doi: https://doi.org/10.15407/visn2024.08.017

ЯКОВЛЕВ
Сергій Всеволодович —
член-кореспондент НАН України, професор кафедри математичного моделювання та штучного інтелекту Національного аерокосмічного університету ім. М.Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ОПТИМАЛЬНОГО ПОКРИТТЯ ОБЛАСТЕЙ ДОВІЛЬНОЇ ФОРМИ: ТЕОРІЯ ТА ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

За матеріалами доповіді на засіданні Президії НАН України 12 червня 2024 року

У доповіді наведено результати перспективних досліджень у галузі математичного моделювання просторових конфігурацій, оптимізаційних методів геометричного покриття та приклади їх практичного застосування. Дослідження задач покриття складних областей об'єктами довільної форми має міждисциплінарний характер і ґрунтується на сучасних досягненнях математики, комп'ютерних наук, інформаційних технологій та штучного інтелекту. Такі задачі є складовою рішень широкого кола завдань, пов'язаних із різними системами моніторингу територій, логістики, зв'язку, розвитком регіональної та критичної інфраструктури тощо.

У різних наукових галузях термін «покриття» має різні значення. В математиці та комп'ютерних науках поняття *покриття* розуміють у геометричному сенсі, тобто як знаходження такого розташування певних геометричних об'єктів (наприклад, кіл, еліпсів, полігонів, складних фігур), щоб кожна точка області належала хоча б одному з об'єктів, задовольняючи при цьому задані критерії оптимальності.

Зазначимо, що будь-який матеріальний об'єкт має просторову форму, метричні характеристики (тобто розміри) та фізико-технічні параметри. Такі об'єкти в подальшому називатимемо *геометричними***.** Більше того, аналізуючи фізичні явища і процеси, ми стикаємося з можливістю перетворення фізичної інформації на геометричну, наприклад під час розгляду джерела фізичних полів та їх поверхні рівня. Так, важливою характеристикою антенних пристроїв та приймально-передавальних систем є діаграми спрямованості, які можна розглядати як геометричні об'єкти. Сенсори, залежно від їх призначення, також мають просторово-вимірювальні параметри.

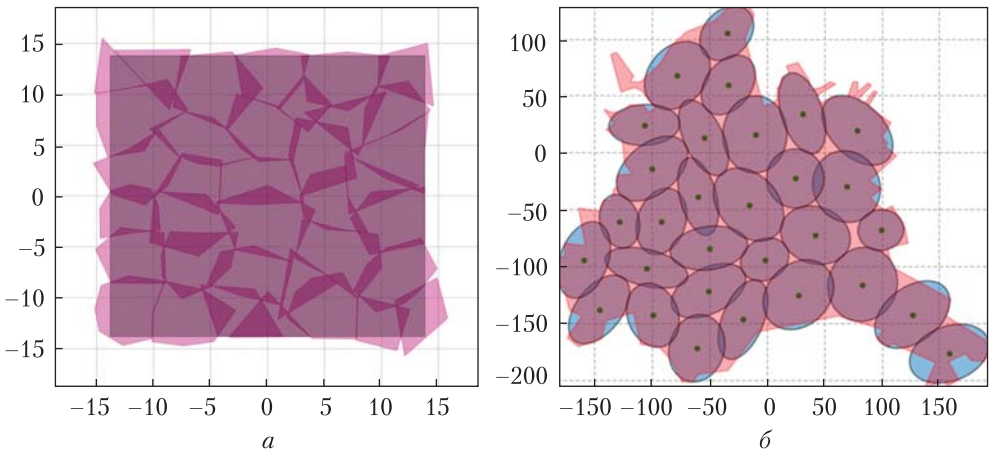

Рис. 1. Варіанти покриття області: *а* — повне покриття; *б* — максимальне покриття

Геометричні об'єкти перебувають у відповідних взаємовідношеннях один з одним, тобто формують певну конфігурацію.

На сьогодні можна виокремити три основні теорії дослідження конфігурацій геометричних об'єктів — це комбінаторна, комп'ютерна та обчислювальна геометрія. Кожен з цих напрямів має свої унікальні задачі та підходи. Найскладнішим у таких дослідженнях є врахування довільної форми геометричних об'єктів та формалізація їх взаємовідношень.

Мета цієї доповіді полягає в тому, щоб ознайомити наукову спільноту з сучасними результатами, отриманими під час досліджень саме об'єктів складної форми. При цьому ми зосередимося на задачах оптимального покриття як найскладніших задачах комбінаторної, комп'ютерної та обчислювальної геометрії.

