



ГРУШКОВСЬКА

Вікторія Василівна —

кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України

<https://orcid.org/0000-0003-0439-6834>

БЕЗГРАДІЄНТНІ АЛГОРИТМИ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

За матеріалами наукового повідомлення
на засіданні Президії НАН України
30 травня 2018 року

Доповідь присвячено дослідженню задач динамічної оптимізації з функцією якості, аналітичний вираз якої може бути повністю або частково невідомим. Через це обмеження класичні методи керування, які потребують обчислення градієнта функції якості, виявляються неефективними. У роботі представлено новий безградієнтний метод синтезу функцій керування для задач динамічної оптимізації, який об'єднує та узагальнює деякі наявні результати і дає змогу будувати нові керування з потрібними властивостями. На відміну від більшості безградієнтних алгоритмів керування, які забезпечують лише властивість практичної асимптотичної стійкості, отримано умови асимптотичної (і навіть експоненціальної) стійкості за Ляпуновим. Одержані результати проілюстровано за допомогою чисельного інтегрування та експериментів з мобільним роботом.

Ключові слова: оптимізація, пошук екстремуму, асимптотична стійкість, безградієнтні алгоритми керування, апроксимація з дужками Лі.

Задачі динамічної оптимізації виникають у різних галузях сучасної науки і техніки. Наприклад, в енергетиці важливо стабілізувати таку конфігурацію сонячної батареї або вітрогенератора, яка забезпечувала б максимальну віддачу енергії. У хімічній промисловості потрібно отримувати максимальний вихід продукту. Широке коло застосувань виникає також у робототехніці, зокрема у задачах відстеження роботом сталої або рухомої цілі з невідомою траєкторією, задачах консенсусу в багатоагентних системах тощо [1]. Усі ці задачі об'єднують необхідність стабілізувати деяку оптимальну конфігурацію системи, в якій певна функція якості досягає екстремального (мінімального чи максимального) значення. Відповідна функція якості може описувати, скажімо, відстань до статичного або рухомого об'єкта, інтенсивність сонячного випромінювання, концентрацію хімічних чи біологічних агентів. Одна з основних проблем

полягає в тому, що оптимальна конфігурація часто є невідомою априорі і навіть може змінюватися з часом, тож важливим завданням є розроблення таких керуючих алгоритмів, які знаходили б і стабілізували цю невідому конфігурацію. Таку задачу називають задачею динамічної оптимізації; у світовій літературі поширеним також є термін «задача пошуку екстремуму» (extremum seeking problem) [2].

Задачі пошуку екстремуму є популярним науковим напрямом як в Україні, так і за кордоном. Перші роботи з цієї тематики з'явилися ще у 20-х роках ХХ ст., проте значне зростання теоретичного інтересу до них та їх практичних застосувань відбулося відносно недавно [3].

Класичні підходи до розв'язання задач динамічної оптимізації ґрунтуються на побудові керуючих алгоритмів, які використовують значення градієнта функції якості. Однак такі підходи не можна безпосередньо застосовувати у випадках частково або повністю невідомого аналітичного виразу функції якості та невідомої точки екстремуму. Зважаючи на це, важливим напрямом досліджень є розроблення так званих *безградієнтних* керуючих алгоритмів, які знаходять і стабілізують априорі невідомий оптимальний стан системи, використовуючи при цьому лише значення функції якості (але не її похідні). Вочевидь, вибір керуючого алгоритму відіграє важливу роль через вплив на швидкість спадання та можливі обмеження на керування, а отже, дослідження різних типів керування є актуальною науковою проблемою.

У статті представлено новий клас безградієнтних керуючих алгоритмів, що стабілізують систему в околі точки екстремуму функції якості, аналітичний вираз якої може бути частково або повністю невідомим. Слід підкреслити, що отриманий клас узагальнює деякі відомі керування для задач пошуку екстремуму і, більше того, дозволяє будувати нові керування з важливими властивостями. Зокрема, на відміну від більшості наявних результатів з пошуку екстремуму, що забезпечують лише властивість практичної стійкості, доведено нові

умови асимптотичної стійкості відповідних траєкторій за Ляпуновим. У статті розглянуто також кілька прикладів і наведено результати експериментів з мобільним роботом, які дають змогу наочно продемонструвати властивості різних керуючих алгоритмів.

Представлені в статті результати дослідження проблеми пошуку екстремуму є природним продовженням тематики школи з аналітичної механіки та теорії керування в Інституті прикладної математики і механіки НАН України. Саме поєднання постановки задачі, що виникає в інженерних застосуваннях, і фундаментальних результатів у теорії стійкості і керування рухом, отриманих представниками цієї школи, дозволило створити новий ефективний підхід до розв'язання широкого кола задач динамічної оптимізації. Частина наведених у статті результатів одержано в рамках спільних досліджень з професором О.Л. Зуєвим та колегами з Інституту теорії систем та автоматичного керування (Університет Штутгарта, Німеччина) [4–6].

