doi: https://doi.org/10.15407/visn2020.01.029

ЗУЄВ
Олександр Леонідович —
доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України
http://orcid.org/0000-0002-7610-5621

МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ: НЕЛІНІЙНА ДИНАМІКА ТА ІНЖЕНЕРНІ ЗАСТОСУВАННЯ

За матеріалами наукової доповіді на засіданні Президії НАН України 6 листопада 2019 року

У доповіді представлено новий підхід до розв'язання задачі стабілізації, що дозволяє ефективно визначати стратегії керування для широкого класу суттєво нелінійних керованих динамічних систем, зокрема математичних моделей робототехнічних комплексів та керованих інженерних конструкцій з пружними балками, пластинами та оболонками. Отримані результати застосовано до задач стабілізації та навігації мобільних роботів у середовищах з перешкодами, комп'ютерного моделювання коливань керованої оболонки в експериментах з перспективними надлегкими будівельними конструкціями, а також використано у дослідженнях проблем економії енергоресурсів і сировини у хімічній індустрії та збільшення обсягів виробництва зі збереженням витрат на вхідні ресурси.

Ключові слова: математична теорія керування, стабілізація руху, планування та відстеження руху робототехнічних систем, оптимізація хімічних реакцій.

Актуальність теми. Теорію оптимального керування можна вважати одним із взірців плідного поєднання розвиненого математичного апарату з багатим розмаїттям застосувань у досить різних галузях суспільної діяльності. Математичні методи оптимізації, зокрема, застосовано у комп'ютерній системі планування залізничних перевезень у Нідерландах [1]. У 2007 р. нідерландською залізницею було введено новий розклад руху, розроблений фахівцями-математиками з Амстердамського університету і Центру математики та інформатики (CWI). За образним висловом голландської газети NRC Handelsblad, ця інновація стала «єдиною формою вищої математики, що викликала шалені емоції в країні». Економічний ефект від нового залізничного розкладу оцінено у 70 млн євро щорічного прибутку [1].

Актуальність проблематики теорії керування зумовлена не лише нагальними практичними застосуваннями, а й глибоким проникненням математичних методів керування до міждисциплінарних досліджень в інших галузях науки. Для підкріплення цієї тези нагадаємо, що Нобелівську премію з фізики 2012 р. було присуджено Сержу Арошу (Serge Haroche) і Девіду Вайнленду (David Wineland) «за новаторські експериментальні методи, що дозволяють вимірювати і *керувати* окремими квантовими системами». Проблема керування окремими квантами посідає центральне місце у нобелівській лекції Сержа Ароша [2], і певну частину досліджень у цьому напрямі виконано за участю фахівців у галузі математичної теорії керування [3].

Історичний екскурс. Теорія керування рухом як наукова дисципліна має власну історію. Ще з античних часів відомі описи «автоматів», тобто механічних пристроїв, що виконують задані дії без участі людини. У трактатах «Автоматопоетика» і «Пневматика» видатного геометра та інженера Герона Александрійського (I ст. н.е.) наведено конструкції автоматичних машин, що діють з використанням енергії стиснутого повітря, води, вогню. Герон сконструював також автоматичний театр, у якому фігури здійснювали рух за сценарієм, що реалізовувався за допомогою механічного пристрою для програмування — системи валів зі штифтами («перша комп'ютерна програма»).

Фундаментальною основою теорії оптимального керування є варіаційне числення — математична дисципліна, що виникла з дослідження задачі про брахістохрону, запропонованої Йоганном Бернуллі у 1696 р. Ця задача полягала у знаходженні форми кривої, за якою матеріальна точка рухається в полі сил тяжіння від заданої точки A до точки B за мінімальний час. Розв'язанням задачі Йоганна Бернуллі займалися найвідоміші вчені того часу — Ісаак Ньютон, Якоб Бернуллі, Гійом Франсуа Лопіталь. Виявилося, що крива найскорішого спуску (брахістохрона) є аркою циклоїди, а загальний метод знаходження екстремумів функціоналів (величин, що залежать від кривих) став початком варіаційного числення. Відновлення інтересу до методів варіаційного числення у середині минулого століття стимулювалося прикладними проблемами оптимального керування, насамперед у задачах аерокосмічної індустрії. Універсальний метод дослідження задач оптимального керування і варіаційного числення — принцип максимуму — було запропоновано у роботах школи Л.С. Понтрягіна [4].