Слід зазначити, що кожний геометричний об'єкт характеризується формою, метричними параметрами, що задають його розміри, та параметрами розміщення, що фіксують положення об'єкта в просторі. У сукупності зазначені параметри називають узагальненими. Пошук оптимальних значень узагальнених параметрів і є основною задачею оптимального покриття.

Критеріями оптимальності в задачах покриття можуть бути мінімізація кількості об'єктів покриття, максимізація площі області, що покрита об'єктами, мінімізація витрат та ін. На рис. 1*а* наведено приклад повного покриття, тобто коли кожна точка області належить хоча б одному з покривальних об'єктів. Якщо таке покриття не можна отримати при заданій кількості об'єктів, постає задача максимального покриття, як проілюстровано на рис. 1*б*.

Дослідження оптимізаційних задач покриття областей довільної форми потребує передусім вирішення теоретичних питань, пов'язаних з аналітичним описом геометричних об'єктів довільної форми та формалізацією взаємовідношень між такими складними об'єктами.

Варто зауважити, що в розроблення відповідної теорії значний внесок зробили українські вчені: академік НАН України Володимир Логвинович Рвачов і член-кореспондент НАН України Юрій Григорович Стоян. В.Л. Рвачов запропонував теорію R-функцій [1, 2], яка уможливила розв'язування оберненої задачі аналітичної геометрії — побудову рівняння границі складного матеріального об'єкта за його зображенням. Ю.Г. Стоян досліджував задачі пакування та компонування геометричних об'єктів довільної форми [3—5], для формалізації яких було розроблено теорію Ф-функцій, що дало змогу аналітично описувати умови неперетину об'єктів. Зазначені дослідження мають фундаментальний характер і визнані світовою науковою спільнотою як пріоритетні.

Однак формалізація задач покриття та методів їх розв'язання потребує дослідження взаємовідношень одночасно всієї сукупності об'єктів з урахуванням їх довільної форми та метричних параметрів. При цьому постає низ-

ка теоретичних проблем, пов'язаних із різноманітністю задач покриття, які можна класифікувати за такими критеріями:

• розмірність (на площині, у просторі);

• структура (нерегулярні, періодичні, ґратчасті);

• форма області та покривальних об'єктів (проста, складна);

• вимоги (покриття повне, часткове, максимальне, кратне тощо);

• метричні параметри області та об'єктів (фіксовані, змінні);

• задані критерії (мінімальна кількість покривальних об'єктів, максимальна площа області покриття, спеціальні критерії, багатокритеріальні задачі);

• обмеження на параметри розміщення (дискретні, неперервні, змішані).

Відповідно, це зумовило актуальність таких напрямів теоретичних досліджень:

1. *Формалізація задач покриття:*

• побудова математичних моделей задач покриття, зокрема визначення області покриття, об'єктів покриття та критеріїв оптимальності;

• формулювання умов покриття (повне покриття області або допустимість часткових покриттів).

2. *Дослідження типів об'єктів покриття*:

• вивчення різних типів об'єктів покриття та їхніх властивостей;

• аналіз впливу форми та розміру об'єктів покриття на складність задачі.

3. *Оптимізація покриття*:

• розроблення методів та алгоритмів (точних і евристичних) пошуку оптимального покриття;

• дослідження ефективності та обчислювальної складності цих алгоритмів.

4. *Аналіз складності задач покриття*:

• визначення класів складності задач для різних типів об'єктів та областей;

• доведення NP-повноти формулювань задач покриття.

5. *Оцінка якості покриття*:

• розроблення методів оцінки якості покриття, в тому числі апроксимаційних алгоритмів та їх конкурентних співвідношень;

• порівняння отриманих рішень з оптимальними значеннями (якщо вони відомі) або з рішеннями, отриманими з використанням інших підходів.

6. *Геометричні властивості покриття*:

• вивчення властивостей оптимальних покриттів, таких як щільність, розподіл об'єктів покриття, їхні зв'язки з топологією області, що покривається;

• дослідження властивостей границь та взаємодії об'єктів покриття.