Метод апроксимації з дужками Лі. Для розв'язання задач динамічної оптимізації створено чимало підходів. Один з ефективних підходів ґрунтується на алгоритмах керування з періодичними за часом осцилюючими функціями (збуджуючими сигналами) для динамічних систем з векторними полями, що залежать від значень функції якості. За певних умов такі керування дозволяють апроксимувати напрямок антиградієнта (або інший напрямок спадання) функції якості; при цьому в самому алгоритмі не використовуються похідні від функції якості. Зокрема, такий підхід становить основу *методу апроксимації з дужками Лі* [7]. Щоб пояснити головну ідею цього методу, розглянемо афінну за керуванням систему

$$\dot{x} = f_0(x) + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{j=1}^{\ell} f_j(x) u_j \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \quad (1)$$

де $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ позначає вектор стану системи, $x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbb{R}^\ell$ — керування, $\varepsilon > 0$, $f_j \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1, \ell}$.

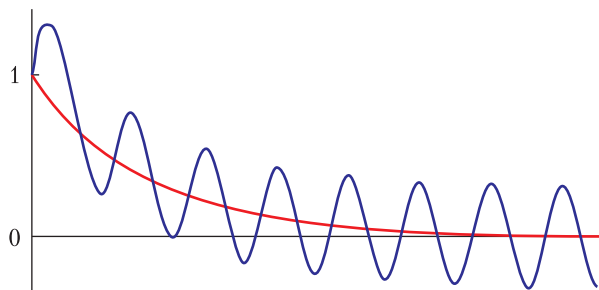


Рис. 1. Метод апроксимацій з дужками Лі. Траєкторії системи (1) (синя крива) з належним керуванням знаходяться в околі траєкторій системи з дужками Лі (2) (червона крива)

Припустимо, що

(A0) функції керування $u_j(t)$ є неперервними і T -періодичними,

$$\int_0^T u_j(\tau) d\tau = 0,$$

$$\int_0^T \int_0^\theta u_i(\theta) u_j(\tau) d\tau d\theta = \beta_{i,j} T,$$

$$T > 0, \beta_{i,j} \in \mathbb{R}, i, j = \overline{1, \ell}.$$

Можна показати, що за певних умов траєкторії системи (1) апроксимують траєкторії наступної системи з дужками Лі:

$$\dot{\bar{x}} = f_0(\bar{x}) + \sum_{i < j} \beta_{j,i} [f_i, f_j](\bar{x}), \quad \bar{x}(0) = x^0, \quad (2)$$

тобто траєкторії системи (1) знаходяться у деякому околі траєкторій системи (2) (рис. 1). При цьому радіус такого околу зменшується зі зменшенням ε , так що при $\varepsilon \rightarrow 0$ траєкторії системи (1) рівномірно збігаються до траєкторій системи (2) на обмежених проміжках часу [7].

Така властивість виявляється надзвичайно важливою для розв'язання задач динамічної оптимізації. Дійсно, припустимо, що функція якості J є невідомою як аналітичний вираз, але її значення може бути обчислено (виміряно) для кожного $x \in \mathbb{R}^n$; тоді розглянемо задачу побудови такої керованої системи $\dot{x} = u(t, J(x))$, щоб усі її розв'язки $x(t)$ прямували до точки мінімуму функції J при $t \rightarrow +\infty$. Для ілюстрації основної ідеї припустимо, що $n = 1$, тобто

$x \in \mathbb{R}$, і розглянемо алгоритм керування, запропонований у [7]:

$$\dot{x} = u(t, J(x)) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(2J(x) \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right). \quad (3)$$

Неважко перевірити, що система з дужками Лі для (3) відповідає градієнтному потоку функції J :

$$\dot{\bar{x}} = [J(\bar{x}), 1] = -\nabla J(\bar{x}) \left(= -\frac{\partial J(\bar{x})^T}{\partial \bar{x}} \right). \quad (4)$$

Отже, хоч алгоритм керування в (3) і не використовує похідні функції якості J , траєкторії системи (3) апроксимують градієнтний потік $-\nabla J(x)$ і збігаються (наприклад, якщо J опукла і має мінімум) до довільно малого околу множини точок мінімуму функції J , якщо значення ε є достатньо малим. Таким чином, алгоритм керування (3) дозволяє розв'язати задачу пошуку екстремуму функції якості J .

Побудова керувань для задач динамічної оптимізації. Важливо зазначити, що є багато способів визначити векторні поля системи (1) так, щоб відповідна система з дужками Лі мала вигляд (4). Наприклад, розглянемо систему

$$\dot{x} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{J(x)} \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + e^{-J(x)} \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right).$$

Обчислюючи $[e^{J(x)}, e^{-J(x)}]$, маємо $-2\nabla J(x)$, тож відповідна система з дужками Лі знову має вигляд (4), тобто відповідає градієнтному потоку функції якості. Таким чином, зазначений алгоритм керування також може бути використано для розв'язання задачі динамічної оптимізації. Тому виникає природне запитання: чи можливо отримати опис загального класу таких векторних полів динамічної системи (1), з якими відповідна система з дужками Лі відповідає градієнтному потоку функції J ? У роботі [4] отримано конструктивну відповідь на це питання, а саме, доведено такий результат.

