ТЕХНІКА ТА МЕТОДИ ЕКСПЕРИМЕНТУ

УДК 539.1.076

А. Е. Вальков, А. К. Зайченко

Институт ядерных исследований НАН Украины, Киев

РАСЧЕТ РАВНОВЕСНЫХ ОРБИТ ЦИКЛОТРОНА У-240

Описаны методы расчета равновесных орбит и уточнения изохронного поля циклотрона У-240, вычисленного по аналитическим формулам.

Ключевые слова: уравнения движения, замкнутые равновесные орбиты, уточнение изохронного поля.

Введение

Режимы работы циклотрона У-240 рассчитываются с помощью комплекса программ РЕЖИМ, разработанного в 1985 - 1988 гг. В настоящее время для замены этого комплекса разрабатывается программа CYCLON. Необходимость разработки этой программы была обоснована нами в работе [1].

Одной из наиболее важных задач программ комплекса РЕЖИМ и новой программы является расчет равновесных орбит ускоряемых частиц. В программах комплекса РЕЖИМ они используются для уточнения изохронного поля, вычисленного по аналитическим формулам, для расчета частот бетатронных колебаний и набега фазы ионов в процессе ускорения. В программе CYCLON они необходимы также для определения угла, под которым ускоряемые частицы подходят к перезарядному устройству, к внутренней мишени для наработки радионуклидов или к дефлектору.

В этой работе описываются методы расчета равновесных орбит и уточнения изохронного поля циклотрона У-240, вычисленного по аналитическим формулам.

Уравнения движения

В программе CYCLON, как и в программах комплекса РЕЖИМ, равновесные орбиты рассчитываются численным интегрированием уравнений радиального движения ускоряемых частиц в медианной плоскости. Для иона с импульсом p эти уравнения в полярных координатах имеют вид [2 - 3]

$$\frac{dr}{d\theta}=\frac{rp_r}{q}, \qquad (1а)$$

$$\frac{dp_r}{d\theta}=q-rB(r,\theta), \qquad (1б)$$

где p_r - радиальная компонента импульса p, $q=(p^2-p_r^2)^{1/2}$, а $B(r,\theta)$ - индукция магнитного поля в медианной плоскости. В качестве независимой переменной в этих уравнениях используется азимут θ.

Равновесная орбита является решением уравнений (1), удовлетворяющим условиям периодичности

$$r(\theta+\Delta\theta)=r(\theta), \quad p_r(\theta+\Delta\theta)=p_r(\theta), \qquad (2)$$

где $\Delta\theta$ - элемент периодичности магнитного поля циклотрона. Число секторов магнита циклотрона У-240 равно трем, поэтому при расчете равновесных орбит в качестве элемента периодичности используется значение $\Delta\theta=2\pi/3$.

Расчет равновесных орбит

Если интегрирование уравнений (1) начинается при некотором угле θ_0, то для определения равновесной орбиты нужно найти начальные значения переменных $r_{in}=r(\theta_0)$ и $p_{r\,in}=p_r(\theta_0)$, удовлетворяющие условиям

$$r(\theta_f)=r_{in}, \quad p_r(\theta_f)=p_{r\,in}, \qquad (3)$$

где, в соответствии с условиями (2), $\theta_f=\theta_0+\Delta\theta$. Эти значения находятся с помощью итерационного процесса, являющегося обобщением метода Ньютона.

Каждый цикл итерационного процесса начинается с пробных значений пары $(r_{in},p_{r\,in})$. С этими значениями находятся решения уравнений (1) в области $\theta_0\le\theta\le\theta_f$, определяются отклонения $\Delta r=r(\theta_f)-r_{in}$ и $\Delta p_r=p_r(\theta_f)-p_{r\,in}$, рассчитываются поправки x и p_x к пробным значениям r_{in} и $p_{r\,in}$ соответственно, производится уточнение пробных значений заменой

$$r_{in}\to r_{in}+x, \quad p_{rin}\to p_{rin}+p_x, \qquad (4)$$

и весь процесс повторяется, пока не будет выполнено условие $|\Delta r|+|\Delta p_r|<10^{-5}$.