Реалізуючи перелічені вище напрями, ми отримали такі наукові результати*:*

• розроблено принципово нові підходи до формалізації задач покриття, пов'язаних з обробленням, відображенням та перетворенням геометричної інформації;

• побудовано конфігураційний простір геометричних об'єктів, що дало змогу узагальнити й істотно розвинути сучасні підходи до дослідження довільних просторових конфігурацій, зокрема конфігурацій покриття;

• сформульовано умови повного, часткового та максимального покриття на основі спеціального класу функцій;

• запропоновано концепцію моделювання просторових конфігурацій покриття з використанням сучасних пакетів обчислювальної геометрії; результати узагальнено на довільні просторові конфігурації;

• запропоновано низку оптимізаційних методів розв'язування різних класів задач покриття залежно від форми області та покривальних об'єктів;

• засновано новий напрям у комбінаторній геометрії — теорію евклідових комбінаторних конфігурацій просторових об'єктів та розроблено методи евклідової комбінаторної оптимізації;

• запропоновано й теоретично обґрунтовано нові методи глобальної та локальної оптимізації, які є ефективними як у задачах максимального покриття, так і в загальній теорії нелінійної оптимізації;

• здійснено системний аналіз задач покриття й досліджено їхні особливості з урахуванням предметної галузі застосування.

Зазначені результати узагальнено в монографіях [6—12] та опубліковано в статтях у високорейтингових журналах [13—28].

Отримані результати мають важливе теоретичне значення, оскільки дозволили *вперше* побудувати адекватні моделі задач покриття з об'єктами довільної форми і запропонувати ефективні оптимізаційні методи їх розв'язування. При цьому ми враховували досвід українських шкіл з дослідження операцій та оптимізації складних систем. Завдяки плідній співпраці з фахівцями таких провідних установ, як Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» та ін., вдалося успішно впровадити розроблені ними методи комбінаторної оптимізації, недиференційованої оптимізації, нелінійного програмування при розв'язуванні задач оптимального покриття. Наші методи взаємодоповнювали один одного як з теоретичної, так і з практичної точки зору.

Задачі оптимального покриття мають широке коло практичних застосувань, зокрема в таких галузях:

• комп'ютерна графіка (покриття поверхонь простими елементами для подальшого аналізу та візуалізації);

• дослідження операцій (розміщення об'єктів, покриття доменів за допомогою антен або датчиків);

• маршрутизація та планування (покриття регіонів базовими станціями для забезпечення мобільного зв'язку);

• робототехніка (покриття територій при переміщенні роботів та інших мобільних об'єктів);

• мережеві системи та комунікації (оптимальне розміщення точок доступу в бездротових мережах для забезпечення повного покриття зони обслуговування);

• географія та картографія (використання покриттів для побудови карт та географічних інформаційних систем);

• екологія (вивчення та моделювання просторового розподілу видів або ресурсів в екосистемах).

Моделі й методи оптимального покриття вкрай важливі в задачах моніторингу територій та об'єктів критичної інфраструктури. Під моніторингом розуміють процес постійного спостереження та аналізу певних об'єктів, території, простору з метою отримання інформації про різні аспекти їхнього стану та змін у них. Зрозуміло, що задачі моніторингу територій мають геометричну інтерпретацію. Дійсно, засоби спостереження (супутники, безпілотні літальні апарати, наземні РЛС, сенсори, відеокамери тощо), з огляду на їхні фізико-технічні характеристики, здатні контролювати обмежену область, а технології моніторингу територій ґрунтуються на геометричних властивостях зон спостереження. Отже, перетворюючи фізичну інформацію на геометричну, можна побудувати адекватні моделі задач моніторингу територій, призначені для різних завдань.

Оптимізаційні задачі геометричного покриття набули значного поширення в системах мобільного зв'язку та в бездротових сенсорних мережах, які мають як наземну, так і повітряну складову, що зумовлено використанням дронів.

Зазначені дослідження ми проводили в рамках низки наукових проєктів МОН України, Національного фонду досліджень України, суб'єктів госпрозрахункової діяльності. Зокрема, в останні 5 років це були проєкти «Технології, засоби математичного моделювання, оптимізації та системного аналізу задач покриття в системах моніторингу простору»; «Математичне моделювання комбінаторних конфігурацій та методи їх оптимізації з урахуванням просторових і фізико-метричних параметрів»; «Технології нейронечіткого моделювання і оптимізації в системах розпізнавання образів та штучного інтелекту»; «Розробка методів автоматизованої обробки багатоканальних зображень у мобільних системах з використанням навчених нейронних мереж».

