^{L} D_{r+1,L+1} E\tilde{m}_r^c + \sum_{r=1}^{L} D_{L+r+1,L+1} E\tilde{m}_r^s \\ E\tilde{m}_0 D_{1,L+2} + \sum_{r=1}^{L} D_{r+1,L+2} E\tilde{m}_r^c + \sum_{r=1}^{L} D_{L+r+1,L+2} E\tilde{m}_r^s \\ \vdots \\ E\tilde{m}_0 D_{1,2L+1} + \sum_{r=1}^{L} D_{r+1,2L+1} E\tilde{m}_r^c + \sum_{r=1}^{L} D_{L+r+1,2L+1} E\tilde{m}_r^s \end{bmatrix}.$$

Враховуючи, що

$$m(t) = m_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(m_k^c \cos k\omega_k t + m_k^s \sin k\omega_k t \right),$$

знаходимо

$$E\tilde{m}_0 = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} m(t)dt = m_0 d_{11} + \sum_{k=1}^{L} \left(m_k^c d_{1,k+1} + m_k^s d_{1,L+k+1} \right),$$

$$E\tilde{m}_r^c = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} m(t)\cos\omega_r t dt = m_0 d_{r+1,1} + \sum_{k=1}^{L} \left(m_k^c d_{r+1,k+1} + m_k^s d_{r+1,r+k+1} \right),$$

$$E\tilde{m}_r^s = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta} m(t)\sin\omega_r t dt = m_0 d_{L+r+1} + \sum_{k=1}^{L} \left(m_k^c d_{L+r+1,k+1} + m_k^s d_{L+r+1,L+k+1} \right).$$

Тоді

$$E\hat{m}_0 = \frac{1}{|D|}\left[m_0 \sum_{j=1}^{2L+1} d_{k1} D_{k1} + \sum_{r=1}^{L}\left[m_r^c \sum_{k=1}^{2L+1} d_{k,r+1} D_{k1} + m_r^s \sum_{k=1}^{2L+1} d_{k,r+L+1} D_{k1} \right]\right], \tag{13}$$

$$E\hat{m}_k^c = \frac{1}{|D|}\left[m_0 \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j1} D_{j,k+1} + \sum_{r=1}^{L}\left[m_r^c \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j,r+1} D_{j,k+1} + m_r^s \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j,L+r+1} D_{j,k+1} \right]\right], \tag{14}$$

$$E\hat{m}_k^s = \frac{1}{|D|}\times$$
$$\times\left[m_0 \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j1} D_{j,L+k+1} + \sum_{r=1}^{L}\left[m_r^c \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j,r+1} D_{j,L+k+1} + m_r^s \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j,L+r+1} D_{j,L+k+1} \right]\right]. \tag{15}$$

Прийнявши до уваги, що

$$\sum_{r=1}^{2L+1} d_{rk} D_{rj} = \begin{cases} |D|, k = j, \\ 0, \quad k \neq j, \end{cases}$$

робимо висновок, що у формулі (13) відрізняється від нуля тільки перша сума, у формулі (14) – складова першої подвійної суми, для якої $r = k$, а у (15) – складова другої подвійної суми, для якої також $r = k$, при цьому у всіх випадках ці суми дорівнюють визначнику $|D|$:

$$\sum_{k=1}^{2L+1} d_{k1} D_{k1} = |D|, \quad \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j,k+1} D_{j,k+1} = |D|, \quad \sum_{j=1}^{2L+1} d_{j,l+k+1} D_{j,L+k+1} = |D|.$$

Звідси $E\hat{m}_0 = m_0$, $E\hat{m}_k^c = m_k^c$, $E\hat{m}_k^s = m_k^s$, а це означає, що оцінка математичного сподівання БПКВП

$$\hat{m}(t) = \hat{m}_0 + \sum_{k=1}^{L} \left(\hat{m}_k^c \cos\omega_k t + \hat{m}_k^s \sin\omega_k t \right),$$

коли оцінки величин m_0, m_k^c і m_k^s, $k = \overline{1,L}$ знаходять за допомогою методу найменших квадратів, тобто на основі мінімізації функціонала (8), є незміщеною.

