

ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ КЛАСИФІКАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМ РЕАКЦІЇ-ДИФУЗІЇ

З. І. Васюник, Ю. І. Максимів, В. В. Мелешко

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України

E-mail: z-vasjunyk@ukr.net

Досліджено систему реакції-дифузії типу Гірера–Мейнхардта з класичними похідними і систему Брюсселятор з дробовими похідними за часом. За допомогою комп'ютерного моделювання виявлено, що внаслідок нестійкості в таких системах можуть виникати якісно різні типи коливних розв'язків. Для їх аналізу і класифікації застосовано вейвлет-перетворення. Порівняльною оцінкою вейвлет-перетворення коливних і хаотичних розв'язків встановлено також ефективність методу класифікації розв'язків систем реакції-дифузії.

Ключові слова: явища самоорганізації, системи реакції-дифузії, дробові похідні за часом, вейвлет-перетворення, обробка сигналів, аналіз і класифікація розв'язків, коливні і хаотичні розв'язки.

WAVELET TRANSFORM APPLICATION FOR CLASSIFICATION OF SOLUTIONS OF REACTION-DIFFUSION SYSTEMS

Z. I. Vasjunyk, Y. I. Maksymiv, V. V. Meleshko

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics

Gierer–Meunhardt type system of reaction-diffusion with classical derivatives and Brusselator system with fractional time derivatives are investigated. On the basis of computer simulations it is shown that qualitatively different types of oscillatory solutions may arise due to instability in these systems. Wavelet transformations are applied to analyze and classify the solutions of such systems. A comparative estimation of wavelet transforms of oscillatory and chaotic solutions is given and it is shown that such method of classification of solutions is effective.

Keywords: self-organization phenomena, systems of reaction-diffusion, time fractional derivatives, wavelet transform, signal processing, analysis and classification of solutions, oscillatory and chaotic solutions.

Процеси просторово-часової самоорганізації в дисипативних системах в останні десятиліття є предметом інтенсивних досліджень у різних галузях науки, оскільки відбуваються в багатьох фізичних, хімічних, біологічних та соціологічних середовищах [1, 2]. Прикладами таких систем є напівпровідники, гази, магнетні матеріали, хімічні реакції, розподілені співтовариства живих організмів, нервові волокна, живі тканини тощо.

У таких системах відбувається багато різноманітних нелінійних явищ. Тому, щоб краще зрозуміти умови, які призводять до різної динаміки в них, необхідно їх класифікувати. Це пояснює широку застосовність методів класифікації даних як одного з етапів їх аналізу, зокрема, для розпізнавання об'єктів з певними властивостями.

Математичні моделі. Основу математичних моделей, які описують процеси просторово-часової самоорганізації в дисипативних системах, як правило, складають системи макроскопічних рівнянь матеріального балансу дифузійного типу:

$$\tau_i u_t = d_i u_{xx} + f_i(u, A), \quad i = 1, 2 \dots \quad (1)$$

Тут τ_i та d_i , $\tau_i > 0$, $d_i > 0$ – дійсні числа, які задають характерні часи та довжини системи, відповідно; $f_i(u, A): \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ – дійсні нелінійні гладкі функції дійсних

© З. І. Васюник, Ю. І. Максимів, В. В. Мелешко, 2017

змінних u_1, u_2 , залежні від просторових координат і часу, т.зв. “джерела”; A – біфуркаційний параметр.

На просторовому інтервалі $x \in (0, L)$ систему до визначають граничні умови Неймана:

$$\left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u_i}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Окрім граничних, розглядають початкові

$$u_i(x, 0) = \varphi_i(x), \quad (3)$$

де φ_i – задані, узгоджені з умовами Неймана (2), кусково-гладкі функції.

Системи (1), які описують явища самоорганізації, прийнято називати активними з дифузією [2]. В таких системах принаймні за одним параметром u_1 (за активатором) відбувається додатний зворотний зв’язок, який зумовлює “самовиробництво” активатора, що є причиною нестійкості їх однорідного стану. Процес “самовиробництва” активатора перебуває під контролем деякого іншого параметра u_2 (інгібітора), який уповільнює зростання активатора. Тому в найпростішому, але достатньо загальному випадку активні системи з дифузією описує базова система двох рівнянь (1).