Принцип максимуму поряд з методами теорії стійкості руху О.М. Ляпунова [5], підходом динамічного програмування Р. Беллмана [6], внесками наукових шкіл М.М. Красовського [7] і Р.Е. Калмана [8] та геометричними методами [9] формують методологічну базу математичної теорії керування, яка дозволяє ефективно розв'язувати широкий спектр фундаментальних і прикладних задач. З історичної точки зору можна вважати роботу Дж.К. Максвелла «Про регулятори» [10] першою математичною статтею в галузі теорії керування, в якій було досліджено питання про стійкість режиму рівномірних обертань вала парової машини Дж. Уатта при використанні центробіжного регулятора.

У рамках стислої наукової доповіді неможливо зробити огляд усіх вагомих здобутків українських наукових шкіл з математичної теорії керування. Огляди деяких важливих результатів у цій галузі можна знайти в роботах [11–14]. У подальших розділах висвітлено переважно результати досліджень Інституту прикладної математики і механіки НАН України (ІПММ), що стосуються детермінованої теорії керування рухом нелінійних систем з неперервним часом. Ці дослідження є природним продовженням тематики донецької школи аналітичної механіки, заснованої членом-кореспондентом НАН України П.В. Харламовим.

Нелінійні керовані системи. Типовим об'єктом досліджень у теорії керування є динамічні процеси, стан яких у момент часу t можна зобразити n-вимірним вектором $x(t)$, при цьому система перебуває під дією вхідного впливу, який можна зобразити m-вимірним вектором керування u.

Математичну модель об'єкта керування з неперервним часом у багатьох задачах можна описати системою звичайних диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u),$$

$$x(t) \in D \subset R^n, u \in U \subset R^m, \qquad (1)$$

де $x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$, $u = (u_1, ..., u_m)$. Наприклад, у задачах механіки компонентами вектора $x(t)$ можуть бути координати та швидкості матеріальних точок, а компонентами u — сили та моменти керування. У деяких моделях може бути відсутня можливість вимірювання всіх координат стану, проте наявна інформація про значення певної p-вимірної функції виходу $y(t)$ у вигляді $y(t) = h(x(t))$ з $p < n$. Надалі вважатимемо функції $f : D \times U \to R^n$ та $h : D \to R^p$ неперервно-диференційовними у своїх областях визначення. Таким чином, якщо задати початковий стан системи $x^0 \in D$ при $t = 0$ і *припустиму* функцію керування $u(t)$ на відрізку $[0, T]$ (тобто $u(t) \in U$ — обмежена вимірна функція часу $t \in [0, T]$), то система (1) з керуванням $u = u(t)$ має єдиний максимальний розв'язок $x(t)$, що задовольняє початкову умову $x(0) = x^0$.

Ключовою властивістю системи (1) є керованість [8, 9]: система (1) називається *керованою* в області D, якщо для будь-якої пари точок x^0, $x^T \in D$ знайдуться такі $T > 0$ і припустиме керування $u : [0, T] \to U$, що відповідний розв'язок $x(t)$ системи (1) задовольняє умови $x(0) = x^0$ і $x(T) = x^T$. У випадку лінійних систем (тобто якщо $D = R^n$, $U = R^m$ і відображення $f(x, u)$ у правій частині (1) є лінійним відносно x, u) необхідні та достатні умови керованості конструктивно описуються критерієм керованості Калмана у термінах рангу відповідної блочної матриці [8].

