

В. А. Бабенко*, Н. М. Петров*Институт теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова НАН Украины, Киев, Украина*

*Ответственный автор: pet2@ukr.net

О СВОЙСТВАХ БЕГУЩЕЙ КОНСТАНТЫ СВЯЗИ СИЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ОБЛАСТИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЙ

Бегущая константа связи α_s квантовой хромодинамики (КХД) и ее зависимость от перенормировочного энергетического масштабного КХД-параметра μ исследуются в области энергий $\mu \lesssim 25$ ГэВ на основе прямого численного интегрирования основного ренормгруппового уравнения КХД с учетом членов вплоть до пятипетлевого порядка. Впервые в пятипетлевом порядке рассчитано значение полюса константы сильной связи – полюса Ландау $\mu_0 \equiv \Lambda = 664,9$ МэВ (масштабного КХД-параметра Λ). Также для описания зависимости $\alpha_s(\mu)$ предложена простая однополюсная формула, которая дает очень хорошее описание константы сильной связи в рассматриваемой области энергий.

Ключевые слова: квантовая хромодинамика (КХД), константа связи сильного взаимодействия, теория возмущений КХД, ренормгрупповое уравнение КХД.

1. Введение

Бегущая константа связи сильного взаимодействия $\alpha_s = \alpha_s(\mu)$, зависящая от перенормировочного энергетического масштабного КХД-параметра μ , является одним из основных свободных параметров КХД, непосредственно входящих в ее лагранжиан наряду с массами кварков [1 - 3]. Учитывая тот факт, что константа сильной связи является фундаментальным физическим параметром Стандартной модели физики частиц, ее теоретическому и экспериментальному исследованию постоянно уделяется исключительно большое внимание [1 - 6], в особенности принимая во внимание то обстоятельство, что данная константа входит во многие рассчитываемые сечения различных процессов с участием элементарных частиц. Особенно интенсивно константа α_s исследуется в последние 10 - 20 лет. При этом особую актуальность дальнейшему исследованию константы α_s придает в последнее время ставшее лишь недавно известным [7, 8] значение пятипетлевого коэффициента теории возмущений КХД, что может и должно сыграть роль как для улучшения точности КХД-расчетов, так и для расширения области их применимости. Поскольку основная роль данного результата может сказаться в области низких энергий, где наблюдается рост величины α_s и соответственно ухудшение сходимости ряда теории возмущений КХД, то мы в данной работе сосредоточимся на расчетах в области низких энергий с использованием недавно полученного значения пятипетлевого коэффициента бета-функции КХД. В частности, впервые в пятипетлевом порядке нами рассчитано значение полюса Ландау в энергетической зависимости константы связи КХД.

Если константа связи α_s будет зафиксирована, т.е. экспериментально измерена при одном заданном значении энергии $\mu = Q_{\text{экс}}$, то КХД может точно предсказать значение константы связи при любом другом значении энергии путем расчета согласно так называемому ренормализационно-групповому уравнению КХД [1 - 8] (далее ренормгрупповому уравнению либо РГ-уравнению). Согласно принятому по ряду причин соглашению основной реперной отсчетной точкой в зависимости константы сильной связи от энергии принята точка $\mu = M_Z = 91,1876$ ГэВ [3], соответствующая массе нейтрального переносчика слабого взаимодействия Z-бозона Z^0 . Соответственно значение константы связи $\alpha_s(M_Z)$ в точке Z-бозона является фактически в настоящее время фундаментальной физической постоянной [3]. Следует отметить, что впервые идеи ренормгруппового подхода в квантовой теории поля (КТП) были предложены в начале 1950-х гг. [9] и далее ренормгрупповой подход в КТП разрабатывался и применялся в течение всего периода ее развития [10 - 13].

2. Ренормгрупповое уравнение КХД для бегущей константы связи

Ренормгрупповое уравнение КХД для бегущей константы связи сильного взаимодействия $\alpha_s(\mu)$ можно записать в виде [1 - 8]

$$\mu^2 \frac{d\alpha_s(\mu)}{d\mu^2} = \beta(\alpha_s(\mu)), \quad (1)$$

где функция $a_s(\mu)$ определяется выражением

$$a_s(\mu) \equiv \frac{\alpha_s(\mu)}{4\pi}, \quad (2)$$

а функция $\beta(a_s)$ представляет собой так называемую бета-функцию КХД [1 - 8] и является одной из важных и фундаментальных зависимостей данной теории. Бета-функцию $\beta(a_s)$ часто также называют функцией Гелл - Манна - Лоу [14] либо функцией Челлена - Шиманчика [15, 16]. Далее разложение функции $\beta(a_s)$ в ряд теории возмущений по степеням константы связи можно записать в виде [1 - 8]

$$\beta(a_s) = -\beta_0 a_s^2 - \beta_1 a_s^3 - \beta_2 a_s^4 - \beta_3 a_s^5 - \beta_4 a_s^6 + O(a_s^7), \quad (3)$$

где принятые согласно соглашению знаки «минус» перед положительными коэффициентами β_n отражают свойство асимптотической свободы КХД [1 - 6], т.е. того известного установленного факта, что сильное взаимодействие кварков и глюонов ослабевает с ростом энергии и практи-