Теорема 1 [4]. Розглянемо систему

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{2n} F_i(J(x)) u_i(t) e_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (5)$$

де $J \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, вектор e_i позначає одиничний вектор в \mathbb{R}^n з ненульовою i -ю координатою для $1 \leq i \leq n$ і з ненульовою $(i-n)$ -ю координатою для $n+1 \leq i \leq 2n$; $F_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Припустимо, що функції $F_i, F_{i+n} \in C^1(\mathbb{R})$, $i = \overline{1, n}$, і кожна пара F_i, F_{i+n} задовольняє співвідношення

$$F_{i+n}(z) = -F_i(z) \int \frac{\varphi_i(z)}{F_i(z)^2} dz, \quad (6)$$

з деякими функціями $\varphi_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Визначимо

$$u_i(t) := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \tilde{u}_i \left(\frac{t}{\varepsilon} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad \varepsilon > 0,$$

де функції $\tilde{u}_i, \tilde{u}_{i+n}$ задовольняють (A0). Тоді система з дужками Лі для (5) має вигляд

$$\dot{\bar{x}} = - \sum_{i=1}^n \beta_{i+n,i} \frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}_i} \varphi_i(J(\bar{x})) e_i. \quad (7)$$

Приклади функцій F_1, F_2 з робіт [4, 7–10], які використовують керування вигляду

$$u(t, J(x)) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(F_1(J(x)) \cos \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) + F_2(J(x)) \sin \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \right).$$

У кожному випадку функції F_1, F_2 задовольняють співвідношення (6).

	Вирази функцій $\varphi_i(z)$ $F_1(z)$ і $F_2(z) = -F_1(z) \int \frac{\varphi_1(z)}{F_1(z)^2} dz$	Автори	Характерні властивості відповідного керування
(C1)	$\varphi_1 \equiv 2, F_1(z) = 2z, F_2(z) = 1$	Dürr, Stankovic, Ebenbauer, Johansson [7]	Простота реалізації
(C2)	$\varphi_1 \equiv 1, F_1(z) = \sin(z), F_2(z) = \cos(z)$	Scheinker, Krstić [8]	Обмеженість амплітуди керування
(C3)	$\varphi_1(z) = 2\alpha k z,$ $F_1(z) = \alpha z ^r, F_2(z) = \frac{k}{r-1} z ^{2-r}, r \in [0, 1), \alpha, k > 0$	Scheinker, Krstić [9]	Згасання амплітуди керування: керування прямує до нуля, якщо $z \rightarrow 0$
(C4)	$\varphi_1 \equiv 1, F_1(z) = \sqrt{z} \sin(\ln(z)),$ $F_2(z) = \sqrt{z} \cos(\ln(z))$ для $z > 0,$ $F_1(0) = F_2(0) = 0.$	Suttner, Dashkovskiy [10]	
(C5)	$\varphi_1 \equiv 1, F_1(z) = \sqrt{\frac{1-e^{-z}}{1+e^z}} \sin(e^z + 2\ln(e^z - 1)),$ $F_2(z) = \sqrt{\frac{1-e^{-z}}{1+e^z}} \cos(e^z + 2\ln(e^z - 1))$ для $z > 0, F_1(0) = F_2(0) = 0.$	Грушківська, Зуєв, Ebenbauer [4]	Обмеженість і згасання амплітуди керування

(C1) і (C2) в таблиці, застосовні до широкого класу функцій якості і мають досить простий вигляд. Ці властивості спрощують практичну реалізацію таких алгоритмів, наприклад у системах комп'ютерного керування рухом робототехнічних систем. Додатковою перевагою у випадку (C2) є рівномірна обмеженість функцій F_1, F_2 , що дозволяє враховувати обмеження, які трапляються в реальних системах. Проте в обох випадках амплітуди керувань не спадають при $z \rightarrow 0$, що на практиці призводить до незгасаючих коливань розв'язків відповідної динамічної системи в околі точки екстремуму. Керування, амплітуди яких прямують до нуля при $z \rightarrow 0$ (див. (C3), (C4)), є корисними у випадках відомого мінімального значення функції якості (при цьому значення точки мінімуму x^* може залишатися невідомим). Такі ситуації виникають, наприклад, у задачах пошуку цілі, консенсусу, синхронізації, стабілізації за допомогою вібрацій та ін. Неважко перевірити: попри різні властивості, всі наведені керування можуть бути отримані з формули (6). Крім того, формула (6) дозволяє будувати нові керування з корисними властивостями. Так, можемо отримати керування, які поєднують переваги обмеженості та згасання в нулі, зокрема з функціями (C5) у таблиці.

Умови асимптотичної стійкості. Слід підкреслити, що більшість наявних безградієнтних алгоритмів керування для задач динамічної оптимізації забезпечують *лише практичну асимптотичну стійкість* точки екстремуму для замкненої системи, тобто потрібна близькість системи до оптимального стану досягається за рахунок вибору достатньо великої частоти керування, а траєкторії системи мають незгасаючі коливання в околі точки екстремуму. З практичної точки зору реалізація цих керувань може виявитися неефективною через реальні обмеження на припустимі значення частоти та величини керування. На відміну від таких результатів у роботі [4] запропоновано керування, які забезпечують асимптотичну (і навіть експоненціальну) стійкість за Ляпуновим траєкторій замкненої системи, що є суттєвою перевагою.