Поряд з програмними функціями керування вигляду $u = u(t)$ будемо також розглядати функції керування зі зворотним зв'язком вигляду $u = G(x(t))$ (зворотний зв'язок за станом) або $u = F(y(t))$ (зворотний зв'язок за виходом), де функції G або F підлягають визначенню відповідно до мети керування. Такою метою у багатьох прикладних задачах є стабілізація нестійкого стану рівноваги системи (1), що з практичної точки зору забезпечує надійність функціонування об'єкта керування. Простим прикладом нестійкого стану рівноваги є верхнє положення фізичного маятника, при цьому можна стабілізувати перевернутий маятник шляхом застосування моменту сил керування відносно осі обертання.

Для математичного формулювання задачі стабілізації будемо вважати, що $0 \in D$, $0 \in U$ та $f(0, 0) = 0$, тобто система (1) має тривіальний стан рівноваги $x = 0$ при вимкненому керуванні $u = 0$. Такі припущення не обмежують розгляду, оскільки дослідження поведінки розв'язків системи в околі інших можливих станів рівноваги можна звести до випадку $x = 0$ заміною змінних. Класична *задача стабілізації (зі зворотним зв'язком за станом)* системи (1) полягає у знаходженні такої неперервної функції $u = G(x)$, $G : D \to U$, $G(0) = 0$, щоб розв'язок $x = 0$ відповідної замкненої системи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), G(x(t))) \qquad (2)$$

був *асимптотично стійким за Ляпуновим* [5], тобто виконувалися такі властивості:

1) стійкість — для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що всі максимальні розв'язки $x(t)$ системи (2) з початковими умовами $||x(0)|| < \delta$ визначено при $t \geq 0$ та $||x(t)|| < \varepsilon$ при всіх $t \geq 0$;

2) притягання — існує таке $\Delta > 0$, що $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всіх максимальних розв'язків системи (2) з початковими умовами $||x(0)|| < \Delta$.

Якщо для системи (1) існує керування $u = G(x)$ з наведеними вище властивостями, то система (1) називається *стабілізовною* (у класі стаціонарних неперервних зворотних зв'язків за станом). Встановлено [8], що будь-яка *лінійна керована система є стабілізовною*. Проте питання про стабілізовність нелінійних систем є набагато складнішим і пов'язане з низкою фундаментальних математичних проблем. Це питання є надзвичайно важливим навіть для окремого класу нелінійних систем такого вигляду:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{m} f_k(x(t))u_k,$$

$$x(t) \in D \subset R^n, u \in R^m \qquad (3)$$

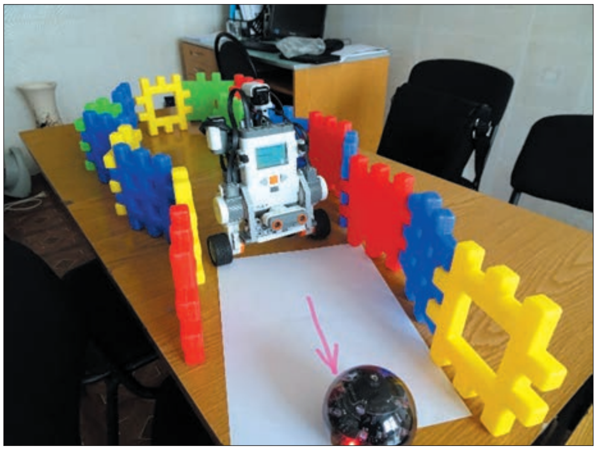

Рис. 1. Мобільний робот LEGO Mindstorms у середовищі з перешкодами. Алгоритмічне забезпечення робота реалізовано в ІПММ НАН України (м. Слов'янськ)

де $f_k : D \to R^n$ — аналітичні векторні поля. Актуальність досліджень властивостей систем типу (3) зумовлена їх практичною значущістю при моделюванні руху неголономних механічних об'єктів і зв'язком із сучасними задачами геометричної теорії керування [15].