чески исчезает для процессов с большими переданными импульсами Q . Для значений энергии в области 100 - 1000 ГэВ константа сильной связи уже является достаточно малой величиной и имеет в этой области порядок $\alpha_s \sim 0,1$. Коэффициенты β_0 и β_1 носят название соответственно однопетлевого и двухпетлевого коэффициентов бета-функции и они не зависят от используемой схемы перенормировки КХД. В то же время коэффициенты более высокого порядка, а именно трех-, четырех- и пятипетлевой коэффициенты β_2 , β_3 и β_4 зависят уже от схемы перенормировки и приводятся далее для случая наиболее употребительной \overline{MS} -схемы перенормировки КХД. К настоящему времени известны пять первых коэффициентов разложения теории возмущений КХД (3), т.е. члены вплоть до пятипетлевого порядка включительно, и они имеют следующий вид [7, 8, 17 - 24]:

$$\beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f, \quad \beta_1 = 102 - \frac{38}{3}n_f, \quad (4)$$

$$\beta_2 = \frac{2857}{2} - \frac{5033}{18}n_f + \frac{325}{54}n_f^2, \quad (4)$$

$$\beta_3 = \left(\frac{149753}{6} + 3564\zeta_3 \right) - \left(\frac{1078361}{162} + \frac{6508}{27}\zeta_3 \right)n_f + \left(\frac{50065}{162} + \frac{6472}{81}\zeta_3 \right)n_f^2 + \frac{1093}{729}n_f^3, \quad (5)$$

$$\beta_4 = \left(\frac{8157455}{16} + \frac{621885}{2}\zeta_3 - \frac{88209}{2}\zeta_4 - 288090\zeta_5 \right) +$$

$$+ \left(-\frac{336460813}{1944} - \frac{4811164}{81}\zeta_3 + \frac{33935}{6}\zeta_4 + \frac{1358995}{27}\zeta_5 \right)n_f +$$

$$+ \left(\frac{25960913}{1944} + \frac{698531}{81}\zeta_3 - \frac{10526}{9}\zeta_4 - \frac{381760}{81}\zeta_5 \right)n_f^2 +$$

$$+ \left(-\frac{630559}{5832} - \frac{48722}{243}\zeta_3 + \frac{1618}{27}\zeta_4 + \frac{460}{9}\zeta_5 \right)n_f^3 + \left(\frac{1205}{2916} - \frac{152}{81}\zeta_3 \right)n_f^4, \quad (6)$$

где $\zeta_n \equiv \zeta(n)$ – дзета-функция Римана, а n_f – число «активных» ароматов кварков, т.е. количество кварков, масса которых не превышает значение бегущего масштабного параметра μ в ренормгрупповом уравнении (1).

Ведущий однопетлевой коэффициент β_0 КХД-разложения (3) впервые был найден в начале 1970-х гг. [17, 18] и на его основе было предсказано такое фундаментальное свойство КХД,

как асимптотическая свобода кварков при высоких энергиях, т.е. фактически была заложена основа КХД как физической теории [1 - 3]. Вскоре после этого также были найдены двух- [19, 20] и трехпетлевой коэффициенты [21, 22], что позволило начать проводить достаточно точные расчеты. Однако следующего прорывного шага – определения четырехпетлевого коэффициента β_3 пришлось ожидать более 20 лет [23, 24]. И,

наконец, совсем недавно в результате весьма значительных расчетно-вычислительных усилий был найден пятипетлевой коэффициент β_4 [7, 8], что уже вызвало значительный поток дальнейших работ и исследований и позволяет далее повысить точность теоретических расчетов КХД, а также, возможно, расширить область применений. Поскольку основная роль данного результата может сказаться в области низких энергий, где наблюдается рост величины α_s и соответственно ухудшение сходимости ряда теории возмущений КХД, то мы сосредоточимся на расчетах в области низких энергий с использованием недавно полученного значения пятипетлевого коэффициента бета-функции КХД.

3. Исследование константы связи в области $\mu \lesssim 2$ ГэВ и полюс Ландау

Для расчета согласно РГ-уравнению (1) для константы сильной связи нужно задать начальное значение константы α_s при определенной энергии, найденное из эксперимента, что позволяет далее численно проинтегрировать уравнение (1) и найти зависимость $\alpha_s = \alpha_s(\mu)$ во всем исследуемом интервале для сравнения с другими экспериментальными данными. Согласно принятому по ряду причин соглашению основной реперной, или отсчетной, точкой в зависимости константы связи от энергии принята точка $\mu = M_Z$, соответствующая массе нейтрального переносчика слабого взаимодействия Z -бозона Z^0 :

$$M_Z = 91,1876(21) \text{ ГэВ} \quad [3]. \quad (7)$$

И уравнение (1), соответственно, чаще всего используется для нахождения фундаментальной величины $\alpha_s(M_Z)$ из некоторого экспериментально определенного значения $\alpha_s(\mu_{\text{эсп}})$ в некоторой точке $\mu = \mu_{\text{эсп}} = Q_{\text{эсп}}$ с целью дальнейшего сравнения различных экспериментально полученных результатов между собой. В области низких энергий, однако, основной реперной отсчетной точкой, в которой имеется большое число экспериментальных результатов, служит точка $\mu = M_\tau$, соответствующая массе тяжелого тау-лептона:

$$M_\tau = 1,77686(12) \text{ ГэВ} \quad [3]. \quad (8)$$

Особая роль данной точки для экспериментального определения сильной константы α_s связана

с тем, что тау-лептон является достаточно тяжелым и может распадаться на адроны. Мы будем далее в качестве начальной точки при низких энергиях для интегрирования РГ-уравнения (1) использовать достаточно давно и хорошо известное значение

$$\alpha_s(M_\tau) = 0,330(14) \quad [7, 25, 26], \quad (9)$$

часто применяемое в качестве стандартной реперной точки. Отметим также, что под «низкими» энергиями мы будем понимать энергии, которые на порядок и более меньше энергии Z -бозона (7), т.е. энергии $\mu \sim 1 - 10$ ГэВ, а более конкретно изучаемую область $\mu \lesssim 25$ ГэВ, где имеется ряд экспериментальных точек. При этом часто в КХД под «низкими» энергиями понимается чуть более узкий интервал $\mu \simeq 1 - 5$ ГэВ [27, 28].