Знайдемо тепер дисперсію такої оцінки. Для цього оцінки амплітуд подамо у вигляді

$$\hat{m}_0 = \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\tilde{m}_l D_{l+1,1},$$

$$\hat{m}_k = \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\tilde{m}_l D_{l+1,k+1},$$

тоді

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\tilde{m}_l D_{l+1,1} + \sum_{r=1}^{L}\left[\frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\tilde{m}_l D_{l+1,\mathrm{r}+1}\cos\omega_r t + \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\tilde{m}_l D_{l+1,\mathrm{r+L}+1}\sin\omega_r t\right] =$$

$$= \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\tilde{m}_l f_l(t),$$

де

$$f_l(t) = D_{l+1,1} + \sum_{r=1}^{L}\left[D_{l+1,r+1}\cos\omega_r t + D_{l+1,r+L+1}\sin\omega_r t\right].$$

Для дисперсії отримуємо:

$$D\left[\hat{m}(t)\right] = E\left[\hat{m}(t) - E\hat{m}(t)\right]^2 = \frac{1}{|D|^2}\sum_{l,k=0}^{2L} R_{\tilde{m}_l\tilde{m}_k} f_l(t) f_k(t). \quad (16)$$

Тут враховано, що

$$\hat{m}(t) - E\hat{m}(t) = \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}[\tilde{m}_l - E\tilde{m}_l]\, f_l(t) = \frac{1}{|D|}\sum_{l=0}^{2L}\overset{\circ}{\tilde{m}}_l\, f_l(t),$$

де

$$\overset{\circ}{\tilde{m}}_0 = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\overset{\circ}{\xi}(t)\,dt, \quad \overset{\circ}{\tilde{m}}{}_k^c = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\overset{\circ}{\xi}(t)\cos\omega_k t dt, \quad \overset{\circ}{\tilde{m}}{}_k^s = \frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\overset{\circ}{\xi}(t)\sin\omega_k t dt.$$

У вираз (16) входять як дисперсії випадкових величин $\tilde{m}_0$, $\tilde{m}_k^c$ і $\tilde{m}_k^s$, так і всі можливі кореляції між ними. Знайдемо формули для кожної з цих характеристик. Для дисперсії оцінки $\tilde{m}_0$ маємо:

$$D\left[\tilde{m}_0\right] = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta} b(t, s-t)\,dtds = \frac{1}{\theta^2}\left[\int_{-\theta}^{0}\int_{-u}^{\theta} b(t,u)\,dtdu + \int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u} b(t,u)\,dtdu\right] =$$

$$= \frac{2}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u} b(t,u)\,dtdu.$$

Кореляції між оцінками $\tilde{m}_0$ і $\tilde{m}_k^c$ та $\tilde{m}_k^s$ визначають за формулами

$$R_{\tilde{m}_k^c\tilde{m}_0} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta} b(t,s-t)\cos\omega_k t dtds = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u} b(t,u)\left[\cos\omega_k(t+u) + \cos\omega_k t\right] dtdu,$$

$$R_{\tilde{m}_k^s\tilde{m}_0} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta} b(t,s-t)\sin\omega_k t dtds = \frac{1}{\theta^2}\int_0^{\theta}\int_0^{\theta-u} b(t,u)\left[\sin\omega_k(t+u) + \sin\omega_k t\right] dtdu.$$