Кожен з цих проєктів має теоретичну і прикладну складові. Наприклад, на рис. 2 наведено архітектуру розробленої нами гібридної

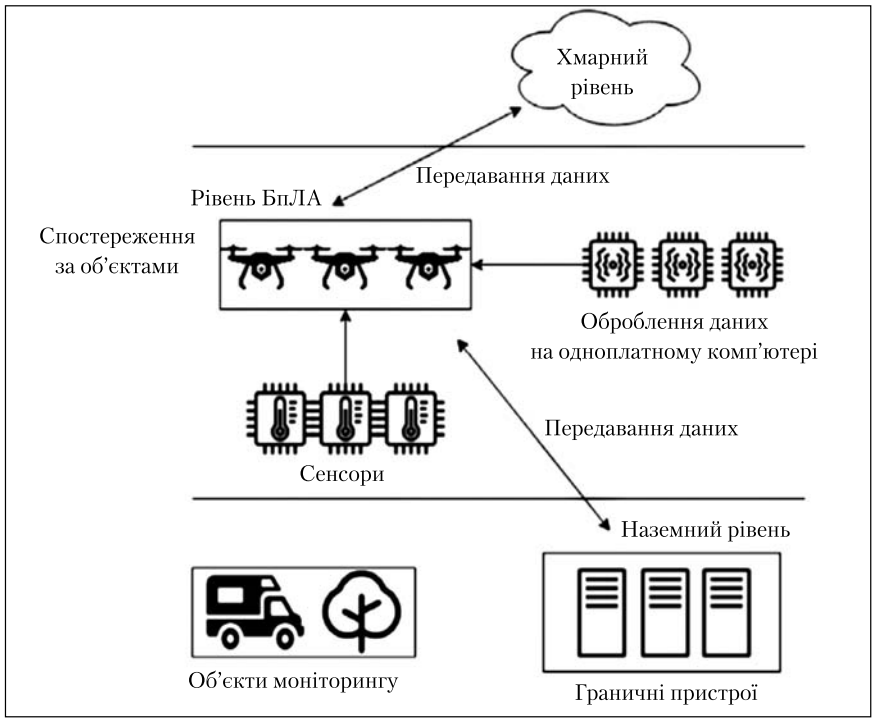

Рис. 2. Архітектура гібридної сенсорної мережі

сенсорної мережі, яка вже використовується на практиці. Для підвищення надійності та відмовостійкості бездротових сенсорних мереж ми запропонували моделі кратного покриття.

Отримані нами результати впроваджено також у системах моніторингу лісових пожеж. Для пошуку вогнища ми враховували просторово-вимірювальні властивості як відеокамер, так і сенсорів температури й диму. Крім того, ми розглядаємо можливість застосування моделей і методів геометричного покриття в задачах гуманітарного розмінування.

Окремо слід відзначити застосування наших результатів для вирішення практичних завдань, пов'язаних із визначенням оптимальних місць розташування об'єктів охорони здоров'я (лікарень, клінік, мобільних медичних центрів) та призначенням для цих установ точок попиту (пацієнтів чи населених пунктів). Ми розв'язували такі задачі комплексно з урахуванням прогнозів поширення різних інфекційних захворювань на різних територіях та в різних умовах. Ці дослідження проводилися в рамках наукового проєкту Національного фонду досліджень України «Розробка інтелектуальних технологій оцінки епідемічної ситуації для підтримки прийняття управлінських рішень у сфері біобезпеки населення» у 2020—2023 рр. та продовжуються зараз у рамках проєкту «Моделювання та прогнозування поширення інфекції у воєнних та післявоєнних умовах з використанням даних епідеміологічного, поведінкового та геномного спостереження» (програма міжнародного співробітництва IMPRESS U (США—Польща—Україна) за участю Університету штату Джорджія (Georgia State University), Університету штату Коннектикут (University of Connecticut), Інституту математики Лодзького технічного університету, Вроцлавського центру охорони здоров'я, Харківського національного медичного університету та Центру контролю і профілактики хвороб МОЗ України).

Отже, можна констатувати, що актуальність подальшого розвитку теорії геометричного покриття доведено фундаментальністю отриманих нами результатів та широкими

можливостями їх практичного застосування. Моделі й оптимізаційні методи нерегулярного покриття дозволяють значно підвищити ефективність наявних підходів, а також поліпшити якість проєктування та функціонування систем моніторингу різного призначення. Задачі оптимального покриття є складовою широкого кола завдань, які виникають при дослідженні систем моніторингу територій (в інтересах екологічної, цивільної, громадської, військової безпеки), систем логістики, зв'язку, розвитку регіональної інфраструктури тощо. Це сприяє розширенню співпраці з фахівцями-практиками в зазначених сферах діяльності і потребує поглиблення інформаційної обізнаності потенційних замовників.

