doi: https://doi.org/10.15407/visn2025.02.074

САВЧЕНКО
Марія Олексіївна —
кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник відділу нелінійного аналізу та рівнянь математичної фізики Інституту прикладної математики і механіки НАН України

ФУНКЦІОНАЛЬНІ КЛАСИ РОЗВ’ЯЗКІВ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ З НЕСТАНДАРТНИМИ УМОВАМИ ЗРОСТАННЯ

За матеріалами наукового повідомлення на засіданні Президії НАН України 26 грудня 2024 р.

У доповіді наведено результати дослідження функціональних класів розв’язків еліптичних рівнянь з нестандартними умовами зростання. Ці класи розв’язків охоплюють нові випадки нерівномірно еліптичних двофазних рівнянь, вироджених двофазних рівнянь і рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Доведено, що функції з цих класів є неперервними і задовольняють нерівності Гарнака. Однією з ключових новацій є розроблення універсального підходу для опису еліптичних рівнянь з нестандартними умовами зростання через точний варіант узагальненої нелогарифмічної умови неперервності для коефіцієнтів.

Актуальність тематики обговорюваних досліджень визначається кількома факторами. По-перше, еліптичні рівняння з нестандартними умовами зростання мають складну математичну структуру, що, з одного боку, ускладнює застосування відомих класичних методів дослідження розв’язків нелінійних рівнянь, а в деяких окремих випадках навіть унеможливлює їх використання. З іншого боку, це спонукає до розроблення нових підходів та адаптації вже наявних методів дослідження.

По-друге, для рівнянь з нестандартними умовами зростання якісну теорію ще недостатньо розвинено, що створює широкий спектр відкритих задач для подальших досліджень.

По-третє, цей напрям досліджень є популярним за кордоном, що підтверджується численними публікаціями іноземних колег. Можна виокремити дві потужні наукові школи, які займаються такими дослідженнями: одна з них знаходиться в Італії, ключовою фігурою в ній є професор Джузепе Мінджоне (Giuseppe Mingione), а друга — у Фінляндії, її науковими лідерами є Пітер Хасто (Peter Hästö) і Петтері Хар’юлехто (Petteri Harjulehto). В Україні цей напрям активно розвивається завдя-

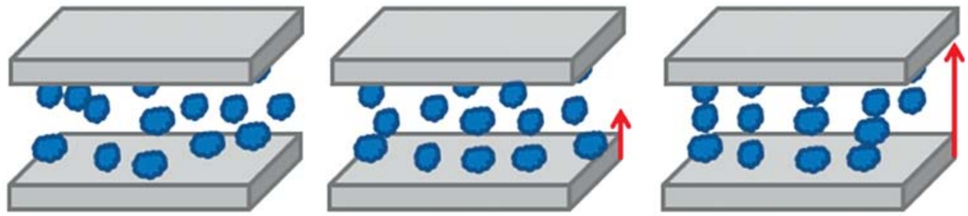

Рис. 1. Зміни в розташуванні дисперсних частинок електрореологічних рідин залежно від інтенсивності електричного поля

ки роботам Ігоря Ігоровича Скрипніка та його співавторів.

По-четверте, такі рівняння мають багато практичних застосувань, але перед тим як до них перейти, ознайомимося з найпопулярнішими представниками цих рівнянь:

$$\mathrm{d}iv(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) = 0, \quad p(x) > 1; \tag{1}$$

$$\mathrm{d}iv(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + a(x)|\nabla u|^{q-2}\nabla u) = 0, \quad a(x) \geq 0{,}1 < p < q; \tag{2}$$

$$\mathrm{d}iv(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(1 + a(x)\log(1 + |\nabla u|))) = 0, \quad a(x) \geq 0;\ p > 1; \tag{3}$$

$$\mathrm{d}iv(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(1 + \log(1 + a(x)|\nabla u|))) = 0, \quad a(x) \geq 0;\ p > 1. \tag{4}$$