Взявши до уваги подання (2), отримуємо:

$$D\left[\tilde{m}_0\right]=\frac{2}{\theta}\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}\int_0^{\theta}B_{kl}(u)\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{kl}t}dt\right]du\,, \tag{17}$$

$$R_{\tilde{m}_k^c\tilde{m}_0}=\frac{1}{\theta}\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}\int_0^{\theta}B_{kl}(u)\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{kl}t}\left[\cos\omega_k(t+u)+\cos\omega_k t\right]dt\right]du\,, \tag{18}$$

$$R_{\tilde{m}_k^s\tilde{m}_0}=\frac{1}{\theta}\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}\int_0^{\theta}B_{kl}(u)\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{kl}t}\left[\sin\omega_k(t+u)+\sin\omega_k t\right]dt\right]du\,. \tag{19}$$

Після подібних перетворень для кореляцій $\tilde{m}_k^{c,s}$ і $\tilde{m}_l^{c,s}$ знаходимо:

$$R_{\tilde{m}_k^c\tilde{m}_l^c}=\frac{1}{\theta}\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}\int_0^{\theta}B_k(u)\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{kl}t}\left[\cos\omega_k\left(t+u\right)\cos\omega_l t+\cos\omega_k t\cos\omega_l t\right]dt\right]du\,, \tag{20}$$

$$R_{\tilde{m}_k^s\tilde{m}_l^s}=\frac{1}{\theta}\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}\int_0^{\theta}B_k(u)\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{kl}t}\begin{bmatrix}\sin\omega_k(t+u)\sin\omega_l t+\\+\sin\omega_k t\sin\omega_l(t+u)\end{bmatrix}dt\right]du\,, \tag{21}$$

$$R_{\tilde{m}_k^c\tilde{m}_l^s}=\frac{1}{\theta}\sum_{k,l=-N_2}^{N_2}\int_0^{\theta}B_k(u)\left[\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{kl}t}\begin{bmatrix}\cos\omega_k(t+u)\sin\omega_l t+\\+\cos\omega_k t\sin\omega_l(t+u)\end{bmatrix}dt\right]du\,. \tag{22}$$

З формул (17)–(22) випливає, що за виконання умови

$$\lim_{|u|\to\infty}B_{kl}(u)=0\ \forall\, k\,,\quad l\in[-N_2,N_2]\,,$$

дисперсії та кореляції між оцінками $\tilde{m}_0$, $\tilde{m}_k^c$ та $\tilde{m}_k^s$ прямують до нуля, коли $0\to\theta$, а це означає, що МНК-оцінка математичного сподівання БПКВП є слушною.

Конкретизуємо отримані вище результати для квадратурної моделі БПКВП, коли

$$\xi(t)=\xi_c(t)\cos\Lambda_{11}t+\xi_s(t)\sin\Lambda_{11}t \tag{23}$$

та $E\xi_c(t)=m_c$, $E\xi_s(t)=m_s$. Функціонал для оцінювання математичного сподівання

$$m(t)=m_c\cos\Lambda_{11}t+m_s\sin\Lambda_{11}t \tag{24}$$

тоді має вигляд

$$F\left(\hat{m}_c,\hat{m}_s\right)=\int_0^{\theta}\left[\xi\left(t\right)-\left(\hat{m}_c\cos\Lambda_{11}t+\hat{m}_s\sin\Lambda_{11}t\right)\right]^2dt\,.$$

Оцінки величин m_c і m_s знаходять як розв'язки системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases}\hat{m}_c c_{11}\left(\theta\right)+\hat{m}_s a_{11}\left(\theta\right)=\tilde{m}_c,\\ \hat{m}_c a_{11}\left(\theta\right)+\hat{m}_s s_{11}\left(\theta\right)=\tilde{m}_s.\end{cases}$$

Після перетворень отримуємо:

$$\hat{m}_c=\frac{\tilde{m}_c s_{11}(\theta)-\tilde{m}_s a_{11}(\theta)}{c_{11}(\theta)s_{11}(\theta)-a_{11}{}^2(\theta)}\,,$$

$$\hat{m}_s=\frac{\tilde{m}_s c_{11}(\theta)-\tilde{m}_c a_{11}(\theta)}{c_{11}(\theta)s_{11}(\theta)-a_{11}{}^2(\theta)}\,.$$