REFERENCES
[СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ]

1. Rvachev V.L. *Geometricheskiye prilozheniya algebry logiki*. Kyiv: Tekhnika, 1967 (in Russian).
   [Рвачев В.Л. *Геометрические приложения алгебры логики*. Киев: Техника, 1967.]
2. Rvachev V.L. *Teoriya R-funktsiy i nekotoryye yeye prilozheniya*. Kyiv: Naukova Dumka, 1982 (in Russian).
   [Рвачев В.Л. *Теория R-функций и некоторые ее приложения*. Киев: Наукова думка, 1982.]
3. Stoyan Yu.G. *Razmeshcheniye geometricheskikh obyektov*. Kyiv: Naukova Dumka, 1975 (in Russian).
   [Стоян Ю.Г. *Размещение геометрических объектов*. Киев: Наукова думка, 1975.]
4. Stoyan Yu.G., Gil N.I. *Metody i algoritmy razmeshcheniya ploskikh geometricheskikh obyektov*. Kyiv: Naukova Dumka, 1976 (in Russian).
   [Стоян Ю.Г., Гиль Н.И. *Методы и алгоритмы размещения плоских геометрических объектов*. Киев: Наукова думка, 1976.]
5. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V. *Matematicheskiye modeli i optimizatsionnyye metody geometricheskogo proyektirovaniya*. Kyiv: Naukova Dumka, 1986 (in Russian).
   [Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. *Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования*. Киев: Наукова думка, 1986.]
6. Yakovlev S., Pichugina O., Koliechkina L. *Combinatorial point configurations and polytopes*. Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, 2023. https://doi.org/10.18778/8331-391-7
7. Stoyan Yu.G., Yaskov G.M., Romanova T.E., Yakovlev S.V. *Pakuvannia sferychnykh obiektiv: modeli, metody, zastosuvannia*. Kyiv: Naukova Dumka, 2021 (in Ukrainian).
   [Стоян Ю.Г., Яськов Г.М., Романова Т.Є., Яковлев С.В. *Пакування сферичних об'єктів: моделі, методи, застосування*. Київ: Наукова думка, 2021.]
8. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V. *Matematychni modeli ta optymizatsiini metody heometrychnoho proiektuvannia*. Kyiv: Naukova Dumka, 2020 (in Ukrainian).
   [Стоян Ю.Г., Яковлев С.В. *Математичні моделі та оптимізаційні методи геометричного проєктування*. Київ: Наукова думка, 2020.]
9. Kharchenko V.S., Yakovlev S.V., Gorbachyk O.S. et al. *Zabezpechennia funktsionalnoi bezpeky krytychnykh informatsiino-keruiuchykh system*. Kharkiv, 2019 (in Ukrainian).
   [Харченко В.С., Яковлев С.В., Горбачик О.С. та ін. *Забезпечення функціональної безпеки критичних інформаційно-керуючих систем*. Харків: Константа, 2019.]
10. Yakovlev S.V., Pychugina O.S. *Nepreryvnyye funktsional'nyye predstavleniya v zadachakh diskretnoy optimizatsii*. Kharkiv, 2018 (in Russian).
    [Яковлев С.В., Пичугина О.С. *Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации*. Харьков: Золотая миля, 2018.]
11. Stoyan Yu.G., Yakovlev S.V., Pychugina O.S. *Yevklidovy kombinatornyye konfiguratsii*. Kharkiv, 2018 (in Russian).
    [Стоян Ю.Г., Яковлев С.В., Пичугина О.С. *Евклидовы комбинаторные конфигурации*. Харьков: Константа, 2017.]
12. Hrytsyk V.V., Shevchenko A.I., Kiselova O.M., Yakovlev S.V. et al. *Matematychni metody optymizatsii ta intelektualni kompiuterni tekhnolohii modeliuvannia skladnykh protsesiv i system z urakhuvanniam prostorovykh form obiektiv*. Donetsk, 2011 (in Ukrainian).
    [Грицик В.В., Шевченко А.І., Кісельова О.М., Яковлев С.В. та ін. *Математичні методи оптимізації та інтелектуальні комп'ютерні технології моделювання складних процесів і систем з урахуванням просторових форм об'єктів*. Донецьк: Наука і освіта, 2011.]