Властивість керованості системи (3) ефективно описується у термінах алгебри Лі, що породжена векторними полями $f_1, f_2,..., f_m$ (умова Хьормандера) [9, 15]. На відміну від лінійних систем виявилося, що *умова керованості системи* (3) *не є достатньою для її стабілізовності* в означеному вище сенсі завдяки певним топологічним умовам асимптотичної стійкості. Визначним результатом у цьому напрямі є теорема Р. Брокетта [16], яку можна сформулювати так: *якщо* $0 \in D$, $m < n$ *і вектори* $f_1(0), f_2(0), ..., f_m(0)$ *є лінійно незалежними, то для системи* (3) *не існує неперервного зворотного зв'язку* $u = G(x)$, $G(0) = 0$, *який забезпечував би асимптотичну стійкість стану рівноваги* $x = 0$.

Оригінальний результат Р. Брокетта викликав бурхливий інтерес до проблеми стабілізації суттєво нелінійних систем (3966 посилань на статтю [16] у Google Scholar). Зокрема, було встановлено можливість стабілізації нелінійної системи (1) неперервною *нестаціонарною* функцією зворотного зв'язку $u = g(x, t)$ при виконанні умови локальної керованості за малий час в околі стану $x = 0$ і додаткових умов регулярності функції $f(x, u)$ [17]. Проте доведення основної теореми з [17] є неконструктивним (окремий крок доведення спирається на теорему вкладення Уїтні), і певний час залишалося відкритим питання про *побудову* нестаціонарних зворотних зв'язків $u = g(x, t)$, $g(0, t) = 0$.

У роботі автора [18] було запропоновано конструктивний підхід до синтезу зазначених функцій керування у вигляді тригонометричних поліномів відносно часу t з коефіцієнтами, що залежать від стану x:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \sum_{k=-N}^{N} \boldsymbol{g}_k(\boldsymbol{x}) \exp\left\{\frac{2\pi \boldsymbol{ikt}}{\varepsilon}\right\} \in \boldsymbol{R}^m. \quad (4)$$

Доведено, що для достатньо малих значень параметра $\epsilon > 0$ *керування* (4) *забезпечує асимптотичну (і навіть експоненціальну) стійкість стану рівноваги* $x = 0$ при виконанні умов керованості системи (3) з дужками Лі, при цьому функції $g_k(x)$визначено у термінах розв'язків допоміжної системи алгебраїчних рівнянь [18].

Цей метод синтезу швидкоосцилюючих функцій керування поширено на класи нелінійних умов керованості вищих порядків [19, 20] і застосовано до задач стабілізації руху неголономних механічних систем [18, 19], планування руху моделей підводних човнів [20], навігації мобільних роботів у середовищах з перешкодами [21].

Окремим напрямом розвитку цих досліджень є нові безградієнтні алгоритми стабілізації зі зворотним зв'язком за виходом для задач екстремального керування (extremum seeking control) [22, 23].

Ефективність запропонованих стратегій керування підтверджується результатами чисельних експериментів, виконаних в Інституті прикладної математики і механіки НАН України. Окремі алгоритми стабілізації нестійких станів рівноваги реалізовано у мобільному роботі LEGO Mindstorms (рис. 1).

Стабілізація коливань пружних інженерних конструкцій. Серед існуючих конструкцій механічних пристроїв слід виділити широкий клас систем, які складаються зі взаємозв'язаних частин, що зазнають істотних пружних деформацій при відносних поступальних та обертальних переміщеннях у процесі функціонування. Аналізуючи динамічну поведінку таких систем, їх можна розділити на підсистеми, кожна з яких у початковому наближенні відповідає моделі абсолютно твердого тіла. Приклади задач стабілізації для таких моделей містяться, зокрема, в роботах [24, 25].