Рівняння (1) називають рівнянням $p(x)$-Лапласа, і в ньому порядок зростання за градієнтом залежить від значення показника-функції $p(x)$. Двофазне еліптичне рівняння (2) іноді ще називають (p, q)-фазним еліптичним рівнянням, і в ньому під дивергенцією стоїть сума двох доданків: p-Лапласа та q-Лапласа. Коефіцієнт $a(x)$ біля доданку q-Лапласа може приймати додатні значення або дорівнювати нулю. У точках, де $a(x) = 0$, рівняння має p–1 порядок зростання за градієнтом, а в точках, де $a(x) > 0$, ключову роль відіграє q-Лаплас. Таким чином, коефіцієнт $a(x)$ змінює порядок зростання рівняння за градієнтом з порядку p на q і навпаки, залежно від значення аргументу функції $a(x)$. Рівняння (3) і (4) називають виродженими двофазними рівняннями, вони так само, як і рівняння (2), мають коефіцієнт $a(x)$, який змінює порядок зростання рівняння за градієнтом, але порядок змінюється не суттєво, тому що у множника, що стоїть біля $a(x)$, градієнт розв'язку знаходиться під логарифмом. Підсумовуючи, можна сказати, що спільною ознакою наведених вище рівнянь є змінність порядку зростання рівняння за градієнтом залежно від просторової змінної, що реалізується для цих рівнянь за допомогою коефіцієнта $a(x)$ та показника $p(x)$. Ця спільна ознака відносить ці рівняння до категорії рівнянь з нестандартними умовами зростання.

Тепер розглянемо практичні застосування цих рівнянь. Їх використовують у математичному моделюванні електрореологічних рідин, властивості яких можуть змінюватися під впливом зовнішнього електричного поля, що відбувається завдяки дисперсним частинкам (наприклад, сферичним частинкам або волокнам), що перебувають у підвішеному стані в цій рідині. На рис. 1 показано, як змінюється розташування частинок під дією електричного поля залежно від його інтенсивності. Математичне моделювання таких рідин було предметом досліджень багатьох авторів, які використовували різні підходи, як математичні, так і чисельні. Нещодавно Міхаель Ружичка (M. Ružička) розробив нову математичну модель [1, 2], яка враховує складну взаємодію між електричним полем та рідиною, використовуючи рівняння з нестандартними умовами зростання, зокрема (p, q)-фазні еліптичні рівняння.

При цьому доданок p-Лапласа дозволяє моделювати дифузію частинок рідини за відсутності зовнішнього електричного поля, тоді як доданок q-Лапласа використовують для опису змін, які виникають під впливом неоднорідно-

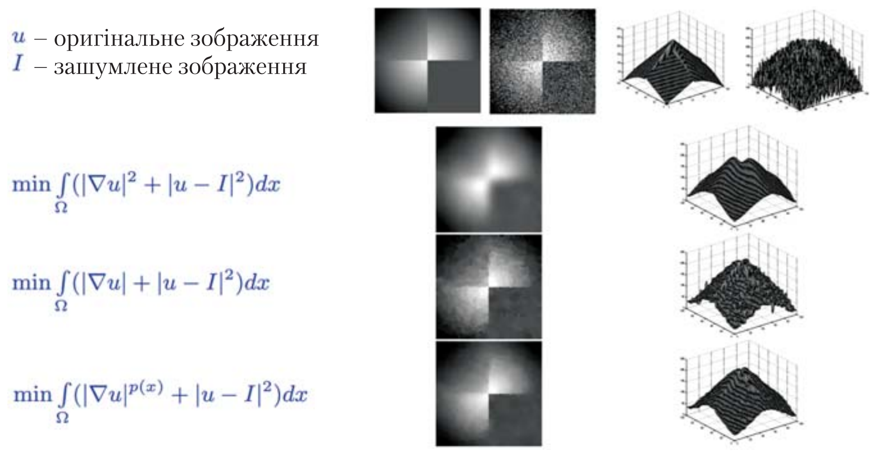

Рис. 2. Результати мінімізації трьох функціоналів енергії

го електричного поля або просторових змін у структурі рідини. Функція $a(x)$ моделює неоднорідність середовища, зокрема зміни в щільності частинок або варіації розподілу електричного поля в різних точках.

Ще однією важливою сферою застосувань є обробка зображень, зокрема усунення шумів, що є однією з ключових проблем у цій галузі. Для усунення шумів на зображенні розробляють різні методи, які можуть вибірково згладити зашумлене зображення без втрати важливих характеристик, таких як, наприклад, краї зображення. Останніми роками варіаційні методи зменшення шуму набули значної популярності як у теоретичному, так і в чисельному контекстах. Основна ідея варіаційних методів полягає в мінімізації функціонала енергії, який поєднує два основні компоненти: перший забезпечує відповідність між зашумленим та оригінальним зображеннями (наприклад, усуває відмінність між ними), а другий, регуляризаційний компонент здійснює згладжування зображення і зменшує шумові впливи. Отже, варіаційні методи дозволяють досягти мінімізації шумових впливів, зберігаючи одночасно ключові деталі зображення, зокрема краї.