На рис. 1 показана рассчитанная в различных порядках петлевого приближения согласно РГ-уравнению КХД (1) с использованием коэффициентов (4) - (6) зависимость константы сильной связи от энергии в области наиболее низких энергий $\mu \lesssim 2$ ГэВ, т.е. в области энергий, близких к предполагаемому расположению полюса функции $\alpha_s(\mu)$ - так называемого полюса Ландау [6, 29 - 31], впервые обнаруженного и обсуждавшегося в квантовой электродинамике (КЭД). При этом в качестве начальной точки интегрирования выбрана точка $\mu = M_\tau$ с начальным значением (9) при количестве активных ароматов кварков $n_f = 4$, поскольку начальная область энергий выше массы c -кварка. Как видно из рис. 1, зависимость $\alpha_s(\mu)$ обнаруживает некоторую сходимость к некоторому возможно-му положению полюса данной функции при увеличении порядка приближения вплоть до пятипетлевого порядка $n = 5$. Причем данная сходимость имеет место несмотря на предположения о том, что ряд теории возмущений (3) может расходиться, а разложение терять смысл при приближении к полюсу функции $\alpha_s(\mu)$, т.е. в области значений $\alpha_s \gtrsim 1$.

Как известно [6, 29 - 31], полюс Ландау, или «призрачная» сингулярность Ландау, в КТП представляет собой особенность в зависимости бегущей константы связи от энергии, которая не дает продолжать перенормировку константы связи дальше некоторой конечной энергии. С физической точки зрения это означает, что та конкретная квантово-полевая теория, из которой было получено уравнение ренормгруппы, перестает быть применимой и необходимо ее обобщение.

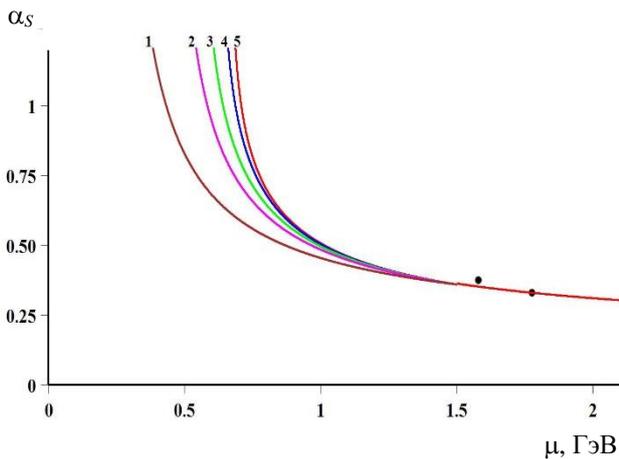


Рис. 1. Зависимость константы сильной связи α_s от энергии вблизи полюса данной функции $\mu = \mu_0$ (полюса Ландау), рассчитанная согласно ренормгрупповому уравнению в различных порядках петлевого приближения. Номер кривой соответствует порядку петлевого приближения n . Точки – эксперимент. (См. цветной рисунок на сайте журнала.)

Поскольку полюс Ландау означает обращение в бесконечность константы связи при некоторой конечной энергии и появляется обычно в результате применения теории возмущений в некотором конечном ее порядке, то наиболее вероятной возможностью интерпретации данного полюса является возможная неприменимость приближения теории возмущений в области сильной связи $\alpha_s \gtrsim 1$. Иными словами, согласно данной точке зрения, пертурбативный расчет полюса Ландау является некорректным, поскольку используемое приближение становится недействительным задолго до того, как предполагаемый полюс будет достигнут. Данное обстоятельство действительно имеет место в КЭД.

Однако в КХД, с нашей точки зрения, сходимость кривых $\alpha_s(\mu)$ к некоторой предельной кривой вблизи полюса Ландау может быть обусловлена все более резким характером поведения данной функции вблизи полюса при росте порядка приближения n и иметь физический смысл. Другими словами, вследствие резкого поведения функции при достаточно больших порядках приближения ряд теории возмущений (3) может сходиться уже в некоторой точке $\mu_0 + \varepsilon$, очень близкой к точке полюса μ_0 функции $\alpha_s(\mu)$. В качестве конкретного примера укажем, что в пятипетлевом порядке $n = 5$ рассчитанное положение полюса Ландау функции $\alpha_s(\mu)$ имеет значение (см. далее)

$$\mu_0^L(n = 5) = 0,6649 \text{ ГэВ}, \quad (10)$$

а уже при $\mu = 0,71 \text{ ГэВ}$ и больших энергиях значения функции $\alpha_s(\mu)$ становятся меньше единицы: $\alpha_s(0,71 \text{ ГэВ}) < 1$. Таким образом, «физическая» область энергий, в которой константа сильной связи меньше единицы, расположена в КХД в непосредственной близости к полюсу Ландау (10), хотя сам полюс при этом обычно считается «нефизическим» [6]. Укажем в связи с данным обсуждением также на то обстоятельство, что фактически разложение теории возмущений (3) может рассматриваться как разложение по степеням параметра $\alpha_s/4\pi$, на порядок меньшего чем α_s , т.е. иметь более широкую область применимости, чем обычно предполагается. Кроме того, существуют также указания на то, что ряд теории возмущений (3) может быть асимптотическим рядом Пуанкаре, т.е. расходиться в принципе при всех значениях параметра α_s и тем не менее с ним можно работать, как и с другими асимптотическими рядами, т.е. ограничиваясь в разложении некоторым конечным разумным числом членов (см. также далее раздел 5).

Обратим далее внимание на важный момент, связанный с наличием скачка, точнее скачков, в энергетической зависимости константы сильной связи $\alpha_s(\mu)$. Первый такой скачок замечен на рис. 1 при энергии $\mu = 1,5 \text{ ГэВ}$. Наличие этих пороговых скачков связано с увеличением числа n_f «активных» ароматов кварков по мере роста энергии и оно весьма подробно обсуждалось в литературе [3, 32 - 34], где даны соответствующие граничные формулы шивки в пороговых точках появления более тяжелых кварков в зависимости $\alpha_s(\mu)$ вплоть до четырехпетлевого порядка включительно. Мы при численном интегрировании уравнения (1) использовали начальное условие (9) при числе активных ароматов кварков $n_f = 4$ и далее при уменьшении энергии учитывали в четырехпетлевом порядке пороговый скачок от четырех до трех ароматов кварков (до $n_f = 3$) при энергии, соответствующей полюсной массе c -кварка $M_c = 1,5 \text{ ГэВ}$, а при росте энергии учитывали пороговый скачок от четырех до пяти ароматов кварков (до $n_f = 5$) при энергии, соответствующей полюсной массе b -кварка $M_b = 4,8 \text{ ГэВ}$. При этом расчет конкретных значений пороговых скачков функции $\alpha_s(\mu)$ в точках $\mu = M_c$ и $\mu = M_b$ был произведен с помощью известного программного пакета RunDec/CRunDec [32, 35, 36], а значения полюс-

ных масс c - и b -кварков были выбраны в соответствии с работами [35, 36].