Однак розвиток робототехніки та космічної індустрії стимулює створення нових математичних моделей руху складних інженерних систем, що складаються з абсолютно твердих та деформівних тіл. Маніпуляційні роботи з гнучкими ланками, пружні стрижні антен і штанг, пружні пластини панелей сонячних батарей та троси широко використовують у конструкції сучасних супутників. Дослідженню математичних моделей таких об'єктів у вигляді керованих систем диференціальних рівнянь у нескінченновимірних просторах присвячено роботи [26, 27]. У монографії [27] викладено новий метод дослідження задачі наближеної керованості диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі із застосуванням сім'ї оптимальних керувань, що відповідають скінченновимірним проєкціям вихідної задачі. Встановлено принципове значення ефекту впливу енергії керування (control spillover) на властивість наближеної керованості порівняно з умовами спектральної керованості. Для важливого з точки зору практичних застосувань класу гіперболічних систем запропоновано явну схему оцінки енергії керування у термінах умови збіжності рядів, що визначаються у термінах власних значень допоміжної спектральної задачі, а також встановлено зв'язок цих умов збіжності з проблемою малих знаменників.

До кола застосувань одержаних фундаментальних результатів належать задачі гасіння коливань пружних маніпуляторів. Зокрема, спільно з німецькими колегами з Технічного університету Ільменау та Університету Штутгарта було розроблено математичну модель коливань керованої пожежної драбини IVECO Magirus (рис. 2). Ця модель ґрунтується на представленні драбини у вигляді механічної системи з гнучкою балкою та приєднаними твердими тілами, з урахуванням моменту сил керування (рис. 3). Для такої моделі у роботах [27, 28] було запропоновано алгоритми стабілізації стану рівноваги, що знайшли застосування в інженерній практиці.

Рис. 2. Керована пожежна драбина IVECO Magirus у Технічному університеті Ільменау (Німеччина)

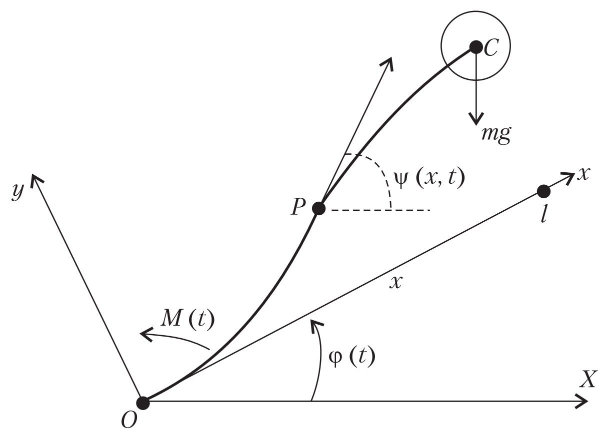

Рис. 3. Схематичне зображення моделі керованої драбини у вигляді механічної системи з пружною балкою [25]

У спільних дослідженнях з колегами з Університету Штутгарта було розвинуто підхід до дослідження коливань пружних оболонок під дією керуючих сил на границі області та розпо-

Рис. 4. Керована оболонкова конструкція Stuttgart SmartShell (м. Штутгарт, Німеччина)

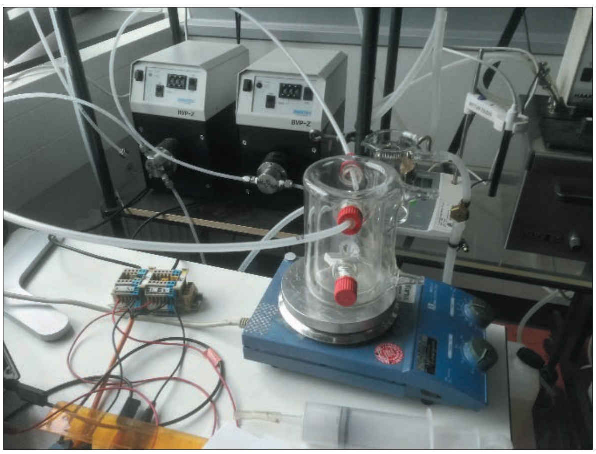

Рис. 5. Лабораторне устаткування для експериментів з керованими хімічними реакціями (м. Магдебург, Німеччина)

ділених по поверхні зовнішніх збурень. Для варіаційної форми задачі про коливання оболонки запропоновано аналітико-чисельну схему визначення коефіцієнтів скінченновимірних наближених систем відповідно до узагальненого методу Гальоркіна. Створено програмну реалізацію цієї схеми при чисельному заданні власних форм оболонки [29]. Результати пройшли апробацію на керованій оболонковій конструкції Stuttgart SmartShell, спорудженій в Університеті Штутгарта для експериментів з надлегкими будівельними конструкціями (рис. 4).

