doi: https://doi.org/10.15407/visn2017.09.033

ВАНЄЄВА
Олена Олександрівна —
кандидат фізико-математичних наук, докторант, старший науковий співробітник відділу математичної фізики Інституту математики НАН України
ORCID: 0000-0003-1841-0342

КЛАСИФІКАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗА СИМЕТРІЙНИМИ ВЛАСТИВОСТЯМИ

За матеріалами наукового повідомлення на засіданні Президії НАН України 5 липня 2017 року

У доповіді розглянуто задачу класифікації ліївських симетрій у класах нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними. Такі симетрії, зокрема, дозволяють відібрати фізично важливі рівняння з певного класу, а також побудувати їх точні розв'язки. Для багатьох класів рівнянь, що є важливими для застосувань, класичні методи групового аналізу не дозволяють отримати вичерпну класифікацію симетрій. Такі задачі потребують нових підходів, більшість з яких ґрунтуються на використанні невироджених точкових перетворень. На прикладах групової класифікації узагальнених рівнянь Кавахари та квазілінійних рівнянь реакції—дифузії показано ефективність нещодавно розроблених методів, зокрема відшукання найбільш широких груп еквівалентності та відображень між класами.

Ключові слова: ліївська симетрія, групова класифікація, група еквівалентності, метод відображень між класами, рівняння Кавахари, рівняння реакції—дифузії, точні розв'язки.

Поль Дірак (1902—1984) — нобелівський лауреат і один з творців квантової механіки казав: «Фізичний закон має бути математично красивим». Він навіть вважав, що «більш важливо, щоб наші рівняння були красивими, ніж щоб вони узгоджувалися з експериментом» [1]. Принцип краси був для Дірака основним критерієм того, що математична теорія може моделювати фізичні явища. Звісно, краса — це суб'єктивне поняття, проте більшість математиків погоджуються, що визначити, чи є певний математичний об'єкт красивим, все-таки можливо. Одним із критеріїв краси є симетрія. Дійсно, з давніх часів симетрію асоціювали з красою в архітектурі, дизайні, а також вважали важливою рисою особистої привабливості. Виявляється, що симетрію можна розглядати і як міру краси диференціальних рівнянь.

Симетрія диференціальних рівнянь та задача групової класифікації

Симетрією системи диференціальних рівнянь називають перетворення, що відображує кожен розв'язок системи у розв'язок цієї ж системи. Тоді кажуть, що система диференціальних рівнянь є інваріантною відносно своїх перетворень симетрії.

Існують різні типи симетрій: неперервні та дискретні, точкові і контактні, умовні, приховані, узагальнені та ін. Важливим типом симетрій є ліївські симетрії, що відповідають локальним групам Лі неперервних точкових перетворень. Відкриття Софуса Лі полягало в тому, що складні нелінійні умови інваріантності диференціального рівняння відносно групи перетворень можна замінити у випадку неперервної групи більш простими лінійними умовами інфінітезимальної інваріантності відносно твірних групи. Цей результат має велике значення для задачі пошуку симетрій, оскільки дозволяє шукати замість перетворень з групи симетрій базисні оператори з відповідної алгебри ліївської інваріантності рівняння.

Теорія ліївських симетрій надала один з найефективніших методів побудови точних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь, як звичайних, так і з частинними похідними, загальної теорії інтегрування яких не існує. Метод ліївської редукції дає змогу зменшити кількість незалежних змінних у розглядуваному рівнянні. Так, якщо (1+1)-вимірне диференціальне рівняння з частинними похідними допускає однопараметричну групу Лі точкових перетворень, що діє регулярно й трансверсально на многовиді цього рівняння, то його можна редукувати до звичайного диференціального рівняння [2].