Приведем зависимость рассчитываемого положения полюса Ландау μ_0 функции $\alpha_s(\mu)$ (масштабного КХД-параметра Λ) от порядка n петлевого приближения ренормгруппового уравнения КХД:

n	$\mu_0 \equiv \Lambda$, ГэВ
1	0,2169
2	0,4350
3	0,5412
4	0,6254
5	0,6649

Из приведенных данных видим рассчитанное в различных порядках петлевого приближения n согласно ренормгрупповому уравнению КХД (1) положение полюса Ландау в зависимости константы сильной связи от энергии. Зависимость рассчитанного положения полюса μ_0 функции $\alpha_s(\mu)$ обнаруживает сходимость к некоторому возможному положению полюса данной функции при увеличении порядка приближения вплоть до пятипетлевого порядка $n = 5$, хотя данная сходимость, судя по результатам расчетов, еще не вполне достигнута. Однако значение полюса Ландау (10), полученное в пятипетлевом порядке $n = 5$, можно считать достаточно близким к окончательному предельному значению данной величины и сильно измениться оно уже не должно. Следует отметить, что фактически положение полюса Ландау в КХД совпадает со значением известного фундаментального масштабного КХД-параметра Λ : $\mu_0 = \Lambda \equiv \Lambda_{\text{QCD}}$. Вначале обычно данный параметр появляется как константа интегрирования ренормгруппового уравнения КХД (1) в однопетлевом приближении с учетом лишь первого ведущего члена разложения теории возмущений (3). В этом случае уравнение (1) допускает аналитическое решение, которое можно записать в виде [1 - 6]

$$\alpha_s(\mu) = \frac{2\pi}{\beta_0 \ln(\mu/\Lambda)}, \quad (11)$$

откуда очевидно, что при $\mu = \Lambda$ данная функция обращается в бесконечность. В общем же случае положение полюса Ландау и соответственно значение параметра Λ зависит от используемой схемы перенормировки (мы везде рассматриваем только результаты для $\overline{\text{MS}}$ -схемы), от учитываемого при расчете петлевого порядка теории возмущений КХД (см. приведенные выше дан-

ные), от числа ароматов кварков n_f , а также, естественно, от способа и точности расчета и от используемых входных параметров. Считается, что масштабный КХД-параметр Λ имеет порядки величины $\Lambda \sim 0,2 - 0,5$ ГэВ, что согласуется с полученным нами результатом (10), который можно также записать в часто используемом для обозначения параметра Λ виде

$$\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(n_f=3)} = 664,9 \text{ МэВ}, \quad (12)$$

где число ароматов кварков $n_f = 3$ соответствует интервалу энергий $\mu < M_c$.

Рассчитанное нами таким образом значение (12) данного параметра оказывается несколько больше приведенного в последнем обзоре Particle Data Group (PDG) [3] значения $\Lambda_{\overline{\text{MS}}}^{(3)} = 332(17)$ МэВ, однако последнее было рассчитано в четырехпетлевом порядке с использованием трехпетлевых условий сшивки и на основе использования некоторого приближенного решения ренормгруппового уравнения, которое достаточно существенно начинает отличаться от точного численного решения уравнения (1) как раз в области низких энергий, т.е. в области полюса [3]. С учетом сильной чувствительности рассчитываемого положения полюса к деталям расчета и используемым входным параметрам, а также с учетом достаточно большой погрешности определяемой величины Λ расхождение не выглядит таким уж большим, тем более что в предыдущих расчетах сходимость в зависимости от порядка петлевого приближения явно не была достигнута. Кроме того, следует отметить, что в целом в литературе имеется весьма большой разброс значений для КХД-параметра Λ , в том числе и близкие к рассчитанному нами значению (12). К примеру, в работе [37], где так же, как и у нас, значение $\alpha_s(M_\tau)$ использовалось в качестве входного параметра, были получены значения $\Lambda = 565,6$ МэВ для случая $\alpha_s(M_\tau) = 0,32$ и $\Lambda = 717,2$ МэВ для случая $\alpha_s(M_\tau) = 0,35$, которые близки к значению (12).

Появление полюса константы сильной связи КХД при малом конечном значении энергии ассоциируется обычно с явлением конфайнмента, или невылетания, кварков, т.е. невозможности существования кварков в свободном состоянии. Последнее как раз и обусловлено бесконечным предельным значением константы сильной связи, характеризующей взаимное притяжение кварков. Данное явление проявляется на типичных рас-

стояниях порядка размера адрона, т.е. ~ 1 Фм. Конфайнмент, или удержание кварков, может фактически рассматриваться в качестве обратной стороны явления асимптотической свободы на малых расстояниях, проявляющейся на противоположной стороне масштаба энергий и расстояний как раз согласно энергетической зависимости константы сильной связи, а именно на достаточно больших расстояниях цветовое притяжение кварков становится непреодолимо сильным [38], т.е. $\alpha_s(\mu) \xrightarrow{\mu \rightarrow \mu_0} +\infty$. В этом случае описание

сильного взаимодействия переходит от кварк-глюонной КХД-картины к картине нуклон-нуклонного и пион-нуклонного взаимодействия, т.е. в общем случае к картине адрон-адронного взаимодействия и соответственно описания в рамках адронных степеней свободы. Отметим, что константа связи сильного взаимодействия в последнем случае определяется уже как константа пион-нуклонной связи [38 - 40].