На рис. 2 наведено результати мінімізації трьох функціоналів енергії [3], де для третього функціонала, який стоїть у четвертому рядку, рівняння Ейлера майже збігається з рівнянням (1). У першому рядку показано оригінальні і зашумлені зображення, а з другого по четвертий рядок наведено результати мінімізації функціоналів. Якщо проаналізувати ці результати, видно, що в другому рядку отримано добре знешумлене зображення, однак чіткість країв було втрачено. У третьому рядку зображення зберігає чіткість країв, але погано знешумлене. А в четвертому рядку отримано оптимальний результат — зображення достатньо знешумлене і при цьому залишилася чіткість країв.

Інтегральні функціонали, для яких рівняннями Ейлера слугують рівняння з нестандартними умовами зростання, є також важливим інструментом для опису поведінки анізотропних матеріалів [4, 5], особливо тих, що характеризуються сильною залежністю властивостей від напрямку. Їх застосовують для моделювання складних процесів, у яких матеріали можуть виявляти різну механічну або термічну поведінку залежно від напрямку в просторі.

Тепер перейдемо до теоретичної частини і почнемо з короткої історії дослідження еліптичних рівнянь з нестандартними умовами зростання. Інтенсивно їх почали вивчати в 1980-х роках, досліджуючи варіаційні задачі з нестандартними підінтегральними функціями в контексті усереднення та явища Лаврентьєва. Ключову роль у дослідженні таких рівнянь відіграє логарифмічна умова на показники нелінійності. Для рівняння $p(x)$-Лапласа ця умова має такий вигляд:

$$\underset{B_r(x_0)}{osc}\, p(x) := \underset{B_r(x_0)}{sup}\, p(x) - \underset{B_r(x_0)}{inf}\, p(x) \le \frac{L}{\ln \frac{1}{r}},$$

де $0 < r < 1$; $0 < L < \infty$, а $B_r(x_0)$ — куля з центром у точці x_0 і радіусом r. Для двофазного еліптичного рівняння (2) або для вироджених двофазних еліптичних рівнянь (3) і (4) логарифмічна умова накладається на коефіцієнт $a(x)$. Ця умова передбачає щільність гладких функцій у просторах Соболєва зі змінним показником і є критичною для обмеженості класичних операторів згладжування в просторах Лебега зі змінним показником. Крім того, логарифмічна умова гарантує, що багато властивостей регулярності розв'язків рівнянь зі стандартною коерцитивністю та умовами зростання можна перенести на рівняння зі змінним показником нелінійності. Зокрема, з цієї умови випливає гельдерівська неперервність розв'язку та градієнту розв'язку, властивість вищої градієнтної інтегрованості розв'язків, критерій регулярності граничної точки розв'язків задачі Діріхле, нерівність Гарнака. У 2004 р. було отримано більш точну умову, відому як нелогарифмічна умова, для рівняння $p(x)$-Лапласа, яка має такий вигляд:

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_0)} p(x) \le \frac{\ln \mu(r)}{\ln \frac{1}{r}},$$

де права частина повинна задовольняти умову

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln \mu(r)}{\ln \frac{1}{r}} = 0,$$

і такий інтеграл має бути розбіжним у точці 0:

$$\int_0 \mu^{-\frac{n}{p}}(r)\frac{dr}{r} = +\infty.$$

Постає логічне питання: чи буде з нелогарифмічної умови випливати наявність певних властивостей розв'язків, як це було для логарифмічної умови? Над відповіддю на це питання працює не так багато науковців, і більшість публікацій за цим напрямом належать співробітникам Інституту прикладної математики і механіки НАН України, а закордонні колеги продовжують дослідження рівнянь з логарифмічною умовою. Результати, які наведено далі, частково відповідають на поставлене питання.

Основні результати ми сформулюємо для функцій із класів Де Джорджі, значущість яких полягає в тому, що вони є достатньо загальними, щоб включати не лише слабкі розв'язки квазілінійних еліптичних рівнянь у дивергентній формі, а й локальні мінімуми, або квазімінімуми функціоналів, які не обов'язково допускають рівняння Ейлера.