Оптимальне керування в задачах хімічної технології. Застосування розвинутих в ІПММ НАН України методів не обмежуються задачами механіки та робототехніки. У рамках договору про співробітництво з Інститутом динаміки складних технічних систем ім. Макса Планка (м. Магдебург, Німеччина) створено нові теоретично обґрунтовані підходи до оптимізації керованих динамічних процесів у хімічній технології. Зокрема, у спільній роботі з магдебурзькими колегами [30] досліджено проблему максимізації сумарного продукту неізотермічних хімічних реакцій з урахуванням заданих обмежень щодо вхідних реагентів. Таке завдання максимізації продукту сформульовано у вигляді ізопериметричної задачі оптимального керування, для якої запропоновано стратегії, що описують оптимальну зміну концентрацій та температури в реакторі. Із застосуванням цих стратегій керування встановлено можливість збільшення продуктивності модельної хімічної реакції на 1,81 % (при програмному періодичному керуванні концентрацією вхідної речовини) та на 4,47 % (при спільному керуванні концентрацією і температурою) [30]. Зазначені показники одержано чисельним моделюванням класу реакцій типу гідролізу.

Обчислювальні методи для синтезу стратегій керування, що максимізують продукт неізотермічних реакцій, розвинуто у подальшій роботі [31] для загальних класів нелінійних систем із застосуванням функціональних розкладів Чена–Фліcса. Ці математичні результати є сучасним теоретичним внеском у створення універсальних алгоритмів оптимізації складних динамічних процесів у новітній хімічній індустрії.

Партнерами з Інституту ім. Макса Планка та Університету ім. Отто фон Геріке в Магдебурзі створено лабораторне устаткування для експериментального вимірювання продукту хімічних реакцій при застосуванні програмних функцій керування (рис. 5). Результати попередніх експериментів свідчать про можливість підвищення середньої продуктивності реакцій гідролізу на 1,18 % при використанні *синусоїдальних* модуляцій вхідної концентрації [32]. Для майбутніх практичних випробувань заплановано експерименти з реалізації *розривних* функцій керування, запропонованих у [30, 31].

Висновки та перспективи. Наведені у доповіді результати актуальних досліджень відділу прикладної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, відображені у понад 170 наукових публікаціях (у тому числі 2 монографіях [25, 27]), є сучасним внеском у математичну теорію керування, що відповідає тенденціям розвитку цієї наукової дисципліни на світовому рівні.

Ці теоретичні результати спрямовано на подальші практичні застосування у перспективних інженерних розробках, що сприятиме розвитку новітніх технологій у промисловості та формуванню наукового імпульсу для вітчизняного виробництва конкурентоспроможної на світових ринках високотехнологічної продукції.

REFERENCES
[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ]