4. Исследование константы связи в области энергий $\mu \lesssim 25$ ГэВ и однополюсная формула

Несмотря на то что решение ренормгруппового уравнения (1) дает теоретически точное описание зависимости константы сильной связи от энергии в пертурбативной области, тем не менее всегда удобно и информативно иметь какую-либо простую и явную приближенную формулу для изучения свойств и аппроксимации имеющейся экспериментальной зависимости исследуемой величины, которая позволит избежать численного решения уравнения. В литературе [3, 5, 6, 41 - 43] было предложено несколько аналитических приближений для зависимости $\alpha_s(\mu)$. Рассмотрим здесь еще одну простую и удобную аналитическую аппроксимацию этой зависимости в области низких энергий, т.е. вблизи полюса $\mu = \mu_0$ данной функции. А именно вблизи полюса можно воспользоваться простым приближением в виде рациональной функции низкого порядка, которое запишем в виде

$$\alpha_s(\mu) = \frac{c_0 + c_1\mu + c_2\mu^2}{\mu - \mu_0}. \quad (13)$$

Однополюсная формула (13) представляет собой аппроксиманту функции $\alpha_s(\mu)$ рациональной функцией порядка [2/1], или Паде-аппроксиманту порядка [2/1].

Однополюсная аппроксимация вида (13) часто используется в ядерной физике и физике элементарных частиц для описания соответ-

ствующих физических величин вблизи наличного полюса, в частности для описания функции эффективного радиуса NN - и Nd -рассеяния [44 - 47]. Наряду с простотой существенным достоинством однополюсной аппроксимации (13) является то обстоятельство, что она учитывает главное характерное свойство исследуемой функции в рассматриваемой области энергий – собственно само наличие полюса. Используя теперь найденное значение (10) $\mu_0 = 0,6649$ ГэВ полюса функции $\alpha_s(\mu)$ и начальное условие (9) $\alpha_s(M_\tau) = 0,330$, найдем два оставшихся свободных коэффициента однополюсной зависимости (13) подгонкой к имеющимся в рассматриваемой области энергий $\mu \lesssim 25$ ГэВ экспериментальным данным, приведенным в табл. 1. Определенные таким образом коэффициенты c_n формулы (13) имеют значения

$$c_0 = 0,03885 \text{ ГэВ}, c_1 = 0,1884, c_2 = -0,002086 \text{ ГэВ}^{-1}. \quad (14)$$

Таблица 1. Зависимость $\alpha_s(\mu)$, рассчитанная в пятипетлевом порядке ренормгруппового уравнения КХД (1) – α_s^{QCD} , а также по однополюсной формуле (13) – α_s^{pole}

μ , ГэВ	α_s^{QCD}	α_s^{pole}	Эксперимент
1,58	0,352	0,362	$0,375^{+0,062}_{-0,081}$ [48]
$M_\tau = 1,77686$	0,330	0,330	0,330(14) [25, 26]
4,75	0,220	0,217	0,217(21) [49, 50]
7,5	0,194	0,195	0,192(2) [51, 52]
9,46	0,184	0,186	$0,184^{+0,015}_{-0,014}$ [53]
14,0	0,168	0,170	$0,170^{+0,021}_{-0,017}$ [50, 54]
22,0	0,153	0,149	$0,151^{+0,015}_{-0,013}$ [50, 54]

В третьей строке приведено выделенное значение $\alpha_s(M_\tau)$, использованное как входной параметр.

Малость найденного коэффициента c_2 означает, что в принципе при самых низких энергиях недалеко от полюса неплохой аппроксимацией была бы даже аппроксиманта еще более низкого порядка [1/1]. Однако однополюсная формула (13) порядка [2/1] с параметрами (10), (14), также как и точное численное решение ренормгруппового уравнения (1), дает практически идеальное описание константы сильной связи в достаточно широкой рассматриваемой области энергий $\mu \lesssim 25$ ГэВ, что видно из рис. 2 и табл. 1. Следует однако указать при этом, что формула (13) имеет два недостатка. Во-первых, она дает неправильную асимптотику функции $\alpha_s(\mu)$ на бесконечности –

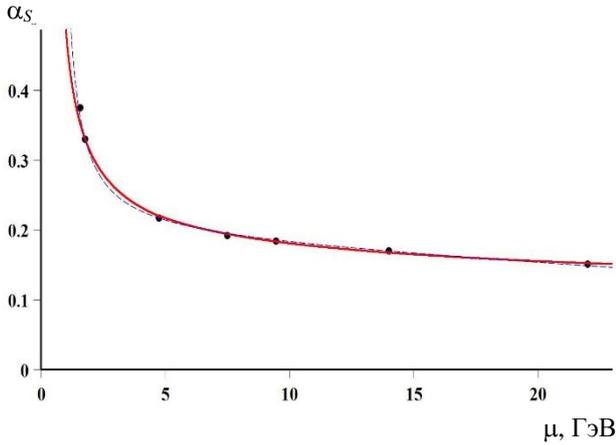


Рис. 2. Зависимость константы связи α_s от энергии. Сплошная красная кривая – зависимость, рассчитанная согласно ренормгрупповому уравнению (1) в пятипетлевом порядке с начальным условием $\alpha_s(M_\tau) = 0,330$. Штриховая синяя кривая – зависимость согласно однополосной формуле (13). Точки – эксперимент. (См. цветной рисунок на сайте журнала.)

$\alpha_s^{pole}(\mu) \rightarrow \infty$ вместо убывания до нуля. Во-вторых, функция $\alpha_s(\mu)$ согласно уравнению (1) должна быть четной функцией параметра μ , а выражение (13) этим свойством не обладает. Однако оба эти свойства являются «глобальными» свойствами зависимости $\alpha_s(\mu)$, характеризующими поведение данной функции «в целом» на всем глобальном интервале. Поэтому локальная аппроксимация на конечном отрезке выражением, не удовлетворяющим неким глобальным свой-

ствам, является вполне возможной и приемлемой с учетом области определения и применимости данного выражения.