Оскільки

$$E\tilde{m}_c = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta m(t)\cos\Lambda_{11}tdt = m_c c_{11}(\theta) + m_s a_{11}(\theta),$$

$$E\tilde{m}_s = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta m(t)\sin\Lambda_{11}tdt = m_c a_{11}(\theta) + m_s s_{11}(\theta),$$

то

$$E\hat{m}_c = \frac{\left[m_c c_{11}(\theta) - m_s a_{11}(\theta)\right]s_{11}(\theta) - \left[m_c a_{11}(\theta) - m_s s_{11}(\theta)\right]a_{11}(0)}{c_{11}(\theta)s_{11}(\theta) - a_{11}{}^2(\theta)} = m_c,$$

$$E\hat{m}_s = \frac{\left[m_c a_{11}(\theta) + m_s s_{11}(\theta)\right]c_{11}(\theta) - \left[m_c c_{11}(\theta) + m_s a_{11}(\theta)\right]a_{11}(0)}{c_{11}(\theta)s_{11}(\theta) - a_{11}{}^2(\theta)} = m_s.$$

Отже, МНК-оцінка математичного сподівання (24) випадкового процесу (23) є незміщеною.

Перепишемо оцінку

$$\hat{m}(t) = \hat{m}_c \cos\Lambda_{11}t + \hat{m}_s \sin\Lambda_{11}t$$

у вигляді

$$\hat{m}(t) = \frac{1}{|D|}(\tilde{m}_c D_{11} + \tilde{m}_s D_{21})\cos\Lambda_{11}t + (D_{12}\tilde{m}_c + D_{22}\tilde{m}_s)\sin\Lambda_{11}t = \frac{1}{|D|}\sum_{l=1,2}\tilde{m}_l f_l(t), \quad (25)$$

де

$$|D| = c_{11}(\theta)s_{11}(\theta) - a_{11}{}^2(\theta), \quad D_{11} = s_{11}, \quad D_{22} = c_{11}, \quad D_{12} = D_{21} = -a_{11}(\theta),$$

$$\tilde{m}_1 = \tilde{m}_c, \ \tilde{m}_2 = \tilde{m}_s, \quad f_l(t) = D_{l1}\cos\Lambda_{11}t + D_{l2}\sin\Lambda_{11}t.$$

Дисперсію оцінки (25) тоді визначаємо за формулою

$$D\left[\hat{m}(t)\right] = \frac{1}{|D|^2}\left[D_{\tilde{m}_c} f_1{}^2(t) + 2R_{\tilde{m}_c\tilde{m}_s} f_1(t) f_2(t) + D_{\tilde{m}_s} f_2{}^2(t)\right], \quad (26)$$

де $D_{\tilde{m}_c} = E[\tilde{m}_c - E\tilde{m}_c]^2$, $D_{\tilde{m}_s} = E[\tilde{m}_s - E\tilde{m}_s]^2$, $R_{\tilde{m}_c\tilde{m}_s} = E[\tilde{m}_c - E\tilde{m}_c][\tilde{m}_s - E\tilde{m}_s]$.

Для дисперсій оцінок $\tilde{m}_c$ і $\tilde{m}_s$ знаходимо:

$$D_{\tilde{m}_c} = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u} b(t,u)\left[\cos\Lambda_{11}u + \cos\Lambda_{11}(2t+u)\right]dtdu, \quad (27)$$

$$D_{\tilde{m}_s} = \frac{2}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u} b(t,u)\left[\cos\Lambda_{11}u - \cos\Lambda_{11}(2t+u)\right]dtdu, \quad (28)$$

а для кореляції –

$$R_{\hat{m}_c\hat{m}_s} = \frac{1}{\theta^2}\int_0^\theta\int_0^{\theta-u} b(t,u)\left[\cos\Lambda_{11}u\sin\Lambda_{11}(t+u) + \cos\Lambda_{11}(t+u)\sin\Lambda_{11}t\right]dtdu. \quad (29)$$