Наведемо відповідні умови асимптотичної стійкості. Вважатимемо, що в деякій області $D \subseteq \mathbb{R}^n$ виконано такі властивості:

(A1) функція J має ізольований локальний мінімум у точці $x^* \in D$, $J(x^*) = J^*$;

(A2) функція J задовольняє в області D нерівності

$$\begin{aligned} \gamma_1 \|x - x^*\|^{2m_1} &\leq J(x) - J^* \leq \gamma_2 \|x - x^*\|^{2m_1}, \\ \kappa_1 (J(x) - J^*)^{2 - \frac{1}{m_1}} &\leq \|\nabla J(x)\|^2 \leq \\ &\leq \kappa_2 (J(x) - J^*)^{2 - \frac{1}{m_1}}, \\ \left\| \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x^2} \right\| &\leq \mu (J(x) - J^*)^{1 - \frac{1}{m_1}}, \end{aligned}$$

з деякими $\gamma_1, \gamma_2, \kappa_1, \kappa_2, \mu$ і деяким $m_1 \geq 1$ (тобто локальна поведінка функції J подібна до поведінки степеневі функції);

(A3) $F_i(J(\cdot)) \in C^2(D \setminus \{x^*\})$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$;

$$L_{F_j} F_i(J(\cdot)), L_{F_i} L_{F_j} F_i(J(\cdot)) \in C(D)$$

для всіх $i, j, l = \overline{1, 2n}$ (тобто перша та друга похідні L_i функцій $F_i(J(\cdot))$ є неперервними, навіть якщо самі функції $F_i(J(\cdot))$ не є неперервно диференційованими в D).

(A4) Функції $F_i(J(x))$ задовольняють умову Ліпшица на кожній компактній множині $\chi \subset D$, і в області D виконано такі нерівності:

$$\begin{aligned} \alpha_1 (J(x) - J^*)^{m_2} &\leq \varphi_i(J(x) - J^*) \leq \\ &\leq \alpha_2 (J(x) - J^*)^{m_2}, \\ |F_i(J(x) - J^*)| &\leq M (J(x) - J^*)^{m_3}, \\ \left\| L_{F_j} L_{F_j} F_i(J(x) - J^*) \right\| &\leq H (J(x) - J^*)^{m_4}, \\ i, j, l &= \overline{1, 2n} \end{aligned}$$

з деякими

$$\alpha_1, \alpha_2, M > 0, H \geq 0, m_2 \geq m_1^{-1} - 1,$$

та

$$m_3 = 0.5(m_2 + 1), m_4 = 1.75(1 + m_2) - m_1^{-1}.$$

У якості збуджуючих сигналів в (5) візьмемо такі тригонометричні функції:

$$u_i(t) = u_i^\varepsilon(t) = 2\sqrt{\frac{\pi k_i}{\varepsilon}} \cos\left(\frac{2\pi k_i t}{\varepsilon}\right),$$

$$u_{i+n}(t) = u_{i+n}^\varepsilon(t) = 2\sqrt{\frac{\pi k_i}{\varepsilon}} \sin\left(\frac{2\pi k_i t}{\varepsilon}\right),$$

$$i = \overline{1, n}, \quad (7)$$

де $k_i \in \mathbb{N}$, $k_i \neq k_j$ для всіх $i \neq j$, $\varepsilon > 0$. Для $\delta > 0$ позначатимемо $B_\delta(x^*)$ δ -окіл точки $x^* \in \mathbb{R}^n$.

Теорема 2 [4]. Припустимо, що в області $D = B_\Delta(x^*)$ ($0 < \Delta \leq +\infty$) функція $J \in C^2(D)$ задовольняє властивості (A1)–(A2), функції F_i, F_{i+n} задовольняють властивість (A3) і співвідношення (6) з деякими φ_i для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$. Тоді виконано такі твердження.

A) Нехай $\varphi_i(J(x)) = \alpha$, де α є деякою додатною сталою. Тоді x^* є практично експоненціально стійким для системи (5), якщо $m_1 = 1$, i практично асимптотично стійким, якщо $m_1 > 1$. А саме, для кожного $\delta \in (0, \Delta^{2m_1} \sqrt{\gamma_1 / \gamma_2})$, $\bar{\lambda} \in (0, \alpha \kappa_1)$, $\rho \in (0, \delta)$ існує таке $\bar{\varepsilon} > 0$, що для кожних $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ розв'язки системи (5) з початковими умовами $x^0 \in B_\delta(x^*)$ і функціями $u_i^\varepsilon(t), u_{i+n}^\varepsilon(t)$, заданими формулами (7), $i = \overline{1, n}$, задовольняють умову

$$\|x(t) - x^*\| \leq \sigma(t)^{m_1} \sqrt{\gamma_2 / \gamma_1} \|x^0 - x^*\| \Psi_{\tilde{m}}(\lambda(t - \varepsilon)) + \rho, \quad (8)$$

де

$$\sigma(t) \leq 1 + \frac{M}{L} (\gamma_2 / \gamma_1)^{\tilde{m}/2} \delta^{m_1 \tilde{m}} (e^{vL\varepsilon} - 1),$$

для всіх $t \geq 0$, $\sigma(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$, $\tilde{m} = 1 - m_1^{-1}$, і

$$\Psi_{\tilde{m}}(s) = \begin{cases} e^{-s/2}, & \text{якщо } \tilde{m} = 0, \\ (1 + \tilde{m}s)^{\tilde{m}} (x^0)^{\frac{1}{2m_1 \tilde{m}}}, & \text{якщо } \tilde{m} > 0. \end{cases} \quad (9)$$