В табл. 1 приведены результаты конкретных численных расчетов константы связи согласно ренормгрупповому уравнению КХД (1) в пятипетлевом порядке, а также согласно однополосной формуле (13) в тех точках при низких энергиях, где имеются результаты экспериментальных измерений (см. в этой связи также обзоры экспериментальной ситуации в [3, 25 - 28, 50, 52, 55, 56]). В целом табл. 1 и рис. 2 показывают исключительно хорошее согласие теоретического КХД-описания и эмпирической аппроксимации (13) с экспериментальными данными. Последний факт свидетельствует не только в пользу правильности и точности теории КХД, но также в пользу правильности выбранного исходного начального значения (9) константы связи в точке тау-лептона $\alpha_s(M_\tau) = 0,330(14)$, которое оказалось очень хорошо согласованным со всеми другими имеющимися в области низких энергий экспериментальными данными. Отметим в этой связи, что значение (9) величины $\alpha_s(M_\tau)$ практически совпадает с одной из новейших экспериментальных оценок данной величины $\alpha_s(M_\tau) = 0,328(13)$ [56] и лишь немного превышает значение $\alpha_s(M_\tau) = 0,325(15)$ последнего обзора PDG [3], которое в свете вышеприведенных расчетов в рассматриваемом низкоэнергетическом интервале представляется несколько заниженным.

Таблица 2. Зависимость константы сильной связи α_s от порядка n петлевого приближения ренормгруппового уравнения КХД при некоторых значениях энергии μ

n	μ , ГэВ									
	0,665	0,7	1	1,25	1,5	2	3	4	20	M_Z
2	0,7826	0,7233	0,4848	0,4061	0,3613	0,3113	0,2615	0,2351	0,1557	0,1194
3	0,9101	0,8114	0,4963	0,4090	0,3624	0,3109	0,2602	0,2338	0,1555	0,1192
4	1,1621	0,9358	0,5043	0,4107	0,3630	0,3106	0,2597	0,2332	0,1554	0,1192
5	3,7769	1,0658	0,5075	0,4113	0,3631	0,3106	0,2596	0,2331	0,1554	0,1192

В табл. 2 приведены результаты расчетов зависимости константы α_s от порядка петлевого приближения для ряда значений энергии, которые показывают хорошую практическую сходимость расчета в области энергий, где имеются экспериментальные данные. Как видно из таблицы, учет членов пятипетлевого порядка может играть заметную роль только в области энергий $\mu \lesssim 1,5$ ГэВ, т.е. в непосредственной близости к полюсу, чего, впрочем, и следовало ожидать – см. в этой связи также рис. 1. Таким образом,

полученные результаты свидетельствуют об очень хорошей согласованности описания имеющихся экспериментальных данных по константе α_s в области низких энергий $\mu \lesssim 25$ ГэВ и подтверждают использованное значение $\alpha_s(M_\tau) = 0,330(14)$ константы связи в точке тау-лептона. В то же время рассчитанное нами в пятипетлевом порядке значение КХД-параметра $\Lambda = 664,9$ МэВ оказывается несколько больше приведенного в обзоре PDG [3] значения.

5. Обсуждение теории возмущений КХД и полученных результатов

Обсудим теперь кратко результаты и методы, которые используются при вычислении физических характеристик различных реальных процессов методами пертурбативной теории поля с использованием энергетической зависимости бегущей константы связи КХД. Как известно, простейшими наблюдаемыми величинами в пертурбативной КХД являются величины, соответствующие процессам, которые не содержат адронов во входном начальном канале реакции [3]. Одним из наиболее известных и важных примеров такого рода процессов является реакция электрон-позитронного рассеяния $e^+ + e^- \rightarrow$ адроны, дающая адроны только в выходном канале реакции в результате e^+e^- -аннигиляции. Для сечения данной реакции имеет место формула

$$R(Q) \equiv \frac{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \text{адроны}}(Q)}{\sigma_{e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-}(Q)} = R_{EW}(Q)(1 + \delta_{QCD}(Q)), \quad (15)$$

где величина $R_{EW}(Q)$ определяется чисто электрослабым взаимодействием и в случае не очень больших энергий $Q \ll M_Z$ дается простым выражением через сумму квадратов электрических зарядов кварков: $R_{EW} = 3 \sum_q e_q^2$. А КХД-функция

$\delta_{QCD}(Q)$ при этом определяется разложением, содержащим бегущую константу связи [3, 57, 58]

$$\delta_{QCD}(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{\alpha_s(Q)}{\pi} \right)^n + O\left(\frac{\Lambda^4}{Q^4} \right). \quad (16)$$

Подобные же разложения, включающие константу связи, имеют место также для КХД-поправок к адронным ширинам распадов тау-лептона [59], а также для КХД-поправок к адронным парциальным ширинам бозонов Хиггса [60]. Таким образом, бегущая константа связи входит во многие рассчитываемые сечения различных реакций и является величиной первостепенной важности в теории сильного взаимодействия.

Далее вопросом чрезвычайной важности в пертурбативной КХД является фундаментальный и до сих пор не решенный вопрос о сходимости ряда теории возмущений КХД (3) и соответственно об условиях применимости и обоснованности получаемых с его помощью результатов. Отметим в этой связи сначала тот хорошо известный факт, что в общем случае ряды теорий

возмущений квантовой механики (КМ) и квантовой теории поля (КТП) могут быть как сходящимися рядами, так и расходящимися асимптотическими рядами [61 - 67]. При этом в отношении ряда теории возмущений КХД (3) на нашем нынешнем уровне знаний никаких его свойств в этом отношении не известно и не установлено, поэтому данный ряд теоретически может быть как сходящимся, так и расходящимся. Однако гораздо более вероятной возможностью при этом, как будет обсуждаться далее, является именно первая возможность, что данный ряд КХД является сходящимся.

Следует особо подчеркнуть при этом, что расходимость рядов теории возмущений КМ и КТП связана в большинстве случаев с тем обстоятельством, что квантовомеханические операторы в общем случае являются неограниченными операторами, действующими в бесконечномерном гильбертовом пространстве квадратично интегрируемых функций. При этом, однако, для обсуждаемого вопроса исключительно важным и существенным является тот факт, что ряд теории возмущений КХД (3) для бета-функции по своей природе кардинальным образом отличается от всех типичных случаев рядов теории возмущений КМ и КТП в силу того очевидного обстоятельства, что данный ряд является фактически обычным разложением Тейлора - Маклорена для обычной функции $\beta(a_s)$, а отнюдь не строится для собственных значений операторов. В силу этого сходимость ряда КХД (3) является не только вполне возможной, но и весьма вероятной.