Значения x и p_x находятся решением системы линеаризованных уравнений [2 - 3]

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{p_r}{q}x+\frac{rp^2}{q^3}p_x, \tag{5а}$$

$$\frac{dp_x}{d\theta}=-\frac{p_r}{q}p_x-\left[B(r,\theta)+r\frac{\partial B(r,\theta)}{\partial r}\right]x, \tag{5б}$$

где в качестве r, p_r, q, $B(r,\theta)$ и $r\partial B(r,\theta)/\partial r$ используются значения, вычисленные в процессе интегрирования уравнений (1). Интегрирование уравнений (5) производится в диапазоне углов $\theta_0 \le \theta \le \theta_f$ при двух наборах начальных условий:

$$x_1(0)=1, \quad p_{x1}(0)=0, \tag{6а}$$

и

$$x_2(0)=0, \quad p_{x2}(0)=1, \tag{6б}$$

после чего поправки x и p_x рассчитываются по формулам [3]

$$x=\left[(p_{x2}(\theta_f)-1)\Delta r - x_2(\theta_f)\Delta p\right]/d,$$

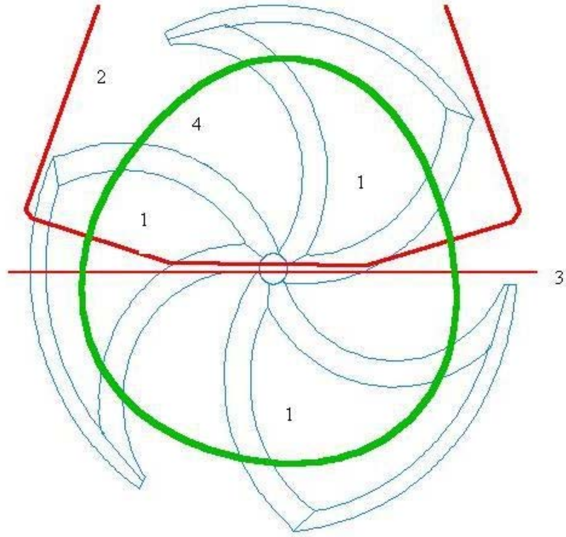
$$p_x=\left[(x_1(\theta_f)-1)\Delta p - p_{x1}(\theta_f)\Delta r\right]/d, \tag{7}$$

где

$$d=x_1(\theta_f)+p_{x2}(\theta_f)-2. \tag{8}$$

Интегрирование систем уравнений (1) и (5) осуществляется методом Рунге - Кутта четвертого порядка: системы (1) – с шагом 3°, а системы (5) – с шагом 6°. Необходимые для этого значения $B(r,\theta)$ находятся интерполяцией по табличным значениям индукции поля в точках (r_i,θ_j), в которых производились магнитные измерения. Табличные значения были измерены в 67 точках по радиусу r_i на 120 азимутах θ_j в медианной плоскости циклотрона с шагом по радиусу $\Delta r = 2{,}506$ см и с шагом по азимуту $\Delta\theta = 3^{\circ}$ [1]. Точки r_i отсчитывались от центра, т. е. $r_0=0$, $r_1=2{,}506$ см и т. д.

Интерполяция осуществляется с помощью четырехточечной формулы Лагранжа с постоянным шагом.



Магнитная структура циклотрона У-240 и форма замкнутой равновесной орбиты протонов с энергией 72 МэВ со средним радиусом 92,722 см: *1* – секторы магнита; *2* – дуант; *3* – рамка; *4* – орбита. (Рисунок цветной на сайте журнала).

На рисунке представлена магнитная структура циклотрона У-240: положение секторов магнита, дуанта и рамки. На этом же рисунке представлена и форма замкнутой равновесной орбиты протонов с энергией 72 МэВ со средним радиусом 92,722 см, обусловленная магнитной структурой циклотрона.

Выбор начальных значений переменных

Начальные значения переменных r_{in} и p_{rin} могут быть найдены следующим образом.

Из уравнения (1а) следует, что

$$p_r(\theta)=p\left[1+r^2(\theta)/(dr(\theta)/d\theta)^2\right]^{-1/2}. \tag{9}$$

Следовательно, для нахождения начальных значений переменных r и p_r достаточно найти приближенное аналитическое выражение для координаты r на выбранном азимуте θ_0 и его производную по азимуту.

Приближенное выражение для координаты было получено в работе [2]. Его можно представить в виде

$$r(\theta_0)=r_0\left\{1+\frac{1}{\bar{B}(r_0)}\sum_n\frac{1}{n^2-1}\left[a_n\cos[n(\theta_0-\theta_{in})]+b_n\sin[n(\theta_0-\theta_{in})]\right]-\gamma\right\},$$

$$\gamma=\frac{1}{4\bar{B}^2(r_0)}\sum_n\frac{1}{(n^2-1)^2}\left[3n^2-2+r_0\frac{\partial}{\partial r}\right](a_n^2+b_n^2) \tag{10}$$

(в циклотронах с большой модуляцией магнитного поля величину γ следует разделить на величину $1+r_0 dB/dr$ [4]), где r_0 - радиус круговой орбиты иона с импульсом p в однородном магнитном поле $\bar{B}(\bar{r})$:

$$r_0 = p / e\bar{B}(r_0), \tag{11}$$

$\bar{B}$, a_n и b_n - коэффициенты в разложении индукции магнитного поля в медианной плоскости

$$B(r,\theta) = \bar{B}(r) + \sum_{n>0}\left[a_n(r)\cos n\theta + b_n(r)\sin n\theta\right], \tag{12}$$

а θ_{in} - начальный азимут магнитных измерений. Суммирование в формуле (10) осуществляется по значениям n, кратным трем.