1. Schrijver A. Flows in railway optimization. *Nieuw Archief voor Wiskunde*. 2008. **9**(2): 126-131.
2. Haroche S. Nobel Lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary. *Reviews of Modern Physics*. 2013. **85**: 1083-1102. DOI: https://doi.org/10.1103/RevModPhys.85.1083
3. Sayrin C., Dotsenko I., Zhou X., Peaudecerf B., Rybarczyk T., Gleyzes S., Rouchon P., Mirrahimi M., Amini H., Brune M., Raimond J.-M., Haroche S. Real-time quantum feedback prepares and stabilizes photon number states. *Nature*. 2011. **477**: 73–77. DOI: https://doi.org/10.1038/nature10376
4. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko E.F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. (New York London: John Wiley & Sons, 1962).
   [Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. *Математическая теория оптимальных процессов*. М.: Физматгиз, 1961.]
5. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control (Lyapunov Centenary Issue)*. 1992. **55**(3): 531-772. DOI: https://doi.org/10.1080/00207179208934253
   [Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения*. М.-Л.: Гостехтеориздат, 1950.]
6. Bellman R., Kalaba R.E. *Dynamic Programming and Modern Control Theory*. (New York: Academic Press, 1965).
   [Беллман Р., Калаба Р. *Динамическое программирование и современная теория управления*. М.: Наука, 1969.]
7. Krasovskii N.N. *Theory of Motion Control*. (Moscow: Nauka, 1968).
   [Красовский Н.Н. *Теория управления движением*. М.: Наука, 1968.]
8. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in Mathematical System Theory*. (New York: McGraw-Hlll Book Company, 1969).
   [Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем*. М.: Мир 1971.]
9. Agrachev A., Sachkov Yu. *Control Theory from the Geometric Viewpoint*. (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-06404-7
10. Maxwell J.C. On governors. *Proceedings of the Royal Society of London*. 1868. **16**: 270-283.
11. Kovalev A.M., Shcherbak V.F. *Controllability, Observability, Identifiability of Dynamical Systems*. (Kyiv: Naukova Dumka, 1993).
   [Ковалев А.М., Щербак. В.Ф. *Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем*. К.: Наук. думка, 1993.]
12. Chikrii A. *Conflict-Controlled Processes*. (Dordrecht: Springer, 1997). DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-017-1135-7
13. Korobov V.I. *Controllability Function Method*. (Moscow, Izhevsk: R & C Dynamics, 2007).
   [Коробов В.И. *Метод функции управляемости*. М.-Ижевск: R & C Dynamics, 2007.]
14. Kovalev A.M., Martynyuk A.A., Boichuk O.A., Mazko A.G., Petryshyn R.I., Slyusarchuk V.Yu., Zuyev A.L., Slyn'ko V.I. Novel qualitative methods of nonlinear mechanics and their application to the analysis of multifrequency oscillations, stability, and control problems. *Nonlinear Dynamics and Systems Theory*. 2009. **9**: 117-145.
15. Bloch A.M. *Nonholonomic Mechanics and Control*. 2nd ed. (New York: Springer-Verlag, 2015). DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4939-3017-3