B) Нехай функції $\varphi_i(J(\cdot))$, $F_i(J(\cdot))$, $F_{i+n}(J(\cdot))$ додатково задовольняють умову (A4). Тоді x^* є експоненціально стійким для системи (5), якщо $\tilde{m} = 1 + m_2 - m_1^{-1} = 0$, i асимптотично стійким для системи (5), якщо $\tilde{m} > 0$. А саме, для кожних $\delta \in (0, \Delta^{2m_1} \sqrt{\gamma_1 / \gamma_2})$, $\bar{\lambda} \in (0, \alpha \kappa_1)$ існує таке $\bar{\varepsilon} > 0$, що для кожних $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, $\lambda \in (0, \bar{\lambda}]$ розв'язки системи (5) з початковими

умовами $x^0 \in B_\delta(x^*)$ і функціями $u_i^\varepsilon(t), u_{i+n}^\varepsilon(t)$, заданими формулами (7), $i = \overline{1, n}$, задовольняють умову (8) з $\rho = 0$.

Доведення теореми 2 ґрунтується на авторському підході, який поєднує і поширює нещодавно запропонований підхід до стабілізації та планування руху неголономних систем [11–13] та методи дослідження асимптотичної поведінки суттєво нелінійних систем [14, 15]. Хоча практичну асимптотичну стійкість може бути доведено також й іншими методами (наприклад, [7, 9]), наведений результат послаблює вимогу регулярності функцій F_i, F_{i+n} у зазначених роботах і тим самим значно розширює клас припустимих алгоритмів керування. Більше того, доведення цього результату є конструктивною процедурою для визначення ε в (5).

Приклади. Отже, формула (6) надає опис широкого класу безградієнтних алгоритмів керування з різноманітними властивостями для задач динамічної оптимізації. Проілюструємо поведінку розв'язків системи (5) з деякими представниками цього класу на прикладі квадратичної функції якості однієї змінної:

$$J_1(x) = 2(x - 1)^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

тобто $x^* = 1$, $J^* = 0$. Візьмемо $k_1 = 1, \varepsilon = 0.1$; тоді система (5) з функціями (7) має вигляд

$$\dot{x} = u(t, J_1(x)) = \sqrt{40\pi} \times (F_1(J_1(x)) \cos(20\pi t) + F_2(J_1(x)) \sin(20\pi t)). \quad (10)$$

На рис. 2 наведено графіки розв'язків системи (10) та керування $u(t, J_1(x))$ для функцій F_1 і F_2 , які відповідають випадкам (C1), (C2), (C4), (C5) з таблиці. Бачимо, що амплітуди керувань, які відповідають випадкам (C1) і (C2), не згасають у точці екстремуму, що призводить до коливальної поведінки розв'язків відповідних динамічних систем (рис. 2а і б). Таку поведінку можна поліпшити, використовуючи керування, амплітуди яких прямують до нуля, коли траєкторії системи наближаються до x^* . Як впливає з теореми 2, використання таких керувань дозволяє забезпечити згасання коливань при $x(t) \rightarrow x^*$. Зокрема, рис. 2в і г ілюструють поведінку траєкторій системи (10)

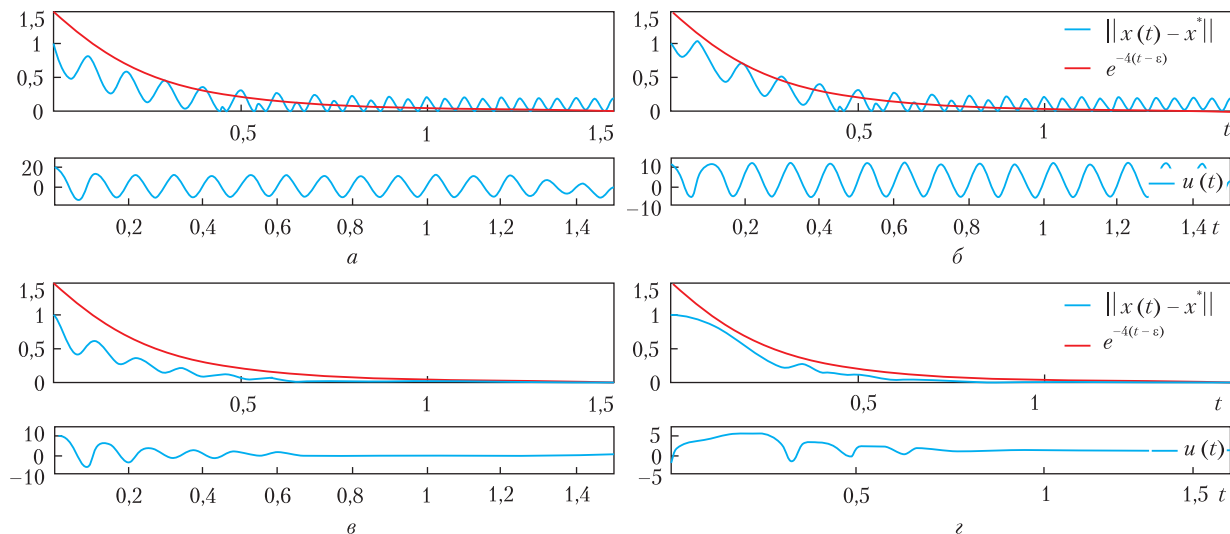


Рис. 2. Графіки розв'язків системи (10) (зверху, синій) та керування $u(t, J_1(x))$ (знизу, синій) з функцією якості $J_1(x) = 2(x-1)^2$ і функціями F_1, F_2 з таблиці: a – (C1), $б$ – (C2), $в$ – (C4), $г$ – (C5), а також графік функції $\psi_0(\lambda(t-\varepsilon))$ (9) (червоний) (іл. з [4])