Застосування ліївських симетрій не вичерпується побудовою точних розв'язків. Наявність широкої групи інваріантності також можна розглядати як критерій відбору рівнянь, що описують реальні фізичні процеси. Дійсно, всі основні рівняння математичної фізики, зокрема рівняння Ньютона, Лапласа, Даламбера, Ейлера—Лагранжа, Гамільтона—Якобі, Максвелла, Шредінгера, є інваріантними відносно багатопараметричних груп точкових перетворень. Отже, наявність нетривіальних симетрійних властивостей є однією з особливостей, які вирізняють диференціальні рівняння, що описують реальні фізичні процеси, з множини усіх диференціальних рівнянь. Наприклад, є тільки одна система диференціальних рівнянь у частинних похідних першого порядку для двох дійсних вектор-функцій $\vec{E}$ та $\vec{H}$, що є інваріантною відносно групи Пуанкаре, і це система рівнянь Максвелла. Аналогічним чином можна визначити рівняння Дірака, Шредінгера та ін. [3]. Отже, вимога інваріантності рівняння відносно деякої групи перетворень дозволяє обрати модельне рівняння серед інших можливих.

Виникає важлива задача: виокремити із заданого класу рівнянь ті, що допускають максимально широкі ліївські симетрії. Цю задачу називають задачею групової класифікації. Повне розв'язання задачі групової класифікації передбачає:

1) відшукання групи еквівалентності класу (ця група складається з невироджених точкових перетворень незалежних та залежних змінних рівнянь з класу та довільних елементів класу, що зберігають диференціальну структуру класу, але можуть змінювати довільні елементи);

2) знаходження «ядра» максимальних алгебр ліївської інваріантності, утвореного ліївськими симетріями, що допускаються будь-яким рівнянням із заданого класу;

3) пошук усіх нееквівалентних рівнянь з класу, що допускають розширення максимальних алгебр ліївської інваріантності.

Основи класичного групового аналізу диференціальних рівнянь можна знайти у монографіях [2, 4]. Чимало результатів щодо групової класифікації певних класів диференціальних рівнянь з частинними похідними зібрано у довіднику [5].

Сучасні техніки групового аналізу

Існують два основні підходи розв'язання задачі групової класифікації: алгебраїчний метод, що ґрунтується на підгруповому аналізі групи еквівалентності заданого класу рівнянь, та прямий метод, який передбачає безпосереднє інтегрування визначальних рівнянь, що містять коефіцієнти операторів ліївської симетрії і довільні елементи класу.

Обидва підходи мають певні обмеження у застосуванні. Алгебраїчний метод дозволяє отримати вичерпну класифікацію тільки для класів, що мають гарні трансформаційні властивості, так званих нормалізованих класів [6]. Водночас прямий метод ефективний лише для класів простої структури, які мають невелику кількість довільних елементів. На жаль, для багатьох класів рівнянь, важливих для застосувань, класичні методи групового аналізу не дозволяють отримати повний розв'язок задачі групової класифікації. Отже, розроблення нових методів групового аналізу є актуальним напрямом досліджень.

Українською школою групового аналізу, заснованою В.І. Фущичем [7], зокрема в роботах А.Г. Нікітіна, Р.О. Поповича та їх учнів, до яких належить і автор, запропоновано низку нових понять та методів:

• нормалізованість класу диференціальних рівнянь [6, 8];

• узагальнена розширена група еквівалентності [6, 8];

• умовна група еквівалентності [6, 8];

• групоїд еквівалентності [9];

• метод відображень між класами диференціальних рівнянь [10];

• метод граничних переходів (контракцій) [11, 12];

• метод розбиття ненормалізованого класу на нормалізовані підкласи [6];

• метод розщепленого галуження [13, 14].

Ці підходи, основані на використанні невироджених точкових перетворень, дають змогу розширити клас задач групової класифікації, які можна повністю розв'язати.

Також у роботі [15] наведено алгоритм відновлення класифікаційного списку ліївських симетрій для рівнянь з вихідного класу з використанням результатів класифікації для спрощеного (відкаліброваного) класу. За допомогою цього алгоритму отримано групову класифікацію широкого класу узагальнених рівнянь типу Кортевега—де Фріза. Наведений алгоритм використано у багатьох статтях для отримання найбільш широкого класифікаційного списку ліївських симетрій. Такий список є зручним для швидкої ідентифікації рівнянь, що мають нетривіальні симетрійні властивості.