Важливо зазначити, що сьогодні особливо зацікавлюють системи реакції-дифузії з дробовою похідною, які часто використовують для опису пористих і гранульованих середовищ [3, 4], а також для моделювання різноманітних процесів: росту пухлин у живих організмах [5], або утворення суттєво нерівноважних областей в аморфних напівпровідниках [6] тощо. Базову систему реакції-дифузії з дробовою похідною за часом можна записати так:

$$\tau_i u_t^\alpha = d_i u_{xx} + f_i(u, A). \quad (4)$$

Тут $0 < \alpha < 2$ – порядок дробової похідної Капуто за часом [7, 8], яка має вигляд

$$u_t^\alpha = \frac{\partial_0^\alpha u(t)}{\partial t^\alpha} := \frac{1}{\Gamma(m - \alpha)} \int_0^t \frac{u^{(m)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha + 1 - m}} d\tau, \quad (5)$$

де $m - 1 < \alpha \leq m$, $m \in \overline{1, 2}$.

Для дослідження складних систем з великою кількістю параметрів та взаємозв’язків, непрогнозованою та хаотичною поведінкою все частіше необхідні нові комп’ютерні методи аналізу. Особливо для систем з дробовими похідними, яким властива велика різноманітність типів розв’язків [9].

У цій статті для класифікації розв’язків вжито метод вейвлет-перетворення [10–12], тобто розклад функції за компактними хвилями.

Вейвлет-перетворення. Впродовж багатьох десятиліть основним засобом оцінки реальних фізичних процесів, в тому числі випадкових, був гармонійний аналіз. Його математичною основою є перетворення Фур’є, яке дає можливість наочно виявити швидкі і повільні зміни в досліджуваному процесі і вивчати їх окремо. Однак добре відомі випадки, коли перетворенням Фур’є не вдається описати структуру досліджуваного сигналу.

Одним з ефективних математичних апаратів для розв’язування таких задач може бути вейвлет-аналіз. На відміну від традиційного перетворення Фур’є, вейвлет-перетворення забезпечує двовимірну розгортку досліджуваного сигналу. При цьому частоту і координату розглядають як незалежні змінні. Тому з’являється можливість аналізувати властивості сигналу одночасно в фізичному просторі (час, координата) і в просторі частот.

Базисом вейвлет-перетворення є локалізована в часі швидкоспадна солітоно-подібна функція

$$\psi(a,b) = \psi\left(\frac{x-b}{a}\right), \quad (6)$$

де $a \in R^+$ – масштабний множник, який відповідає за ширину вейвлета, а $b \in R$ – параметр зсуву, який визначає його положення на осі.

Вейвлет-аналіз полягає в обчисленні згортки сигналу f з компактною хвилюю ψ за різних масштабів і зсувів аргументу:

$$W(a,b) \approx \int f(x)\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)dx. \quad (7)$$

Функцію ψ , за допомогою якої виконують аналіз, називають вейвлетом, а парну їй функцію ϕ , яку використовують під час синтезу $f(t)$, – масштабувальною.

Через просторову і масштабну локальність вейвлет-функції ψ зберігається локальність у просторі вейвлет-коефіцієнтів. Наприклад, якщо ψ добре локалізована в просторовому інтервалі δ , а $a = 1$, тоді вейвлет-коефіцієнти, які відповідають положенню x , міститимуться в т.зв. конусі впливу $[x - a\delta/2, x + a\delta/2]$, що відповідає просторовій області локалізації всіх розтягнутих вейвлетів у точці x .

Під час аналізу розв’язків використовували різні типи вейвлетів, але найінформативнішим і найкращим для частотно-часового аналізу виявився дійсний вейвлет Морле [13]

$$\psi(x) = \exp(-x^2/2) \cos(5x), \quad (8)$$

оскільки він більш локалізований у частотній області (рис. 1).

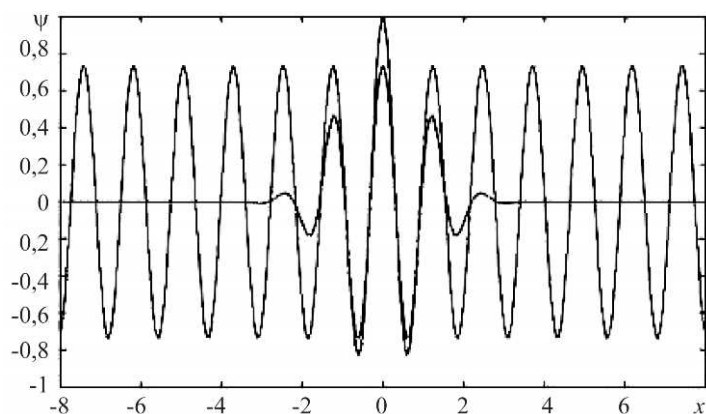


Рис. 1. Зображення вейвлета Морле та його центральної частоти. Період $T = 1,2308$, центральна частота $F_W = 0,8125$.