Из формулы (10) следует, что

$$\frac{dr(\theta_0)}{d\theta} = \frac{r_0}{\bar{B}(r_0)}\sum_n\left\{\frac{n}{n^2-1}\left[b_n(r_0)\cos[n(\theta_0-\theta_{in})] - a_n(r_0)\sin[n(\theta_0-\theta_{in})]\right]\right\}. \tag{13}$$

Вычислив начальные значения координаты $r(\theta_0)$ по формуле (10) и производной $dr(\theta)/d\theta$ на азимуте θ_0 по формуле (13) и подставив их в формулу (9), получим начальное значение радиальной компоненты импульса $p_r(\theta)$.

При уточнении изохронного поля в программах комплекса РЕЖИМ и в программе CYCLON угол θ_0 считается равным нулю, и интегрирование проводится в области $0^\circ \le \theta \le 120^\circ$. В этом случае выражения (10) и (13) несколько упрощаются:

$$r(\theta_0) = r_0 + \frac{r_0}{\bar{B}(r_0)}\sum_n \frac{a_n}{n^2-1} -$$

$$-\frac{r_0}{4\bar{B}^2(r_0)}\sum_n \frac{1}{(n^2-1)^2}\left[3n^2 - 2 + r_0\frac{\partial}{\partial r}\right](a_n^2 + b_n^2),$$

$$\frac{dr(\theta_0)}{d\theta} = \frac{r_0}{\bar{B}(r_0)}\sum_n \frac{nb_n(r_0)}{n^2-1}. \tag{14}$$

При проведении вычислений в соответствии с выражениями работы [3], используемыми при расчете изохронного поля в работе [1], величина n^2-1 в формулах (14) заменяется величиной $n^2-(1-p^2)$.

В работе [5] описана программа расчета равновесных орбит изохронного циклотрона EORP. Алгоритм этой программы разработан на основе статей, лекционных материалов и оригинальных аналитических выкладок ее авторов. Однако этот алгоритм в работе [5] детально не описан, поэтому мы его не используем.

Уточнение изохронного поля

Период обращения ионов в идеальном изохронном поле T_{iz} не зависит от радиуса. Но в поле, вычисленном по приближенным аналитическим формулам, период обращения T обычно зависит от радиуса и может заметно отличаться от идеального значения T_{iz}. В этом случае в вычисленное поле нужно ввести небольшие поправки.

В работе [6] было отмечено, что при вычислении поправок к изохронному полю в линейном приближении можно столкнуться с проблемой неустойчивости, обусловленной нелинейной связью частоты обращения и индукции магнитного поля. В изохронном циклотроне небольшие изменения частоты связаны с небольшими изменениями магнитной индукции интегральным оператором. В результате после введения поправок на тех радиусах, на которых среднее поле быстро изменяется, могут возникать осцилляции. Для уменьшения этих осцилляций в работе [6] предложено использовать выведенное авторами этой работы интегральное уравнение, описывающее связь частоты обращения с магнитной индукцией.

В программах комплекса РЕЖИМ поправки вычисляются по результатам интегрирования равновесных орбит. Вычисления производятся следующим образом.

Если L - длина кривой равновесной орбиты на элементе периодичности, а υ - скорость иона, то период обращения иона по орбите T определяется выражением

$$L = \upsilon T = \int_0^{2\pi/3}(r^2 + (dr/d\theta)^2)^{1/2} d\theta. \tag{15}$$

Подставив в это выражение значение производной $dr/d\theta$ из уравнения (1a) и выразив скорость иона υ через импульс p, найдем, что

$$T = 3\int_0^{2\pi/3}\left[\frac{1+p^2}{p^2-p_r^2}\right]^{1/2} r(\theta)\,d\theta. \tag{16}$$

В этом выражении период выражен в единицах ω_0^{-1}, импульсы p и p_r - в единицах m_0c, а r - в единицах c/w_0, где ω_0 - частота ускоряющего напряжения, m_0 - масса покоя иона, а c - скорость света в вакууме. Значение величины ω_0 определяется при расчете изохронного поля [1].