Розглянемо детальніше деякі з розроблених технік на прикладах групової класифікації узагальнених рівнянь Кавахари та рівнянь реакції—дифузії зі змінними коефіцієнтами.

Групова класифікація рівнянь Кавахари

У роботі [16] з симетрійної точки зору досліджено клас рівнянь вигляду:

$$u_t + \alpha(t)u^n u_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0, \qquad (1)$$

де n — довільна ненульова стала, α, β, σ — довільні гладкі функції змінної t, $\alpha\beta\sigma \neq 0$ Це рівняння є узагальненням класичного рівняння Кавахари зі сталими коефіцієнтами та $n = 1$, що моделює хвилі у плазмі та хвилі з поверхневим натягом [17].

Розв'язання задачі групової класифікації дозволить виокремити нові нелінійні модельні рівняння, що допускають нетривіальні симетрійні властивості, а також побудувати розв'язки таких рівнянь.

Спочатку було досліджено допустимі точкові перетворення у класі рівнянь (1). Допустимим перетворенням називають трійку, що складається з двох рівнянь заданого класу та перетворення, що переводить перше з них у друге. Перетворення з групи еквівалентності породжують підмножину в множині допустимих перетворень у класі диференціальних рівнянь. Якщо множину допустимих перетворень деякого класу диференціальних рівнянь вичерпують перетворення з групи еквівалентності, то такий клас називають нормалізованим [6]. Множина допустимих перетворень з операцією композиції перетворень має структуру групоїда, тому її також називають групоїдом еквівалентності [9].

Теорема 1. Звичайну групу еквівалентності $G^{\sim}$ класу (1) складають перетворення:

$$\tilde t = T(t),\quad \tilde x = \delta_1 x + \delta_2,\quad \tilde u = \delta_3 u,$$

$$\tilde\alpha(\tilde t) = \frac{\delta_1}{\delta_3{}^n T_t}\alpha(t),\quad \tilde\beta(\tilde t) = \frac{\delta_1^3}{T_t}\beta(t),$$

$$\tilde\sigma(\tilde t) = \frac{\delta_1^5}{T_t}\sigma(t),\quad \tilde n = n,$$

де δ_j (j = 1, 2, 3) — довільні сталі з $\delta_1\delta_3 \neq 0$, $T = T(t)$ — довільна функція з $T_t \neq 0$.

Виявляється, що підклас узагальнених рівнянь Кавахари зі змінними коефіцієнтами та n = 1 допускає узагальнені розширені перетворення еквівалентності, що не належать до групи $G^{\sim}$. Тому необхідно розглянути узагальнену розширену групу еквівалентності цього підкласу.

Групу еквівалентності називають узагальненою, якщо компоненти перетворень з групи, що відповідають незалежним або залежним змінним, містять довільні елементи класу. Групи еквівалентності, в яких компоненти перетворень для довільних елементів є нелокальними по них (наприклад, нові довільні елементи є інтегралами від старих довільних елементів), називають розширеними [6]. Якщо деякі компоненти перетворень еквівалентності нелокально залежать від довільних елементів класу, то відповідну групу еквівалентності називають узагальненою розширеною.

Теорема 2. Узагальнену розширену групу еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}$ класу рівнянь

$$u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} + \sigma(t)u_{xxxxx} = 0$$

складають перетворення

$$\tilde t = T(t),\quad \tilde x = (x+\delta_1)X^1 + \delta_0,$$

$$\tilde u = \frac{\delta_2}{X^1}u - \delta_2\delta_3(x+\delta_1),\quad \tilde\alpha(\tilde t) = \frac{(X^1)^2}{\delta_2 T_t}\alpha(t),$$

$$\tilde\beta(\tilde t) = \frac{(X^1)^3}{T_t}\beta(t),\quad \tilde\sigma(\tilde t) = \frac{(X^1)^5}{T_t}\sigma(t),$$

де $X^1 = (\delta_3\int\alpha(t)\mathrm{d}t + \delta_4)^{-1}$, δ_j, $j = 0,...,4$ — довільні сталі, що задовольняють умові $\delta_2(\delta_3^2+\delta_4^2)\neq 0$; $T = T(t)$ — довільна функція з $T_t \neq 0$.