Підставимо у вирази (27)–(29) формулу для кореляційної функції випадкового процесу (23), яка має вигляд

$$b(t,u) = B_{00}(u) + \sum_{r=\pm 2} B_{rr}e^{i\Lambda_{rr}t},$$

де

$$B_{00}(u)=\frac{1}{2}\left[R_c(u)+R_s(u)\right]\cos\Lambda_{11}u+R_{cs}^{-}(u)\sin\Lambda_{11}u\ ,$$

$$B_{22}(u)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left[R_c(u)-R_s(u)\right]-iR_{cs}^{+}(u)\right]e^{i\Lambda_{11}u}\ ,$$

при цьому $R_c(u)=E\overset{\circ}{\xi}_c(t)\overset{\circ}{\xi}_c(t+u)$; $R_s(u)=E\overset{\circ}{\xi}_s(t)\overset{\circ}{\xi}_s(t+u)$; $\overset{\circ}{\xi}_c(t)=\xi_c(t)-m_c$; $\overset{\circ}{\xi}_s(t)=\xi_s(t)-m_s$, а $R_{cs}^{+}(u)$ – парна і $R_{cs}^{-}(u)$ – непарна частини взаємокореляційної функції $R_{cs}(u)=E\overset{\circ}{\xi}_c(t)\overset{\circ}{\xi}_s(t+u)$. Після інтегрування за t для дисперсії (27) маємо:

$$D_{\tilde{m}_c}=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u}{\theta}\right)\Big[2B_{00}(u)\cos\Lambda_{11}u+B_{22}(u)e^{-i\Lambda_{11}u}+B_{-2,-2}(u)e^{i\Lambda_{11}u}+B_{00}(u)\times$$

$$\times\left[e^{i\Lambda_{11}u}f_{22}(0,\theta-u)+e^{-i\Lambda_{11}u}f_{-2,-2}(\theta,\theta-u)\right]+B_{22}(u)\Big[2f_{22}(0,\theta-u)\cos\Lambda_{11}u+$$

$$+e^{i\Lambda_{11}u}f_{44}(0,\theta-u)\Big]+B_{-2,-2}(u)\left[2f_{-2,-2}(0,\theta-u)+e^{-i\Lambda_{11}u}f_{-4,-4}(0,\theta-4)\right]\Big]du\ ,$$

де

$$f_{11}(0,\theta-u)=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta-u}e^{i\Lambda_{11}u}du\ . \tag{30}$$

Нехтуючи складовими, які містять функції (30), і враховуючи, що

$$B_{22}(u)e^{-i\Lambda_{11}u}+B_{-2,-2}(u)e^{i\Lambda_{11}u}=B_{22}^{c}(u)\cos\Lambda_{11}u-B_{22}^{s}(u)\sin\Lambda_{11}u\ ,$$

отримуємо:

$$D_{\tilde{m}_c}=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u}{\theta}\right)\left[2B_{00}(u)\cos\Lambda_{11}u+B_{22}^{c}(u)\cos\Lambda_{11}u-B_{22}^{s}(u)\sin\Lambda_{11}u\right]du\ .$$

Після аналогічних перетворень співвідношень (28) і (29) маємо:

$$D_{\tilde{m}_s}=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u}{\theta}\right)\left[2B_{00}(u)\cos\Lambda_{11}u-B_{22}^{c}(u)\cos\Lambda_{11}u+B_{22}^{s}(u)\sin\Lambda_{11}u\right]du\ ,$$

$$R_{\tilde{m}_c\tilde{m}_s}=\frac{1}{\theta}\int_0^{\theta}\left(1-\frac{u}{\theta}\right)\left[B_{22}^{c}(u)\sin\Lambda_{11}u+B_{22}^{s}(u)\cos\Lambda_{11}u\right]du\ .$$