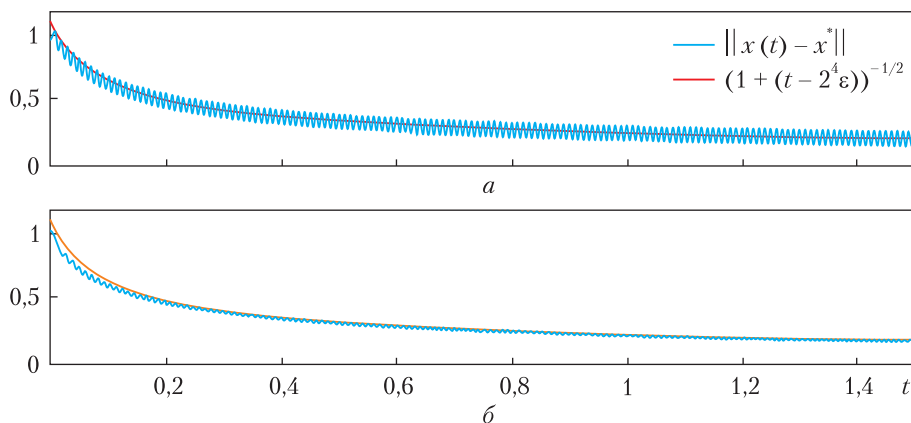


Рис. 3. Графіки розв'язків системи (11) з функцією якості $J_2(x) = 2(x-1)^4$ для випадків (C2) і (C5) з таблиці (синій) і функції $\psi_{0,5}(\bar{\lambda}(t-\varepsilon))$ (9) (червоний) (іл. з [4])

для випадків (C4) і (C5). Графіки відповідних функцій керування $u(t, J_1(x))$ ілюструють властивість згасання амплітуди керування за умови (A4) при прямуванні розв'язків системи до точки мінімуму.

Для ілюстрації побудованої в теоремі 2 оцінки швидкості спадання (8) розглянемо функцію $\psi_{\tilde{m}}(\bar{\lambda}(t-\varepsilon))$, визначену формулою (9) з $\bar{\lambda} = \alpha_1 \kappa_1$. Неважко перевірити, що у розглянутих вище випадках $\tilde{m} = 0$, $\psi_0(s) = e^{-0.5s}$. Рис. 2 ілюструє високу точність теоретичної оцінки (8).

Для порівняння розглянемо також функцію $J_2(x) = 2(x-1)^4$ і покладемо

$$\varepsilon = 0.01 < (\lambda \tilde{m} \sqrt{J_2(x^0)})^{-1}.$$

У цьому випадку

$$\tilde{m} = 0.5, \psi_{0,5}(s) = (1 + 0.5\sqrt{2}s \|x^0 - 1\|^2)^{-1/2}.$$

На рис. 3 наведено графіки розв'язків системи

$$\begin{aligned} \dot{x} = u(t, J_2(x)) = & \sqrt{400\pi} \times \\ & \times (F_1(J_2(x))\cos(200\pi t) + F_2(J_2(x))\sin(200\pi t)), \end{aligned} \quad (11)$$

а також графік функції $\psi_{0.5}(\bar{\lambda}(t-\varepsilon))$ для випадків (C2) і (C5) з таблиці. Звернімо увагу, що вищий порядок нелінійності функції J_2 приводить до зменшення швидкості прямування траєкторій системи порівняно з квадратичною функцією J_1 . Як зазначено в [4], швидкість збіжності може бути збільшено, наприклад вибором належної функції $\varphi_1(J_2(x))$.

Результати експериментів. Під час стажування автора в Інституті теорії систем і автоматичного керування (Університет Штутгарта, Німеччина) отримані вище результати було застосовано до задачі пошуку цілі мобільним роботом: кілька алгоритмів керування, векторні поля яких описуються формулою (6), було впроваджено в системі комп'ютерного керування рухом мобільного робота (рис. 4), рівняння руху якого мають вигляд

$$\dot{x}_1 = u \cos(\Omega t), \dot{x}_2 = u \sin(\Omega t), \quad (12)$$

де $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ позначає вектор стану, $u \in \mathbb{R}$ — керування, $\Omega > 0$. Такі рівняння відповідають моделі руху моноцикла зі сталою кутовою швидкістю Ω . У роботі [5] запропоновано такий клас керувань для задачі динамічної оптимізації для системи (12):

$$u = u^\varepsilon(t, J(x)) = \sqrt{\frac{\partial \alpha}{\varepsilon}} \left(F_1(J(x)) \cos\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) + F_2(J(x)) \sin\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right),$$