Кожен підклас класу (1), що виокремлений фіксуванням значення n, є нормалізованим. У випадку $n \neq 1$ групоїд еквівалентності генерується перетвореннями зі звичайної групи еквівалентності $G^{\sim}$ усього класу (1), а у випадку n = 1 — перетвореннями з узагальненої розширеної групи еквівалентності $\widehat{G}^{\sim}$.

Результати класифікації

№	$\beta(t)$	$\sigma(t)$	Базис максимальної алгебри інваріантності
Випадок $n \neq 1$. Класифікацію виконано з точністю до $G^{\sim}$-еквівалентності			
1	$\forall$	$\forall$	∂_x
2	λt^{ρ}	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	∂_x, $3nt\partial_t + (\rho+1)nx\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
3	λe^t	$\delta e^{\frac{5t}{3}}$	∂_x, $3n\partial_t + nx\partial_x + u\partial_u$
4	λ	δ	∂_x, ∂_t
Випадок n = 1. Класифікацію виконано з точністю до $\widehat{G}^{\sim}$-еквівалентності			
5	$\forall$	$\forall$	∂_x, $t\partial_x + \partial_u$
6	λt^{ρ}	$\delta t^{\frac{5\rho+2}{3}}$	∂_x, $t\partial_x + \partial_u$, $3t\partial_t + (\rho+1)x\partial_x + (\rho-2)u\partial_u$
7	λe^t	$\delta e^{\frac{5t}{3}}$	∂_x, $t\partial_x + \partial_u$, $3\partial_t + x\partial_x + u\partial_u$
8	λ	δ	∂_x, $t\partial_x + \partial_u$, ∂_t
9	$\lambda(t^2+1)^{1\backslash 2}e^{3\nu\,\mathrm{arctg}(t)}$	$\delta(t^2+1)^{3\backslash 2}e^{5\nu\,\mathrm{arctg}(t)}$	∂_x, $t\partial_x + \partial_u$, $(t^2+1)\partial_t + (t+\nu)x\partial_x + ((\nu-t)u + x)\partial_u$

Примітка. $\alpha(t) = 1 \bmod G^{\sim}$, ρ, ν — довільні сталі; $\rho \geq 1/2 \bmod G^{\sim}$, $\nu \geq 0 \bmod \widehat{G}^{\sim}$, δ та λ — ненульові сталі, $\delta = \pm 1 \bmod G^{\sim}$.

 ISSN 1027-3239. Visn. Nac. Acad. Nauk Ukr. 2017. (9)