При этом вышеприведенное важное рассуждение является отнюдь не единственным аргументом в пользу вполне возможной сходимости ряда теории возмущений КХД (3). Наряду с ним еще более существенным свидетельством в пользу вполне вероятной и возможной сходимости ряда теории возмущений КХД (3) является факт отсутствия роста по абсолютной величине коэффициентов данного разложения, на что обращалось особое внимание еще в первоначальных оригинальных работах [7, 8], где был получен пятипетлевой коэффициент этого разложения. Как хорошо известно, одним из основных характерных свойств расходящихся асимптотических рядов является то свойство, что коэффициенты данного ряда могут вначале убывать по абсолютной величине вплоть до некоторого порядка коэффициента, а затем начинают резко и быстро расти. Однако оказалось, что найденные к настоящему времени вплоть до пятипетлевого порядка коэффициенты разложения (3) теории возмущений КХД не обнаруживают никакой тенденции к

своему росту, как видно, к примеру, из приведенного в [8] разложения (3), записанного для важного и интересующего нас конкретного случая $n_f = 3$:

$$\tilde{\beta}(\alpha_s, n_f = 3) \equiv -\beta(a_s) / (a_s^2 \beta_0) = 1 + 0,565884\alpha_s + 0,453014\alpha_s^2 + 0,676967\alpha_s^3 + 0,580928\alpha_s^4. \quad (17)$$

Также отметим, что для других физически важных случаев $n_f = 4, 5, 6$ численные значения коэффициентов разложения (3) также являются достаточно малыми и не обнаруживают тенденции к росту [7, 8]. Таким образом, численные значения коэффициентов разложения (3) являются удивительно малыми. В частности, достаточно малым оказалось численное значение недавно найденного пятипетлевого коэффициента разложения бета-функции при всех физических значениях параметра n_f , что свидетельствует о высокой вероятности возможной сходимости ряда теории возмущений КХД. Таким образом, до сих пор не обнаружено никаких признаков возможной расходимости ряда возмущений для бета-функции, что наряду с приведенным ранее аргументом означает большую вероятность сходимости КХД-ряда (3). Дальнейшим обоснованием правильности и корректности проведенных расчетов с учетом пятипетлевых поправок в рассматриваемой области низких энергий является дополнительно тот факт, что в целом результаты расчетов очень хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными даже в исследуемой области низких энергий, а также тот факт, что имеется очень хорошая тенденция к сходимости рассчитываемых в данной области величин, в частности полюса Ландау.

В целом же, подводя итог обсуждению, следует подчеркнуть, что никакого другого способа и метода изучения ряда теории возмущений КХД и соответственно бета-функции КХД, кроме как путем добавления и учета новых последующих членов разложения, в настоящее время не имеется, – к большому сожалению. И соответственно единственно доступный имеющийся способ судить о возможной сходимости или расходимости ряда теории возмущений КХД – только по поведению коэффициентов данного ряда, т.е. по абсолютным величинам коэффициентов в зависимости от роста их порядка. Отсутствие же роста установленных к настоящему времени коэффициентов разложения вплоть до пятипетлевого порядка свидетельствует гораздо сильнее именно в пользу более вероятной сходимости этого ряда, как отмечалось в работах [7, 8], где и был найден

пятипетлевой коэффициент разложения КХД. Таким образом, учет последующего нового члена разложения – на данный момент практически единственный путь возможного улучшения теории, в том числе и в области сильной связи, целесообразность и условия применимости которого подтверждаются согласованностью полученных результатов, их хорошей сходимостью и относительно малыми значениями вновь полученных коэффициентов разложения, точнее отсутствием их роста.

6. Основные выводы и заключение

В работе на основе ренормгруппового уравнения КХД исследуется поведение бегущей константы связи сильного взаимодействия в области низких энергий $\mu \lesssim 25$ ГэВ. Рассчитанные с использованием недавно полученного пятипетлевого коэффициента β_4 [7, 8] значения константы связи $\alpha_s(\mu)$ исключительно хорошо согласуются с экспериментальными данными, что свидетельствует в пользу правильности и точности теории КХД. В работе изучена зависимость константы сильной связи $\alpha_s(\mu)$ от порядка n петлевого приближения при различных значениях энергии μ . Показано, что учет членов пятипетлевого порядка играет существенную роль в непертурбативной области энергий, меньших 1,5 ГэВ.

В работе также изучена зависимость положения полюса Ландау μ_0 (масштабного КХД-параметра $\Lambda \equiv \mu_0$) от порядка n петлевого приближения ренормгруппового уравнения КХД. Установлена сходимость положения полюса Ландау к его истинному значению при увеличении порядка приближения n . В случае пятипетлевого порядка приближения получено значение $\mu_0 \equiv \Lambda = 664,9$ МэВ, которое оказалось несколько большим значения данного параметра $\Lambda = 332(17)$ МэВ, приведенного в последнем обзоре PDG [3]. При этом следует указать, что PDG-значение было рассчитано в четырехпетлевом порядке с использованием приближенного решения ренормгруппового уравнения, которое существенно отличается от точного численного решения уравнения при низких энергиях в области положения полюса. В то же время полученное нами значение $\Lambda = 664,9$ МэВ хорошо согласуется со значением $\Lambda = 641,4$ МэВ, которое является усредненным значением величин $\Lambda = 565,6$ и $\Lambda = 717,2$ МэВ, полученных в работе [37] для случаев $\alpha_s(M_\tau) = 0,32$ и $\alpha_s(M_\tau) = 0,35$. Следует подчеркнуть, что

найденное значение полюса Ландау $\mu_0 \equiv \Lambda = 664,9$ МэВ находится в непосредственной близости к физической области энергий $\mu \gtrsim 0,7$ ГэВ, в которой константа сильной связи становится меньше единицы: $\alpha_s(0,71 \text{ ГэВ}) < 1$. Также для описания зависимости $\alpha_s(\mu)$ в работе предложена простая однополюсная формула, которая исключительно хорошо описывает кон-

станту сильной связи в рассматриваемой области энергий. В целом же учет пятипетлевого коэффициента теории возмущений КХД позволяет улучшить описание в области низких энергий.