Интегрирование в формуле (16) осуществляется по формуле Симпсона. При этом используются значения $r(\theta)$ и $p_r(\theta)$, найденные в процессе интегрирования системы (1).

Уточнение изохронного поля осуществляется в точках с 7-й по 39-ю, т. е. в точках r_i на расстояниях от 17,542 до 97,734 см от центра. Это обусловлено тем, что перед вычислением токов в концентрических обмотках в центре циклотрона (в точках 0 - 6) на изохронное поле накладывается бамп, а вблизи радиуса вывода (в точках 40 и 41) – спад.

Поправки к изохронному полю ΔB_j на j-м радиусе находятся решением системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=7}^{39} C_{ij} \Delta B_j = \Delta T_i , \quad i = 7, 8, \ldots , 39 , \tag{17}$$

где ΔT_i - отклонение периода обращения ионов по i-й орбите от изохронного периода T_{iz}, а коэффициенты C_{ij} имеют смысл частных производных

$$C_{ij} = \partial T_i / \partial B_j . \tag{18}$$

Значения ΔT_i считаются равными

$$\Delta T_i = T_{iz} - T_i . \tag{19}$$

Для нахождения коэффициентов C_{ij} после расчета i-й равновесной орбиты определяются табличные значения радиусов, пересекаемых этой орбитой, затем значения индукции поля B_j на каждом из этих радиусов последовательно увеличиваются на величину $\delta B_j = 5$ Гс, находится равновесная орбита иона с тем же импульсом в измененном таким образом магнитном поле, период обращения ионов по этой орбите T_i^* и относительное изменение периода

$$C_{ij} = (T_i^* - T_i)/\delta B_j , \tag{20}$$

после чего значения поля B_j восстанавливаются, а из величин C_{ij} формируется матрица системы (17).

Решение системы (17) осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента. Если вычисленные поправки не превышают величину $a = 0{,}025\overline{B}(41)$, они прибавляются к изохронному полю. Период обращения в полученном таким образом новом магнитном поле вычисляется заново, и процесс уточнения повторяется еще один раз. Если же хоть одна из вычисленных поправок больше величины a, находится решение регуляризованной системы уравнений

$$\sum_{j=7}^{39} (C_{ij} + \alpha\delta_{ij}) \Delta B_j = \Delta T_i , \quad i = 7, 8, \ldots , 39 , \tag{21}$$

где α - параметр регуляризации. Величины ΔT_i и C_{ij}, как и в системе (17), определяются формулами (19) и (20) соответственно.

Решение системы (21), как и системы (17), осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента. Параметр регуляризации полагается равным $10^{-4} d_{\min}$, где $d_{\min}$ - наименьшая из сумм

$$\sum_{i=7}^{39} (C_{ij})^2 , \quad j = 7, 8, \ldots , 39. \tag{22}$$

Если вычисленные поправки не превышают величину a, они прибавляются к изохронному полю. В противном случае изохронное поле не пересчитывается. В обоих этих случаях процесс уточнения не повторяется.

При подготовке к разработке программы CYCLON был проведен графический анализ уточненного таким образом поля. Анализ показал, что в этом поле действительно наблюдаются небольшие осцилляции, как и в частоте в работе [6].

Для уменьшения этих осцилляций в методику уточнения в программе CYCLON были внесены следующие изменения.

В связи с введением изменяемого значения радиуса вывода спад поля в области вывода не вводится. Уточнение изохронного поля осуществляется в точках с 7-й до точки epn (extraction point number), соответствующей задаваемому значению радиуса вывода.

Уточнение производится минимизацией среднеквадратичного отклонения периодов обращения ионов по равновесным орбитам от изохронного.

Введен критерий достаточности числа повторных уточнений: уточнение продолжается до тех пор, пока среднеквадратичное отклонение периодов обращения ионов по равновесным орбитам от изохронного периода уменьшается. При увеличении среднеквадратичного отклонения уточнение прекращается.

Поправки к изохронному полю ΔB_j на j-м радиусе находятся решением системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=7}^{epn}(C_{ij}+\alpha\delta_{ij})\Delta B_j=\Delta T_i\,,\qquad i=7,8,\ldots epn\,, \quad (23)$$

где величины ΔT_i и C_{ij} имеют тот же смысл, что и в системах (17) и (21)

Решение системы (23) осуществляется методом Гаусса с выбором главного элемента. Параметр регуляризации α вначале полагается равным $10^{-5}d_{\max}$, где $d_{\max}$ - наибольший диагональный элемент матрицы, а затем увеличивается на каждой итерации в 2,72 раза до тех пор, пока максимальное значение модуля поправки $|\Delta B_j|$ не становится меньше 5 Гс. Полученные значения поправок ΔB_j прибавляются к значениям изохронного поля, после чего процесс уточнения повторяется.