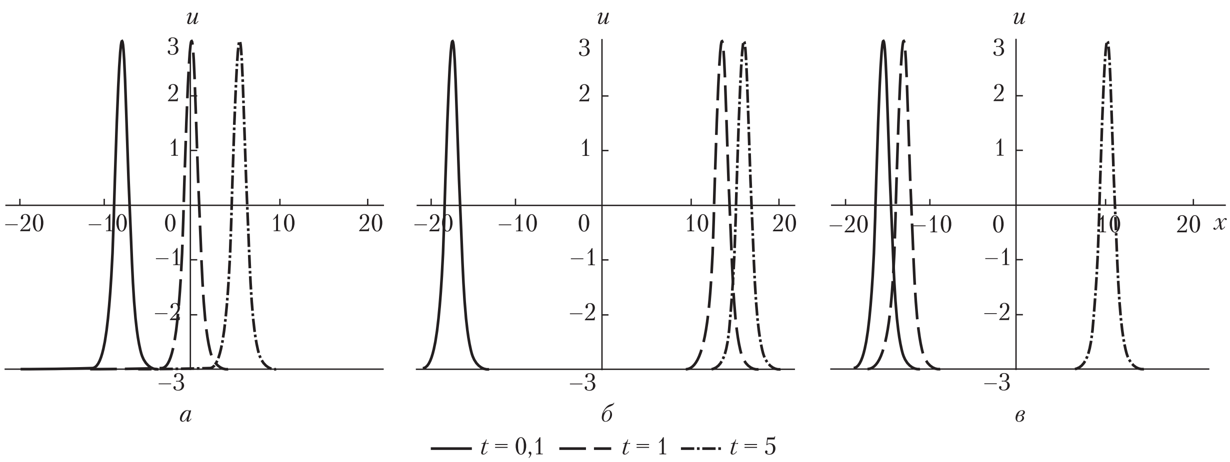

Рис. 1. Графіки знайденого розв'язку рівняння (2) для деяких фіксованих значень параметрів: *а* — $\alpha(t) = 1/t$, $\chi = 0$; *б* — $\alpha(t) = 1/t^2$, $\chi = -17$; *в* — $\alpha(t) = \sqrt{t}$, $\chi = 15$; у всіх випадках $\sigma = -0{,}1$; $\beta = -1$; $k = 1$

Перетворення еквівалентності дозволяють спростити початковий клас за допомогою калібрування довільних елементів. Один із довільних елементів α, β чи σ можна звести до сталого значення. Найкращим є калібрування $\alpha = 1$, яке можна виконати параметризованою сім'єю точкових перетворень $\tilde{t} = \int \alpha(t)\mathrm{d}t,\ \tilde{x} = x,\ \tilde{u} = u.$ Отже, не втрачаючи загальності, можна обмежитися дослідженням підкласу класу (1) з $\alpha = 1$.

Шукаємо векторні поля вигляду $Q = \tau(t,x,u)\partial_t + \xi(t,x,u)\partial_x + \eta(t,x,u)\partial_u$, що генерують однопараметричні групи Лі точкових перетворень симетрії рівнянь з цього підкласу. З критерію інфінітезимальної інваріантності знаходимо визначальні рівняння. Складність задачі групової класифікації полягає в тому, що систему визначальних рівнянь необхідно одночасно розв'язати відносно компонент векторного поля та довільних елементів класу. Незважаючи на те, що зараз існують пакети символьних обчислень, які дозволяють знаходити ліївські симетрії диференціальних рівнянь (наприклад, у програмному пакеті Maple), переважну більшість задач групової класифікації не можна вичерпно розв'язати без використання сучасних технік групового аналізу.

Результат групової класифікації для рівнянь Кавахари вигляду (1) наведено у таблиці. У результаті класифікації виокремлено підкласи рівнянь, що допускають розширення ліївської симетрії. Повне розв'язання задачі стало можливим завдяки застосуванню точкових перетворень для калібрування одного з довільних елементів до сталої, а саме, було виконано калібрування $\alpha = 1$. Використання різних груп еквівалентності для випадків $n \neq 1$ та $n = 1$, знайдених при дослідженні усіх допустимих перетворень у класі (1), дозволило записати результати класифікації у досить компактному вигляді.

Методом ліївської редукції рівняння Кавахари, що допускають розширення ліївської симетрії, зведено до звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано точні та наближені розв'язки для деяких рівнянь з класу (1).

Зокрема, знайдено точний розв'язок рівняння

$$u_t + \alpha(t)u^2u_x + \tilde{\beta}\alpha(t)u_{xxx} + \tilde{\sigma}\alpha(t)u_{xxxxx} = 0, \quad (2)$$

параметризованого довільною гладкою функцією $\alpha(t)$ та довільними ненульовими сталими $\tilde{\beta}$ та $\tilde{\sigma} < 0$. Цей розв'язок має вигляд

$$u = C_1 + 6k^2\sqrt{-10\tilde{\sigma}}\,\mathrm{th}^2\left(kx + C_2\int\alpha(t)\mathrm{d}t + \chi\right),$$

де k та χ — довільні сталі, $k \neq 0$,

$$C_1 = \frac{40k^2\tilde{\sigma} - \tilde{\beta}}{\sqrt{-10\tilde{\sigma}}},\quad C_2 = \frac{k}{10\tilde{\sigma}}(240k^4\tilde{\sigma}^2 + \tilde{\beta}^2).$$

На рис. 1 наведено графіки знайденого розв'язку для деяких фіксованих значень параметрів.