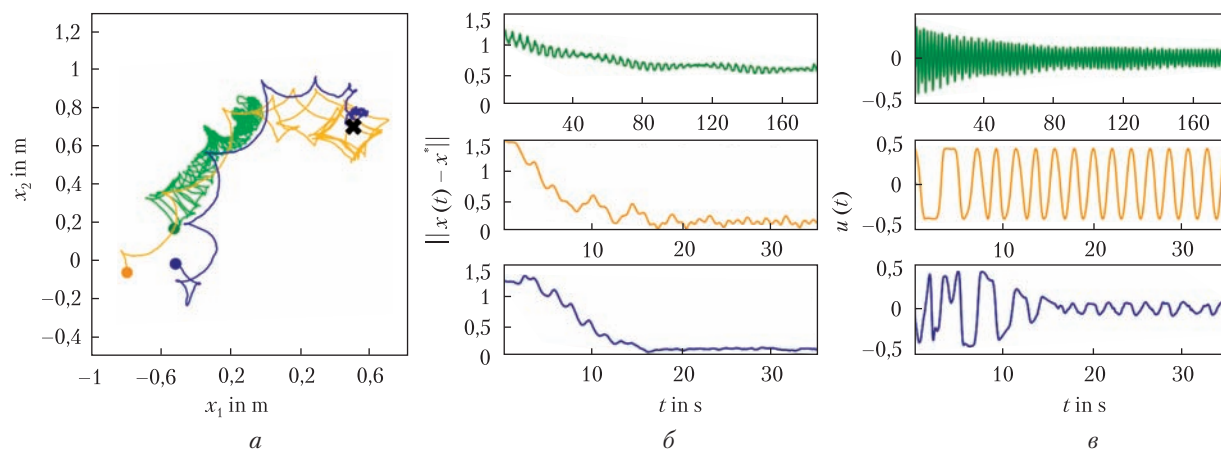


Рис. 5. Результати експериментів з роботом, рух якого задано рівняннями (10) з керуванням (11): *a* — траєкторії руху робота з функціями F_1, F_2 в (11), які відповідають випадкам (C1) (зелений), (C2) (жовтий), (C5) (синій) у таблиці; *б* — графіки функції, що описує відстань між роботом і ціллю; *в* — графіки функцій керування для кожного випадку (іл. з [5])

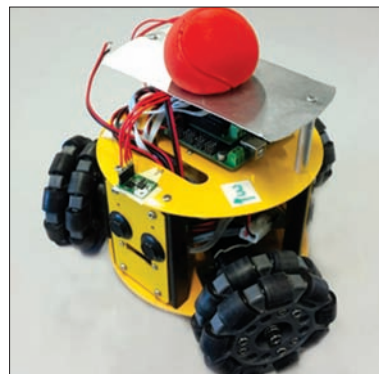


Рис. 4. Мобільний робот (іл. з [5])

де $\varepsilon = (k\Omega)^{-1}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\alpha = 4(1 - k^{-2})$, $\vartheta > 0$, функції F_1, F_2 задовольняють співвідношення (6).

Для задачі пошуку цілі функцію якості J було задано як квадрат відстані від робота до цілі і взято значення параметрів $\varepsilon = 1/3$, $\Omega = 1.5$. Через фізичні обмеження робота параметри α і k обрано так, що $|u^\varepsilon(t, J(x))| \leq 0.4$. Порівнювались три типи функцій F_1, F_2 , відповідно до випадків (C1), (C2), (C5) з таблиці. Результати експериментів наведено на рис. 5. Можемо бачити, що найгірші показники спостерігаються у випадку (C1), оскільки відстань між роботом і ціллю залишається досить

великою навіть через довший проміжок часу, тож для підвищення точності потрібно використовувати керування з більшою частотою ϵ . Найкращу поведінку системи бачимо у випадку (С5), що ілюструє отримані теоретичні результати.

Висновки. У статті представлено новий безградієнтний метод синтезу функцій керування для задач динамічної оптимізації. Одним з основних результатів є загальна формула для побудови керуючих алгоритмів за допомогою методу апроксимацій з дужками Лі, яка об'єднує деякі відомі результати і надає можливість побудови нових функцій керування з потрібними властивостями. Другим важливим результатом є концептуально новий підхід до дослідження властивостей стійкості запропонованої системи пошуку екстремуму. Цей підхід має кілька переваг порівняно з наявними результатами. По-перше, доведення основних результатів є конструктивною процедурою для визначення частот функцій керування, достатніх для забезпечення бажаних властивостей збіжності. По-друге, для певних класів функцій якості доведено практичну експоненціальну стійкість. Нарешті, основною перевагою розробленого підходу є нові умови стійкості за Ляпуновим: на відміну від більшості наявних безградієнтних алгоритмів керування, які забезпечують лише практичну асимптотичну стійкість, запропоновано керування, що за-