Вычисления, проведенные для протонов с энергиями в диапазоне от 15 до 80 МэВ, альфа-частиц с энергиями в диапазоне от 15 до 135 МэВ и ионов $^{14}N^{4+}$ с энергиями в диапазоне от 20 до 150 МэВ с шагом $\Delta E=5$ МэВ показали, что такой метод уточнения позволил практически устранить осцилляции изохронного поля. При этом относительные отклонения уточненного поля от исходного не превышают 0,1 %.

Форма изохронного поля зависит и от количества используемых концентрических обмоток. В настоящее время при расчете режимов работы циклотрона У-240 обычно используется не более девяти из имеющихся 15 концентрических обмоток. При их отборе исключаются обмотки с наименьшими токами, в результате чего в изохронном поле могут возникать небольшие нерегулярности. При увеличении числа учитываемых обмоток изохронное поле становится более сглаженным.

Уточненное изохронное поле используется при заключительном определении токов в концентрических обмотках циклотрона. При этом количество и номера концентрических обмоток не изменяются. Методика определения токов в концентрических обмотках описана нами в работе [7].

Вычисленные таким образом токи используются для определения магнитного поля, формируемого основной и используемыми концентрическими обмотками циклотрона. При этом учитывается взаимовлияние концентрических обмоток [7].

После формирования магнитного поля в программе CYCLON рассчитываются равновесные орбиты ионов в этом поле и их параметры. Вычисление параметров равновесных орбит будет описано в другой работе.

Заключение

В работе описаны методы расчета равновесных орбит и уточнения изохронного поля циклотрона У-240, вычисленного по аналитическим формулам, используемые в программе CYCLON. Эти методы могут быть применены и для других изохронных циклотронов, особенно для многоцелевых машин с глубокой азимутальной вариацией магнитного поля.

Уточненное изохронное поле используется при заключительном определении токов в концентрических обмотках циклотрона У-240.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вальков А.Е., Зайченко А.К.* Метод расчета изохронного поля циклотрона У-240 // Ядерна фізика та енергетика. - 2012. - Т. 13, № 1. - С. 101 - 107.
2. *Hagedoorn H.L., Verster N.F.* Orbits in an AVF cyclotron // Nucl. Instrum. Methods. - 1962. - Vol. 18 - 19. - P. 201 - 228.
3. *Gordon M.M.* Computation of closed orbits and basic focusing properties for sector-focused cyclotrons and the design of “CYCLOPS” // Particle Acceleration. - 1984. - Vol. 16. - P. 39 - 62.
4. *Schulte W., Hagedoorn H.L.* Validity of analytical expressions for orbit parameters in AVF cyclotrons with large field modulation // Nucl. Instrum. Methods. - 1976. - Vol. 137. - P. 583 - 586.
5. *Киян И.Н., Ворожцов С.Б., Тарашкевич Р.* Описание программы расчета замкнутых равновесных орбит изохронного циклотрона (equilibrium orbit research program - EORP) // Сообщение ОИЯИР9-2003-109. - Дубна, 2003. - 13 с.
6. *Hagedoorn H.L.* An instability in the numerical calculation of the isochronous field of an A.V.F. cyclotron // Nucl. Instrum. Methods. - 1972. - Vol. 98. - P. 553 - 555.
7. *Вальков А.Е., Зайченко А.К.* Определение токов в концентрических обмотках циклотрона У-240 // Ядерна фізика та енергетика. - 2012. - Т. 13, № 2. - С. 182 - 187.

О. Є. Вальков, О. К. Зайченко

РОЗРАХУНКИ РІВНОВАЖНИХ ОРБІТ ЦИКЛОТРОНА У-240

Описано методи визначення рівноважних орбіт та уточнення ізохронного поля циклотрона У-240, розрахованого за допомогою аналітичних формул.

Ключові слова: рівняння руху, рівноважні орбіти, уточнення ізохронного поля.

O. E. Valkov, O. K. Zaichenko

EQUILIBRIUM ORBITS U-240 CYCLOTRON CALCULATION

Methods of the U-240 cyclotron equilibrium orbits calculation and correction of the isochronous field, calculated by the analytical formulas are described.

Keywords: equation of motion, equilibrium orbits, isochronous field correction.

Надійшла 10.01.2013
Received 10.01.2013