16. Brockett R.W. Asymptotic stability and feedback stabilization. In: *Differential Geometric Control Theory.* Brockett R.W., Millman R.S., Sussmann H.J. (Eds.). (Boston: Birkhäuser, 1983). P. 181–191.
17. Coron J.-M. On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1995. **33**(3): 804–833. DOI: https://doi.org/10.1137/S0363012992240497
18. Zuyev A. Exponential stabilization of nonholonomic systems by means of oscillating controls. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2016. **54**(3): 1678–1696. DOI: https://doi.org/10.1137/140999955
19. Zuyev A., Grushkovskaya V., Benner P. Time-varying stabilization of a class of driftless systems satisfying second-order controllability conditions. In: *2016 European Control Conference (ECC)* (29 June — 1 July 2016, Aalborg, Denmark). IEEE, 2016. P. 575–580. DOI: https://doi.org/10.1109/ECC.2016.7810346
20. Zuyev A., Grushkovskaya V. Motion planning for control-affine systems satisfying low-order controllability conditions. *International Journal of Control*. 2017. **90**(11): 2517–2537. DOI: https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1257157
21. Zuyev A., Grushkovskaya V. Obstacle avoidance problem for driftless nonlinear systems with oscillating controls. *IFAC-PapersOnLine*. 2017. **50**: 10476–10481. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1979
22. Grushkovskaya V., Zuyev A., Ebenbauer C. On a class of generating vector fields for the extremum seeking problem: Lie bracket approximation and stability properties. *Automatica*. 2018. **94**: 151–160. DOI: https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.04.024
23. Grushkovskaya V., Durr H.-B., Ebenbauer C., Zuyev A. Extremum seeking for time-varying functions using Lie bracket approximations. *IFAC-PapersOnLine*. 2017. **50**: 5522–5528. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1093
24. Zuyev A. Application of control Lyapunov functions technique for partial stabilization. In: *Proc. 2001 IEEE International Conference on Control Applications* (CCA'01). IEEE, 2001. P. 509-513. DOI: https://doi.org/10.1109/CCA.2001.973917
25. Zuyev A.L., Ignatyev A.O., Kovalev A.M. *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*. (Kiev: Naukova Dumka, 2013).
[Зуев А.Л., Игнатьев А.О., Ковалев А.М. *Устойчивость и стабилизация нелинейных систем*. К.: Наук. думка, 2013.]
26. Zuyev A. Partial asymptotic stability and stabilization of nonlinear abstract differential equations. In: *42nd IEEE Conference on Decision and Control*. (9-12 December 2003, Maui, Hawaii, USA). IEEE, 2003. P. 1321–1326. DOI: https://doi.org/10.1109/CDC.2003.1272792
27. Zuyev A.L. *Partial Stabilization and Control of Distributed Parameter Systems with Elastic Elements*. (Cham, Heidelberg, New York: Springer, 2015). DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-11532-0
28. Zuyev A., Sawodny O. Stabilization and observability of a rotating Timoshenko beam model. *Mathematical Problems in Engineering*. 2007. Article ID 57238: 1–19. DOI: https://doi.org/10.1155/2007/57238
29. Zuyev A., Sawodny O. Modelling and control of a shell structure based on a finite dimensional variational formulation. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*. 2015. **21**(6): 591–612. DOI: https://doi.org/10.1080/13873954.2015.1065278
30. Zuyev A., Seidel-Morgenstern A., Benner P. An isoperimetric optimal control problem for a non-isothermal chemical reactor with periodic inputs. *Chemical Engineering Science*. 2017. **161**: 206–214. DOI: https://doi.org/10.1016/j.ces.2016.12.025
31. Benner P., Seidel-Morgenstern A., Zuyev A. Periodic switching strategies for an isoperimetric control problem with application to nonlinear chemical reactions. *Applied Mathematical Modelling*. 2019. **69**: 287–300. DOI: https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.12.005
32. Felischak M., Nikolic D., Petkovska M., Seidel-Morgenstern A. Forced periodic reactor operation with simultaneous modulation of two inputs: nonlinear frequency response analysis and experimental demonstration. In: *2018 AIChE Annual Meeting Proceedings* (28 October – 2 November 2018, Pittsburgh, PA, USA). 2018. P. 467e.

A.L. Zuyev

Institute of Applied Mathematics and Mechanics
of National Academy of Sciences of Ukraine (Sloviansk)

MATHEMATICAL CONTROL THEORY: NONLINER DYNAMICS
AND ENGINEERING APPLICATIONS

According to the materials of scientific report at the meeting
of the Presidium of NAS of Ukraine, November 6, 2019

One of the most important tasks in mathematical control theory is to stabilize unstable dynamic processes by applying a feedback law. The report introduces a new approach for solving the stabilization problem, which makes it possible to effectively define control strategies for a wide class of essentially nonlinear controlled dynamical systems. The class of systems under investigation includes, in particular, mathematical models in robotics and controlled engineering structures with elastic beams, plates, and shells. The obtained theoretical results are applied to problems of stabilization and navigation of mobile robots in environments with obstacles. Computer simulation results are also presented to illustrate the vibrations of a controlled shell, which is used for experiments with novel lightweight elastic structures in civil engineering. A part of this report is devoted to the application of methods of mathematical control theory to the optimization of processes in chemical engineering in the sense of minimizing the consumption of input reactants (raw materials) or maximizing the productivity. For this purpose, a class of isoperimetric optimal control problems for non-stationary mass and energy balance equations has been solved in order to improve the performance of chemical reactors in comparison to their steady-state operation.

Keywords: mathematical control theory, stabilization of motion, motion planning in robotics, optimization of chemical reactions.