безпечують асимптотичну (і навіть експоненціальну) стійкість за Ляпуновим відповідної замкненої системи. Теоретично доведено, а також проілюстровано за допомогою чисельного інтегрування й експериментів з мобільним роботом, що такі керування значно поліпшують якісну поведінку траєкторій системи і дозволяють уникнути небажаних коливань в околі точки екстремуму. Зокрема, керування, що забезпечують асимптотичну стійкість за Ляпуновим, на практиці приводять до значного підвищення точності методу та забезпечення бажаних характеристик траєкторій системи. Побудовано також оцінки швидкості прямування розв'язків системи до точки екстремуму. У прикладних задачах цей результат можна застосувати для підбору параметрів керування з метою підвищення швидкості збіжності. Зазначимо, що ці результати мають значний потенціал для подальшого розвитку та широке коло застосувань у суміжних задачах. Наприклад, у роботах [4, 5] розглянуто задачі динамічної оптимізації з функцією якості, яка може змінюватися з часом (зокрема, задачу відстеження рухомої цілі з невідомою траєкторією); у [16] безградієнтний метод синтезу функцій керування застосовано до задачі планування руху з уникненням перешкод; у [4] і [17] такі керування застосовано до задач стабілізації за допомогою вібрацій та координації руху багатоагентних систем відповідно.

REFERENCES

[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ]

1. Liu S.J., Krstić M. *Stochastic averaging and stochastic extremum seeking*. (Springer Science & Business Media, 2012).
2. Ariyur K.B., Krstić M. *Real-time optimization by extremum-seeking control*. (Wiley-Blackwell, 2003).
3. Tan Y., Moase W.H., Manzie C., Nešić D., Mareels I.M.Y. Extremum seeking from 1922 to 2010. In: *Proc. 29th IEEE Chinese Control Conference* (July 28-31, 2010, Beijing, China).
4. Grushkovskaya V., Zuyev A., Ebenbauer C. On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*. 2018. **94**: 151-160. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.04.024>
5. Grushkovskaya V., Michalowsky S., Zuyev A., May M., Ebenbauer C. A family of extremum seeking laws for a unicycle model with a moving target: theoretical and experimental studies. In: *Proc. European Control Conference'18*. 2018.
6. Grushkovskaya V., Dürr H.-B., Ebenbauer C., Zuyev A. Extremum Seeking for Time-Varying Functions using Lie Bracket Approximations. *IFAC-PapersOnLine*. 2017. **50** (1): 5522-5528. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1093>

7. Dürr H.-B., Stankovic M.S., Ebenbauer C., Johansson K. Lie bracket approximation of extremum seeking systems. *Automatica*. 2013. **49**: 1538-1552. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.02.016>
8. Scheinker A., Krstić M. Extremum seeking with bounded update rates. *Systems & Control Letters*. 2014. **63**: 25-31. <https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2013.10.004>
9. Scheinker A., Krstić M. Non-C2 Lie bracket averaging for nonsmooth extremum seekers. *J. of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 2014. **136** (1): 011010-1–011010-10. <https://doi.org/10.1115/1.4025457>
10. Suttner R., Dashkovskiy S. Exponential stability for extremum seeking control systems. *IFAC-PapersOnLine*. 2017. **50** (1): 15464-15470. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.2106>
11. Zuyev A. Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2016. **54**: 1678-1696. <https://doi.org/10.1137/140999955>
12. Zuyev A., Grushkovskaya V. Motion Planning for Control-Affine Systems Satisfying Low-Order Controllability Conditions. *International Journal of Control*. 2017. **90** (11): 2517-2537. <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1257157>
13. Zuyev A., Grushkovskaya V., Benner P. Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions. *Proc. of the European Control Conference'16*. 2016. P. 575-580. <https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810346>
14. Grushkovskaya V., Zuyev A. Asymptotic Behavior of Solutions of a Nonlinear System in the Critical Case of q Pairs of Purely Imaginary Eigenvalues. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2013. **80**: 156-178. <https://doi.org/10.1016/j.na.2012.10.007>
15. Grushkovskaya V. On the influence of resonances on the asymptotic behavior of trajectories of nonlinear systems in critical cases. *Nonlinear Dynamics*. 2016. **86** (1): 587-603. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2909-8>
16. Grushkovskaya V. Gradient-free control algorithms for motion planning with obstacle avoidance. *Proceedings of IAMM NASU*. 2017. **31**.
[Грушковская В. Безградиентные алгоритмы управления для задач планирования движения с обходом препятствий. *Праці ІПММ НАН України*. 2017. **31**.]
17. Grushkovskaya V., Ebenbauer C. Multi-Agent Coordination with Lagrangian Measurements. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. **49** (22): 115-120. <https://dx.doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.10.382>

V.V. Grushkovska

Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of the National Academy of Sciences of Ukraine (Sloviansk)

GRADIENT-FREE CONTROL ALGORITHMS FOR DYNAMIC OPTIMIZATION PROBLEMS

According to the materials of scientific report at the meeting
of the Presidium of NAS of Ukraine, May 30, 2018

The paper focuses on the study of dynamic optimization problems with cost function, whose analytical expression is partially or completely unknown. This limitation leads to inefficiency of classical control methods, for which the gradient of a cost functions has to be computed explicitly. This paper presents a novel gradient-free control design approach for dynamic optimization problems. It unifies and generalizes some known results and, moreover, allows constructing new controls with favourable properties. In contrast to many existing gradient-free control algorithms which imply only the practical asymptotic stability, we propose conditions for asymptotic (and even exponential) stability in the sense of Lyapunov. The results obtained are illustrated by numerical simulations and experiments with a mobile robot.

Keywords: dynamic optimization problems, extremum seeking, asymptotic stability, gradient-free control algorithms, Lie bracket approximation.