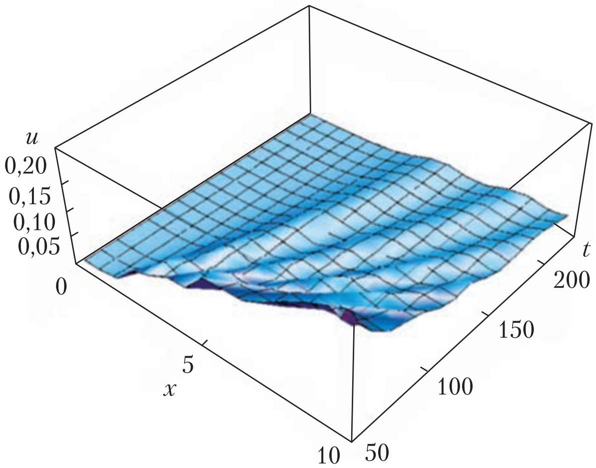

Рис. 2. Чисельний розв'язок граничної задачі для узагальненого рівняння Кавахари (3), побудований з використанням методу ліївської редукції

Узагальнене рівняння Кавахари $v_t + v_x + \alpha v v_x + \lambda t^{1/2} v_{xxx} + \delta t^{3/2} v_{xxxxx} = 0$ з коефіцієнтами, які залежать від змінної часу t, запропоновано як модель, що описує рух хвиль у морі, вкритому кригою, товщина якої збільшується з часом. Заміна залежної змінної $u = 1 + \alpha v$ зводить це рівняння до рівняння Кавахари з класу (1) вигляду

$$u_t + u u_x + \lambda t^{1/2} u_{xxx} + \delta t^{3/2} u_{xxxxx} = 0 \qquad (3)$$

(випадок 6 таблиці з $\rho = 1/2$). З використанням методу ліївської редукції побудовано чисельний розв'язок такого рівняння з граничними умовами, інваріантними відносно оператора розтягу $2t\partial t + x\partial x - u\partial u$ (рис. 2).

Групова класифікація рівнянь реакції—дифузії методом відображень між класами

Багато процесів, що є об'єктами дослідження у фізиці та біології, можна моделювати (1+1)-вимірними нелінійними рівняннями реакції—дифузії зі степеневими нелінійностями та довільними елементами, що залежать від просторової змінної [18]. Розглянемо клас (1+1)-вимірних квазілінійних рівнянь реакції—дифузії вигляду

$$f(x)u_t = (g(x)u_x)_x + h(x)u^m, \qquad (4)$$

де $f = f(x)$, $g = g(x)$, $h = h(x)$ — довільні гладкі функції змінної x, $fgh \neq 0$, m — довільна стала, $m \neq 0,1$. Для розв'язання задачі групової класифікації в цьому класі у роботі [10] запропоновано новий підхід, який ґрунтується на послідовному застосуванні перетворень з групи еквівалентності класу та відображень між класами, породженими сім'ями точкових перетворень, а саме, спочатку перетворенням

$$t \to \operatorname{sign}(f(x)g(x))t,$$

$$x \to \int_{x_0}^{x} \sqrt{|f(y)/g(y)|}\,dy + x_0, \quad u \to u$$

зі звичайної групи еквівалентності класу (4) виконано калібрування $f = g$ довільних елементів з цього класу. Тому, не втрачаючи загальності, можна обмежитися дослідженням підкласу класу (4) вигляду

$$f(x)u_t = (f(x)u_x)_x + h(x)u^m. \qquad (5)$$

Всі результати, що стосуються симетрій та розв'язків цього класу, можна поширити на клас (4) перетвореннями з групи еквівалентності.