Значення коефіцієнта $W(a,b)$ свідчить, наскільки характерний період коливань a (чи частота a^{-1}) представлений в сигналі в околі моменту часу b . Наближену частоту розв’язку F_a можна знайти зі співвідношення $F_a \approx F_W / (a \cdot \Delta x)$, де Δx – дискретизація сигналу; F_W – центральна частота вейвлета.

Приклад 1. Виконаємо вейвлет-класифікацію на прикладі системи реакції-дифузії, яка за своїми властивостями аналогічна моделі Гірера–Мейнхардта [2, 14] і в якій наявні коливні та хаотичні розв’язки. Побудуємо вейвлет-діаграму прос-

торово-неоднорідного коливного розв'язку системи (1) з кубічними нелінійностями

$$\begin{aligned} f_1 &= u_1^2 - u_2 + 1, \\ f_2 &= u_2(u_2 - (u_1 - A)^3) \end{aligned} \quad (9)$$

і порівняємо її з вейвлет-перетворенням хаотичних коливань (рис. 2).

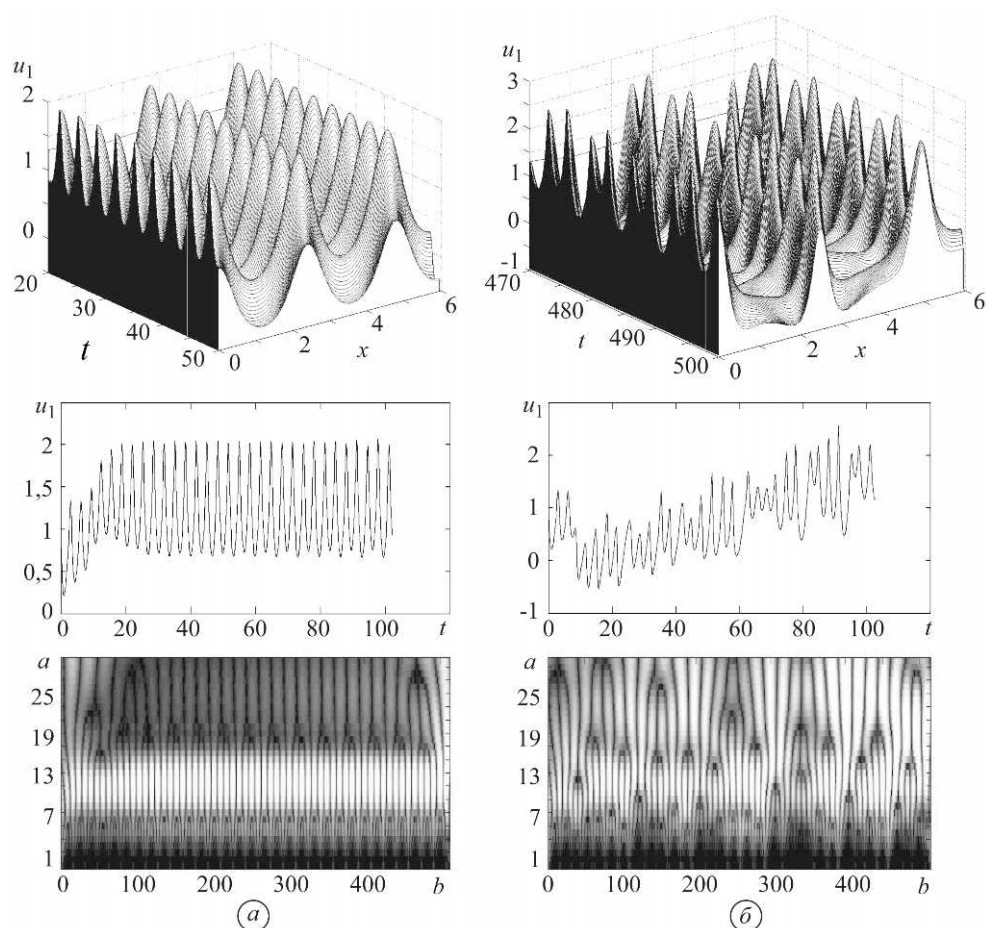


Рис. 2. Вгорі подано розв'язки системи (1) з нелінійностями (9) за рівномірних коливань при $A = -0,375$; $d_1 = 0,05$; $d_2 = 1$ (а) і за хаотичних, $A = -0,375$; $d_1 = 0,01$; $d_2 = 1$ (б); посередині – розгортка в часі однієї точки цих розв'язків; внизу – її вейвлет-перетворення.