Оскільки

$$f_l^{\,2}(t)=\frac{1}{2}\left(D_{l1}^{\,2}+D_{l2}^{\,2}\right)+\frac{1}{2}\left(D_{l1}^{\,2}-D_{l2}^{\,2}\right)\cos\Lambda_{22}t+D_{l1}D_{l2}\sin\Lambda_{22}t\ ,$$

$$f_1(t)\,f_2(t)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}D_{11}D_{21}+\\+D_{12}D_{22}\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}D_{11}D_{21}+\\+D_{12}D_{22}\end{pmatrix}\cos\Lambda_{22}t+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}D_{11}D_{22}+\\+D_{12}D_{21}\end{pmatrix}\sin\Lambda_{22}t\ ,$$

то дисперсія оцінки (26) є біперіодичною функцією, що містить незалежну від часу складову та комбінаційну гармоніку з частотою $\Lambda_{22}=2\left(\frac{2\pi}{T_1}+\frac{2\pi}{T_2}\right)$.

В асимптотиці $\theta \to \infty$ маємо: $D_{11} \to \frac{1}{2}$, $D_{22} \to \frac{1}{2}$, $D_{12} = D_{21} \to 0$, $|D| = \frac{1}{4}$. Тоді

$$f_1^2(t) \to \frac{1}{8}\left(1 + \cos \Lambda_{22} t\right),$$

$$f_2^2(t) \to \frac{1}{8}\left(1 - \cos \Lambda_{22} t\right),$$

$$f_1(t) f_2(t) \to \frac{1}{8} \sin \Lambda_{22} t .$$

Формула (26) тоді збігається з виразом для дисперсії компонентної оцінки математичного сподівання, коли

$$\hat{m}_c = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \cos \Lambda_{11} t dt ,$$

$$\hat{m}_s = \frac{2}{\theta} \int_0^\theta \xi(t) \sin \Lambda_{11} t dt .$$

Різницю між дисперсією МНК-оцінки і компонентної для скінченних θ можна знайти за обчисленнями на основі отриманих співвідношень після підстановки до них конкретних апроксимацій, які описують кореляційну структуру даного БПКВП.

Таким чином, застосування методу найменших квадратів дає можливість отримувати незміщені оцінки параметрів детермінованої складової БПКВП незалежно від довжини відрізка реалізації та значень частот гармонічних складових. Оскільки під час дослідження стану механічних об’єктів досить часто трапляються ситуації, коли вібраційний сигнал містить близькі за частотою гармоніки, то цей метод слід розглянути як основний для аналізу вібраційних сигналів. Умовою зменшення дисперсії МНК-оцінки зі збільшенням довжини відрізка реалізації є заникання кореляційних зв’язків зі зростанням зсуву. Така умова, зазвичай, виконується за емпіричного аналізу вібрацій. Тому досягнути потрібного значення середньоквадратичної похибки завжди можна, вибравши відповідну довжину реалізації сигналу. Такий вибір доцільно робити на основі отриманих вище результатів.

1. *Яворский И. Н.* Статистический анализ бипериодически коррелированных случайных процессов // Отбор и передача информации. – 1986. – № 73. – С. 12–21.
2. *Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н.* Методы вероятностного анализа ритмики океанологических процессов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1987. – 320 с.
3. *Яворський І. М.* Математичні моделі та аналіз стохастичних коливань. – Львів: Фіз.-мех ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, 2013. – 804 с.
4. *Coherent* covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Yavorskyj, I. Isayev, Z. Zakrzewski, S. Brooks // Signal Processing. – 2007. – **87**. – P. 13–32.
5. *Component* covariance analysis for periodically correlated random processes / I. Yavorskyj, I. Isayev, J. Majewski, R. Yuzefovych // Signal Processing. – 2010. – **90**. – P. 1083–1102.

Одержано 18.07.2017