Сім'я точкових перетворень $v(t,x) = \sqrt{|f(x)|}\,u(t,x)$, параметризованих довільним елементом f, породжує відображення класу (5) на клас

$$v_t = v_{xx} + H(x)v^m + F(x)v, \qquad (6)$$

де

$$F(x) = -\frac{(\sqrt{|f(x)|})_{xx}}{\sqrt{|f(x)|}}, \quad H(x) = \frac{h(x)}{(\sqrt{|f(x)|})^{m+1}}.$$

Підклас класу (6) зі значенням $m = 2$ відрізняється за своїми симетрійними властивостями від рівнянь з іншими значеннями параметра m. У випадку $m = 2$ необхідне додаткове калібрування з використанням відображення між класами, а саме, сім'я точкових перетворень

$$w(t,x) = v(t,x) + \frac{F(x)}{2H(x)},$$

породжує відображення класу (6) з $m = 2$ на клас рівнянь вигляду

$$w_t = w_{xx} + H(x)w^2 + G(x),$$

де

$$G(x) = -\left(\frac{F(x)}{2H(x)}\right)_{xx} - \frac{F(x)^2}{4H(x)}.$$

Групові класифікації вихідного класу (4), його підкласу з $m = 2$ та їх образів відносно відображень, породжених сім'ями точкових перетворень, виконано з точністю до відповідних узагальнених розширених або звичайних груп еквівалентності та множин усіх допустимих точкових перетворень.

Широкі сім'ї нових точних розв'язків досліджуваних рівнянь знайдено класичним методом ліївської редукції та розмноженням відомих розв'язків інших рівнянь, пов'язаних з досліджуваними різними типами точкових перетворень (такими як додаткові перетворення еквівалентності та відображення між класами).

За допомогою методу відображень між класами диференціальних рівнянь також успішно прокласифіковано інші класи рівнянь, що демонструє широкі можливості його застосування (див., наприклад, [19—21]).

Висновки

У доповіді наведено огляд нових методів групового аналізу диференціальних рівнянь, що ґрунтуються на використанні точкових перетворень. Деякі з цих методів запропоновано в роботах автора. За їх допомогою розв'язано низку задач групової класифікації для рівнянь реакції—дифузії [10, 12], узагальнених рівнянь Кавахари [16], Бюргерса [22], Кортевега—де Фріза [15], Колмогорова [23] та інших рівнянь, важливих для застосувань.

Ці методи є ефективними не лише для розв'язання задач групової класифікації, а й для дослідження інтегровності [24], пошуку точних розв'язків [10], знаходження законів збереження [12] та інших суміжних питань.

Доповідач висловлює глибоку подяку провідному співробітнику відділу математичної фізики Інституту математики НАН України, доктору фізико-математичних наук, професору, науковому консультанту Роману Омеляновичу Поповичу за допомогу в роботі та численні обговорення матеріалу.

REFERENCES
[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ]

1. Dirac P.A.M. The evolution of the physicist's picture of nature. *Scientific American*. 1963. **208**(5): 47.
2. Olver P.J. *Applications of Lie groups to differential equations*. Graduate Texts in Mathematics, 107. (New York: Springer-Verlag, 1993).
3. Fushchich W.I., Nikitin A.G. *Symmetries of equations of quantum mechanics*. (New York: Allerton Press Inc., 1994).
4. Ovsiannikov L.V. *Group analysis of differential equations*. (New York: Academic Press, 1982).
5. Ibragimov N.H. (ed.). *Handbook of Lie Group Analysis of Differential Equations*. V. 1—3. (Boca Raton: CRC Press, 1994, 1995, 1996).
6. Popovych R.O., Kunzinger M., Eshraghi H. Admissible transformations and normalized classes of nonlinear Schrödinger equations. *Acta Appl. Math*. 2010. **109**(2): 315.
7. Samoilenko A.M. (ed). *Fushchych W.I. Selected Works*. (Kyiv: Naukova Dumka, 2005).
[*Фущич Вільгельм Ілліч. Вибрані праці*. (Відп. ред. А.М. Самойленко). К.: Наукова думка, 2005.]
8. Popovych R.O. Classification of admissible transformations of differential equations. *Collection of Works of Institute of Mathematics*. 2006. **3**(2): 239.
9. Popovych R.O., Bihlo A. Symmetry preserving parameterization schemes. *J. Math. Phys*. 2012. **53**(7): 073102.
10. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Enhanced group analysis and exact solutions of variable coefficient semilinear diffusion equations with a power source. *Acta Appl. Math*. 2009. **106**(1): 1.
11. Ivanova N.M., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of variable coefficient diffusion-convection equations. II. Contractions and exact solutions. arXiv: 0710.3049.
12. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Extended group analysis of variable coefficient reaction-diffusion equations with exponential nonlinearities. *J. Math. Anal. Appl*. 2012. **396**(1): 225.