Отже, введемо означення цих класів. Будемо вважати, що вимірна функція u належить функціональному класу Де Джорджі $DG^{\pm}(B_R(x_0))$, якщо $u \in W^{1,1}(B_R(x_0)) \cap L^{\infty}(B_R(x_0))$, виконано таку умову:

$$\int_{B_R(x_0)} \Phi(x, |\nabla u|)dx < \infty,$$

і існує таке число $c > 0$, що для будь-якої кулі $B_r(x_0) \in B_R(x_0)$ будь-яких чисел $k \in R$ і $\sigma \in (0, 1)$ виконуються інтегральні нерівності:

$$\int_{B_{r(1-\sigma)}(x_0)} \Phi\big(x, |\nabla(u-k)_{\pm}|\big)dx \le$$

$$\le \gamma \int_{B_r(x_0)} \Phi\left(x, \frac{(u-k)_{\pm}}{\sigma r}\right)dx,$$

де функція Φ задовольняє нелогарифмічну умову

$$\left(r^{-n}\int_{B_r(x_0)} \left[\Phi\left(x,\frac{v}{r}\right)\right]^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \times$$

$$\times \left(r^{-n}\int_{B_r(x_0)} \left[\Phi\left(x,\frac{v}{r}\right)\right]^{-t} dx\right)^{\frac{1}{t}} \le c(K)\Lambda(x_0, r),$$

$$r \le v \le K\lambda(r), \qquad (5)$$

за деяких припущень щодо функцій $\lambda(r)$ і $\Lambda(x_0, r)$ і чисел $t, s > 0$. Умова (5) суттєво відрізняється від представленої раніше нелогарифмічної умови, а також від логарифмічної, але за певного вибору функцій $\lambda(r)$, $\Lambda(x_0, r)$ та Φ можна отримати функціональні класи, які обслуговують конкретні еліптичні рівняння з нестандартними умовами зростання за нелогарифмічних умов або відомих логарифмічних. Наведемо приклади, які покажуть це наочно.

Приклад 1. Якщо $\Phi_1(x, v) = v^p + a(x)v^q$,

$$\lambda(r) = \left[\ln\frac{1}{r}\right]^{-L}, \ \Lambda_\lambda(x_0, r) \equiv 1,$$

тоді отримаємо функціональний клас, який обслуговує двофазне еліптичне рівняння (2) з нелогарифмічною умовою

$$\operatorname*{osc}_{B_r(x_0)} a(x) \le A\, r^{q-p}\left[\ln\frac{1}{r}\right]^{L(q-p)}.$$

Приклад 2. Якщо $\Phi_1(x, v) = v^p + a(x)v^q$, $\lambda(r) \equiv 1$,

$$\Lambda_1(x_0, r) = \left[\ln\, \ln\frac{1}{r}\right]^L,$$

тоді маємо функціональний клас Де Джорджі, який містить розв'язки нерівномірно еліптичного двофазного рівняння (2) з умовою

$$\left[\ln\, \ln\frac{1}{r}\right]^{-L} \le a(x) \le 1.$$

Приклад 3. У випадку, коли $\Phi_2(x, v) = v^{p(x)}$, $\lambda(r) \equiv 1$,

$$\Lambda_1(x_0, r) = \left[\ln\, \ln\frac{1}{r}\right]^L,$$

отримуємо функціональний клас розв'язків рівняння $p(x)$-Лапласа (1) з нелогарифмічною умовою

$$\underset{B_r(x_0)}{osc}\, p(x) \le L\,\frac{\ln \ln \ln\frac{1}{r}}{\ln\frac{1}{r}}.$$

Приклад 4. Беручи функції $\Phi_3(x, v) = v^p(1 + a(x)\ln(1 + v))$, $\lambda(r) \equiv 1$,

$$\Lambda_1(x_0, r) = \left[\ln\, \ln\frac{1}{r}\right]^L,$$

будемо мати функціональний клас Де Джорджі, який обслуговує вироджене двофазне еліптичне рівняння (3) з нелогарифмічною умовою

$$\underset{B_r(x_0)}{osc}\, a(x) \le A\,\frac{\left(\ln\, \ln\frac{1}{r}\right)^L}{\ln\frac{1}{r}}.$$

Приклад 5. Якщо $\Phi_4(x, v) = v^p(1 + \ln(1 + a(x)v))$,

$$\lambda(r) = \left[\ln\,\frac{1}{r}\right]^{-L},\ \ \Lambda_\lambda(x_0, r) \equiv 1,$$

матимемо функціональний клас розв'язків виродженого двофазного еліптичного рівняння (4) з нелогарифмічною умовою

$$\underset{B_r(x_0)}{osc}\, a(x) \le Ar\,\left(\ln\,\frac{1}{r}\right)^L.$$

Зауважимо, що у випадку, коли $\lambda(r) \equiv \Lambda_\lambda(x_0, r) \equiv 1$, умова (5) спрощується до логарифмічної.