13. Skorobohatko S., Fesenko H., Kharchenko V., Yakovlev S. Architecture and Reliability Models of Hybrid Sensor Networks for Environmental and Emergency Monitoring Systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2024. **60**(2): 293—304. https://doi.org/10.1007/s10559-024-00670-x
14. Chumachenko D., Yakovlev S. Artificial Intelligence Algorithms for Healthcare. *Algorithms*. 2024. **17**(3): 105. https://doi.org/10.3390/a17030105
15. Yakovlev S., Kiseleva O., Podzeha D. Maximum Service Coverage in Business Site Selection Using Computer Geometry Software. *Electronics*. 2023. **12**(10): 2329. https://doi.org/10.3390/electronics12102329
16. Yakovlev S.V. The Concept of Modeling Packing and Covering Problems Using Modern Computational Geometry Software. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. **59**(1): 108—119. https://doi.org/10.1007/s10559-023-00547-5
17. Skob Yu., Yakovlev S. Numerical Assessment of Terrain Relief Influence on Consequences for Humans Exposed to Gas Explosion Overpressure. *Computation*. 2023. **11**(2): 19. https://doi.org/10.3390/computation11020019
18. Chumachenko D., Yakovlev S. Effective Utilization of Data for Predicting COVID-19 Dynamics: An Exploration through Machine Learning Models. *International Journal of Telemedicine and Applications*. 2023. **2023**: 9962100. https://doi.org/10.1155/2023/9962100
19. Skob Yu., Yakovlev S. Numerical Evaluation of Wind Speed Influence on Accident Toxic Spill Consequences Scales. *Environmental and Climate Technologies*. 2023. **27**(1): 445—463. https://doi.org/10.2478/rtuect-2023-0033
20. Pichugina O., Yakovlev S. Euclidean Combinatorial Configurations: Continuous Representations and Convex Extensions. In: Lytvynenko V., Babichev S., Wójcik W., Vynokurova O., Vyshemyrskaya S., Radetskaya S. (eds) *Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making*. ISDMCI 2019. Advances in Intelligent Systems and Computing. Vol. 1020. Springer, Cham, 2020. https://doi.org/10.1007/978-3-030-26474-1_5
21. Yakovlev S.V. Formalizing Spatial Configuration Optimization Problems with the Use of a Special Function Class. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**(4): 581—589. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00167-y
22. Mashtalir S.V., Yakovlev S.V. Clustering Video Sequences by the Method of Harmonic k-Means. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019. **55**(2): 200—206. https://doi.org/10.1007/s10559-019-00124-9
23. Yakovlev S.V. Properties of Combinatorial Optimization Problems over Polyhedral-Spherical Sets. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. **54**(1): 99—109. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0011-6
24. Stoyan Y.G., Yakovlev S.V. Configuration Space of Geometric Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. **54**(5): 716—726. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0073-5
25. Yakovlev S.V. Method of Artificial Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. **53**(5): 725—731. https://doi.org/10.1007/s10559-017-9974-y
26. Yakovlev S. Convex Extensions in Combinatorial Optimization and their Applications. In: Butenko S., Pardalos P., Shylo V. (eds) *Optimization Methods and Applications: Springer Optimization and Its Applications*. Vol. 130. Springer, Cham, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68640-0_27
27. Mashtalir V.P., Yakovlev S.V. Group Structures on Quotient Sets in Classification Problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. **50**(4): 507—518. https://doi.org/10.1007/s10559-014-9639-z
28. Yakovlev S. Convex Extensions and Continuous Functional Representations in Optimization with their Applications. *J. Coupled Syst. Multiscale Dyn*. 2016. **4**(2): 129—152.

Sergiy V. Yakovlev

National Aerospace University — Kharkiv Aviation Institute, Kharkiv, Ukraine

ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1707-843X

MODELS AND METHODS FOR OPTIMAL COVERAGE OF AREAS OF ARBITRARY SHAPE: THEORY AND PRACTICAL APPLICATION

According to the materials of scientific report at the meeting of the Presidium of the NAS of Ukraine, June 12, 2024

The report presents the results of promising research in the field of mathematical modeling of spatial configurations, optimization methods of geometric coverage, and examples of their practical application. The study of the problems of covering complex areas with objects of arbitrary shape is interdisciplinary in character and is based on modern advances in mathematics, computer science, information technology, and artificial intelligence. Such problems are part of solutions to a wide range of tasks related to various systems for monitoring territories, logistics, communications, development of regional and critical infrastructure, etc.

Cite this article: Yakovlev S.V. Models and methods for optimal coverage of areas of arbitrary shape: theory and practical application. *Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr*. 2024. (8): 17—23. https://doi.org/10.15407/visn2024.08.017