13. Nikitin A.G., Popovych R.O. Group classification of nonlinear Schrödinger equations. *Ukr. Math. J.* 2001. **53**(8): 1255.
[Нікітін А.Г., Попович Р.О. Групова класифікація нелінійних рівнянь Шрьодінгера. *Укр. мат. журн.* 2001. **53**(8): 1053.]
14. Popovych R.O., Ivanova N.M. New results on group classification of nonlinear diffusion-convection equations. *J. Phys. A.* 2004. **37**(30): 7547.
15. Vaneeva O. Lie symmetries and exact solutions of variable coefficient mKdV equations: An equivalence based approach. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2012. **17**(2): 611.
16. Kuriksha O., Pošta S., Vaneeva O. Group classification of variable coefficient generalized Kawahara equations. *J. Phys. A: Math. Theor.* 2014. **47**(4): 045201.
17. Kawahara T. Oscillatory solitary waves in dispersive media. *J. Phys. Soc. Jpn.* 1972. **33**: 260.
18. Kamin S., Rosenau P. Nonlinear thermal evolution in an inhomogeneous medium. *J. Math. Phys.* 1982. **23**(7): 1385.
19. Vaneeva O., Kuriksha O., Sophocleous C. Enhanced group classification of Gardner equations with time-dependent coefficients. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* 2015. **22**(1-3): 1243.
20. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Group analysis of Benjamin—Bona—Mahony equations with time dependent coefficients. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2015. **621**(1): 012016.
21. Vaneeva O., Pošta S., Sophocleous C. Enhanced group classification of Benjamin—Bona—Mahony—Burgers equations. *Appl. Math. Lett.* 2017. **65**: 19.
22. Vaneeva O.O., Sophocleous C., Leach P.G.L. Lie symmetries of generalized Burgers equations: application to boundary-value problems. *J. Eng. Math.* 2015. **91**(1): 165.
23. Vaneeva O., Karadzhov Yu., Sophocleous C. Group analysis of a class of nonlinear Kolmogorov equations. In: *Lie theory and its applications in physics*. Springer Proc. Math. Stat. (Singapore: Springer, 2016). P. 349—360.
24. Vaneeva O.O., Popovych R.O., Sophocleous C. Equivalence transformations in the study of integrability. *Physica scripta*. 2014. **89**(3): 038003.

O.O. Vaneeva

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine (Kyiv)

CLASSIFICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH RESPECT TO THEIR SYMMETRY PROPERTIES
According to the materials of scientific report
at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine, July 5, 2017

The report is devoted to the problem of Lie symmetry classification for classes of nonlinear partial differential equations. Such symmetries allow one, in particular, to select equations of potential physical interest and to construct their exact solutions. For many classes of partial differential equations which are important for applications classical methods of group analysis do not result in exhaustive group classification. Such complicated group classification problems require new tools to be solved completely. Majority of the modern approaches are based on the usage of nondegenerate point transformations. Using the group classifications of variable coefficient generalized Kawahara equations and quasilinear reaction—diffusion equations as illustrative examples, we show the effectiveness of the recently developed approaches. These approaches include, in particular, the construction of the widest possible equivalence groups and the method of mapping between classes.

***Keywords*:** Lie symmetry, group classification, equivalence group, method of mappings between classes, Kawahara equation, reaction-diffusion equation, exact solutions.