Як бачимо, вейвлет-перетворення для різних типів розв'язків системи реакції-дифузії мають принципово відмінну топологію. За допомогою комп'ютерного моделювання виявили, що для коливного розв'язку характерна періодична повторюваність вейвлет-образу, тоді як для хаотичного її не зафіксували. Зазначимо також, що неперіодичність зображення вейвлет-перетворення на краях інтервалу для коливного розв'язку зумовлена т.зв. “конусом впливу”. Отже, зміна топології зображення вейвлет-перетворення відповідає зміні характеру коливань.

Приклад 2. Як зазначалось вище, класифікація розв'язків математичних моделей особливо актуальна для систем з дробовими похідними, яким властива різноманітність типів розв'язків.

Для аналізу поведінки розв'язків у системах реакції-дифузії з дробовими похідними (4) дослідимо модель, яка у літературі відома під назвою Брюсселятор, де похідні за часом замінено їх дробовими аналогами.

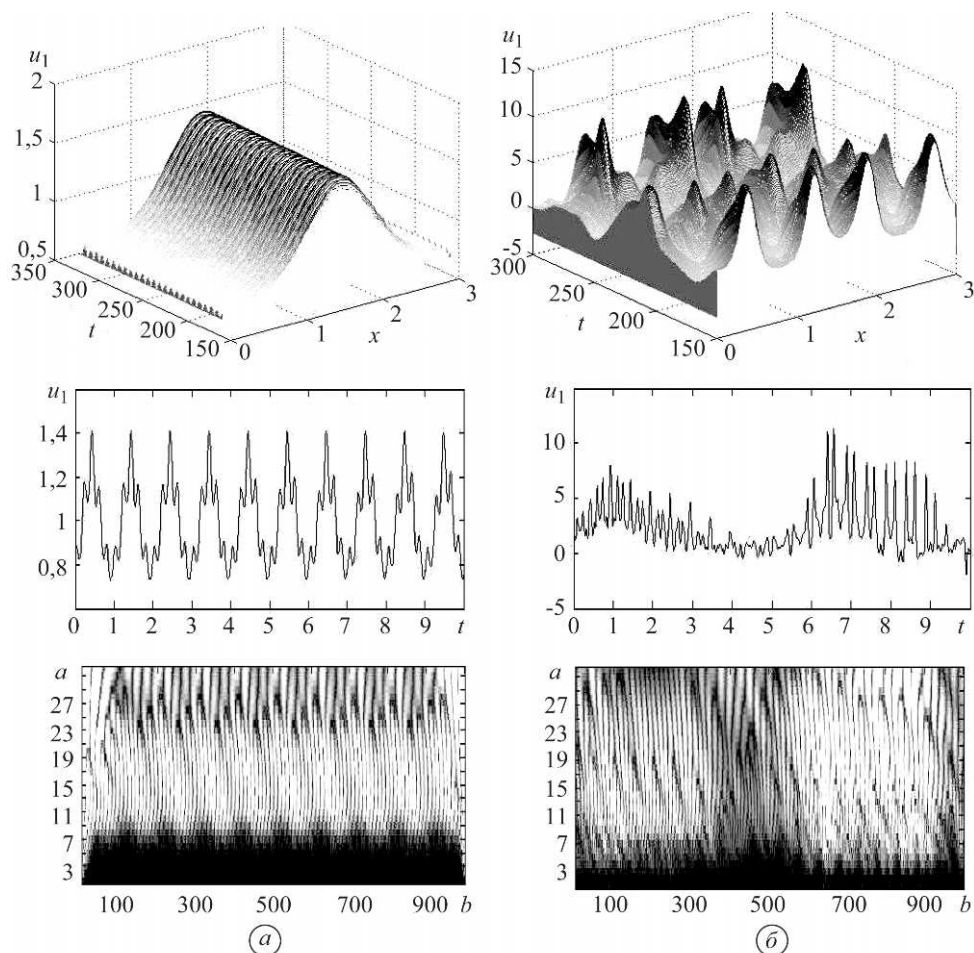


Рис. 3. Вгорі подано розв'язки системи (4) з нелінійностями (10) при $A = 1; B = 1,8; \alpha = 1,8;$
 $d_1 = 0,1; d_2 = 1$ (а) і при $A = 7; B = 7; \alpha = 1,19; d_1 = 0,1; d_2 = 10$ (б);
 посередині – розгортку в часі однієї точки розв'язків; внизу – її вейвлет-перетворення.