Тепер сформулюємо основні результати, які було отримано для функцій з класу Де Джорджі. Слід зауважити, що представлені функціональні класи охоплюють нові випадки нерівномірно еліптичних двофазних, вироджених двофазних рівнянь і рівнянь зі змінними показниками нелінійності. Однією з важливих новацій є розроблення нового універсального підходу для опису еліптичних рівнянь із нестандартними умовами зростання з точки зору точного варіанту узагальненої нелогарифмічної умови неперервності на коефіцієнти. За певних умов на функції $\lambda(r)$, $\Lambda(x_0, r)$ отримано слабку нерівність Гарнака, нерівність Гарнака та неперервність розв'язків еліптичних і нерівномірно еліптичних рівнянь з нестандартним зростанням за нелогарифмічних умов. Крім того, здійснено узагальнення попередніх результатів, які покривають випадки як нелогарифмічних, так і логарифмічних умов. Одним із важливих досягнень є також отримання слабкої нерівності Гарнака для необмежених невід'ємних розв'язків еліптичних рівнянь з нестандартним зростанням за нелогарифмічних умов, що є важливим результатом, оскільки більшість відомих нам досліджень стосуються обмежених розв'язків. Наведені вище результати опубліковано в роботах [6—9].

REFERENCES

1. Ružička M. *Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 2000. https://doi.org/10.1007/BFb0104029
2. Rajagopal K.R., Ružička M. Mathematical modeling of electro-rheological fluids. *Cont. Mech. Therm*. 2001. **13**: 59—78. https://doi.org/10.1007/s001610100034
3. Chen Yu., Levine S., Rao M. Variable Exponent, Linear Growth Functionals in Image Restoration. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 2006. **66**(4). https://doi.org/10.1137/05062452
4. Cowin S.C. *Continuum Mechanics of Anisotropic Materials*. Springer New York, NY, 2013. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5025-2
5. Berdichevsky V.L. *Variational Principles of Continuum Mechanics*. Springer Berlin, Heidelberg, 2009. https://doi.org/10.1007/978-3-540-88467-5
6. Savchenko M.O., Skrypnik I.I., Yevgenieva Ye.A. A note on the weak Harnack inequality for unbounded minimizers of elliptic functionals with generalized Orlicz growth. *Annali di Matematica Pura ed Applicata*. 2025. https://doi.org/10.1007/s10231-025-01553-4
7. Savchenko M., Skrypnik I., Yevgenieva Y. Continuity and Harnack inequalities for local minimizers of non-uniformly elliptic functionals with generalized Orlicz growth under the non-logarithmic conditions. *Nonlinear Analysis*. 2023. **230**: 113221. https://doi.org/10.1016/j.na.2023.113221
8. Savchenko M., Skrypnik I., Yevgenieva Y. Weak Harnack inequality for unbounded solutions to the $p(x)$-Laplace equation under the precise non-logarithmic conditions. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the NAS of Ukraine*. 2023. **37**(1): 48—60. https://doi.org/10.37069/1683-4720-2023-37-5
9. Shan M.A., Skrypnik I.I., Voitovych M.V. Harnack's inequality for quasilinear elliptic equations with generalized Orlicz growth. *Electronic Journal of Differential Equations*. 2021. **2021**(27): 1—16. https://hdl.handle.net/10877/14424

Mariia O. Savchenko
Institute of Applied Mathematics and Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Sloviansk, Ukraine
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-9217-9359

FUNCTIONAL CLASSES OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC EQUATIONS WITH NON-STANDARD GROWTH CONDITIONS

According to the materials of report at the meeting of the Presidium of the NAS of Ukraine, December 26, 2024

The report presents the results of the research on functional classes of solutions of elliptic equations with non-standard growth conditions. These classes of solutions cover new cases of non-uniformly elliptic two-phase equations, degenerate two-phase equations, and equations with variable nonlinearity exponents. It is proved that functions from these classes are continuous and satisfy Harnack inequalities. One of the key innovations is the development of a universal approach to describe elliptic equations with non-standard growth conditions through a precise version of the generalized non-logarithmic continuity condition for the coefficients.

Cite this article: Savchenko M.O. Functional classes of solutions of elliptic equations with non-standard growth conditions. *Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr*. 2025. (2): 74—79. https://doi.org/10.15407/visn2025.02.074