У цій моделі функції кінетики реакції мають вигляд

$$f_1 = A - (B + 1)u_1 + u_1^2 u_2,$$

$$f_2 = Bu_1 - u_1^2 u_2. \quad (10)$$

Виконані раніше дослідження засвідчили [9], що на відміну від системи Брюсселятор з класичними похідними, в системі Брюсселятор з дробовими похідними за часом існує багатий сценарій формування структур: стандартні однорідні коливання, стійкі структури Тюрінга, взаємодіючі неоднорідні структури, неоднорідні коливальні структури. Результат аналізу з допомогою вейвлет-перетворення двох структур різного характеру (рівномірних і хаотичних коливань) подано на рис. 3.

Як бачимо, аналогічно, як для системи реакції-дифузії (1), (9), яка за властивостями подібна до моделі Гірера–Мейнхардта, для різних типів розв'язків дро-

бової системи реакції-дифузії Брюсселятор вейвлет-перетворення мають принципово відмінну топологію.

ВИСНОВКИ

Результати числових досліджень виявили, що вейвлет-перетворення сигналу разом з такими методами класифікації даних, як обчислення показників Ляпунова чи фрактальної розмірності, або з такими методами візуалізації даних, як метод головних складових чи відображення Саммона [15], дає інший тип візуалізації даних, через що можна чітко розмежувати розв'язки з різним характером коливань і суттєво поліпшити якість класифікації даних.

1. *Сугаков В. Й.* Основи синергетики. – К.: Обереги, 2001. – 286 с.
2. *Kerner B. S., Osipov V. V.* Autosolitons. – Dordrecht: Kluwer, 1994 – 496 p.
3. *Chen W.* Time-space fabric underlying anomalous diffusion // *Chaos Solutions and Fractals.* – 2006. – **28**. – P. 923–929.
4. *Vadles-Parada F. J., Ochoa-Tapia J. A., Alvares-Ramirez J.* Effective medium equation for fractional Cattaneo's diffusion and heterogeneous reaction in disordered porous media // *Phys. A: Statistic Mech and its Appl.* – 2006. – **369**, № 2. – P. 313–943.
5. *Iomin A.* Toy model of fractional transport of cancer cells due to self-entrapping // *Phys. Rev. E.* – 2006. – **73**. – P. 061918-1-5.
6. *Uchaicin V. V., Sibatov R. T.* Fractional theory for transport in disordered semiconductors // *Commun. Nonlinear Sci. and Simulations.* – 2008. – **13**, № 4. – P. 715–727.
7. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. – New York: Academic Press., 1999. – 368 p.
8. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications. – New York: Gordon and Breach Science Publ., 1993. – 1006 p.
9. *Gafiychuk V., Datsko B.* Mathematical modeling of different types of instabilities in time fractional reaction-diffusion systems // *Computers and Math. with Appl.* – 2010. – **59**. – P. 1101–1107.
10. *Астафьева Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // *Успехи физ. наук.* – 1996. – **166**, № 11. – С. 1145–1170.
11. *Thermodynamics of fractal signals based on wavelet analysis: application to fully developed turbulence data and DNA sequences / A. Arneodo, B. Audit, E. Bacry, S. Manneville, J. F. Muzy // Physica A.* – 1998. – **254**. – P. 24–45.
12. *Daubechies I.* Orthogonal bases of compactly supported wavelets // *Communications in Pure and App. Math.* – 1988. – **61**, № 7. – P. 909–996.
13. *Grossmann A., Morlet J.* Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms // *Math. and Phys. Lectures on recent results.* – Singapore: World Scientific Publ., 1985.
14. *Гафійчук В. В., Дацко Б. Й., Васюник З. І.* Метод малого параметра в нелінійних системах реакції-дифузії: умови застосування, побудова розв'язків, аналіз біфуркацій // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 2. – С. 51–59.
15. *Дацко Б. Й., Васюник З. І.* Класифікація розв'язків в системах реакції-дифузії на основі методів візуалізації даних // *Відбір і обробка інформації.* – 2007. – 26 (102). – С. 114–120.

Одержано 07.06.2017