Данная работа выполнена по темам 0117U00237 НАН Украины и 0117U00240 Отделения физики и астрономии НАН Украины.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. F.J. Ynduráin. *The Theory of Quark and Gluon Interactions* (Berlin: Springer-Verlag, 2006) 476 p.
2. W. Greiner, S. Schramm, E. Stein. *Quantum Chromodynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 2007) 554 p.
3. M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *Phys. Rev. D* 98 (2018) 030001.
4. S. Bethke. Determination of the QCD coupling α_s . *J. Phys. G* 26 (2000) R27.
5. G.M. Prosperi, M. Raciti, C. Simolo. On the running coupling constant in QCD. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 58 (2007) 387.
6. A. Deur, S.J. Brodsky, G. de Téramond. The QCD running coupling. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 90 (2016) 1.
7. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn. Five-loop running of the QCD coupling constant. *Phys. Rev. Lett.* 118 (2017) 082002.
8. F. Herzog et al. The five-loop beta function of Yang-Mills theory with fermions. *J. High Energy Phys. JHEP* 02 (2017) 090.
9. E.C.G. Stueckelberg, A. Petermann. La normalisation des constantes dans la theorie des quanta. *Helv. Phys. Acta* 26 (1953) 499.
10. A. Petermann. Renormalization group and the deep structure of the proton. *Phys. Rep.* 53 (1979) 157.
11. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. *Введение в теорию квантованных полей* (М.: Наука, 1984) 600 с.
12. D. O'Connor, C.R. Stephens. Renormalization group theory in the new millennium. II. *Phys. Rep.* 348 (2001) 1.
13. J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
14. M. Gell-Mann, F.E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.* 95 (1954) 1300.
15. C.G. Callan. Broken scale invariance in scalar field theory. *Phys. Rev. D* 2 (1970) 1541.
16. K. Symanzik. Small distance behaviour in field theory and power counting. *Comm. Math. Phys.* 18 (1970) 227. <https://doi.org/10.1007/BF01649434>
17. D.J. Gross, F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1343.
18. H.D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions. *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973) 1346.
19. W.E. Caswell. Asymptotic behavior of non-abelian gauge theories to two-loop order. *Phys. Rev. Lett.* 33 (1974) 244.
20. D.R.T. Jones. Two-loop diagrams in Yang-Mills theory. *Nucl. Phys. B* 75 (1974) 531.
21. O.V. Tarasov, A.A. Vladimirov, A.Yu. Zharkov. The Gell-Mann-Low function of QCD in the three-loop approximation. *Phys. Lett. B* 93 (1980) 429.
22. S.A. Larin, J.A.M. Vermaseren. The three-loop QCD β -function and anomalous dimensions. *Phys. Lett. B* 303 (1993) 334.
23. T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin. The four-loop β -function in quantum chromodynamics. *Phys. Lett. B* 400 (1997) 379.
24. M. Czakon. The four-loop QCD β -function and anomalous dimensions. *Nucl. Phys. B* 710 (2005) 485.
25. J. Beringer et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D* 86 (2012) 010001.
26. K.A. Olive et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Chin. Phys. C* 38 (2014) 090001.
27. D. d'Enterria et al. High-precision α_s measurements from LHC to FCC-ee. [arXiv:1512.05194 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1512.05194).
28. S. Aoki et al. Review of lattice results concerning low-energy particle physics. *Eur. Phys. J. C* 77 (2017) 112.
29. Л.Д. Ландау, А.А. Абрикосов, И.М. Халатников. Асимптотическое выражение для гриновской функции фотона в квантовой электродинамике. *ДАН СССР* 95 (1954) 1177.
30. Л.Д. Ландау, А.А. Абрикосов, И.М. Халатников. Масса электрона в квантовой электродинамике. *ДАН СССР* 96 (1954) 261.
31. L.D. Landau. On the quantum theory of fields. In: *Niels Bohr and the Development of Physics*. Ed. W. Pauli (London: Pergamon Press Ltd., 1955) p. 52.
32. K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, M. Steinhauser. RunDec: a Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Comp. Phys. Comm.* 133 (2000) 43.
33. Y. Schröder, M. Steinhauser. Four-loop decoupling relations for the strong coupling. *J. High Energy Phys. JHEP* 01 (2006) 051.
34. K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, C. Sturm. QCD decoupling at four loops. *Nucl. Phys. B* 744 (2006) 121.
35. B. Schmidt, M. Steinhauser. CRunDec: A C++ package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Comp. Phys. Comm.* 183 (2012) 1845.
36. F. Herren, M. Steinhauser. Version 3 of RunDec and CRunDec. *Comp. Phys. Comm.* 224 (2018) 333.
37. N. Zenine. The analytic running coupling of QCD at the two loop level. *Proc. of the 3-rd Nucl. and Part. Phys. Conf. NUPAC-2001, Cairo, Egypt, Oct 20 - 24, 2001 (Cairo, 2002) p. 140.*

38. Л.Б. Окунь. *Физика элементарных частиц* (М.: Наука, 1988) 272 с.
39. Т. Эрикссон, В. Вайзе. *Пионы и ядра* (М.: Наука, 1991) 512 с.
40. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Изучение зарядовой зависимости пион-нуклонной константы связи с использованием данных о нуклон-нуклонном взаимодействии при низких энергиях. *Ядерная Физика* 79 (2016) 8.
41. K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser. Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the modified minimal-subtraction scheme. *Phys. Rev. Lett.* 79 (1997) 2184.
42. K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser. Decoupling relations to $O(\alpha_s^3)$ and their connection to low-energy theorems. *Nucl. Phys. B* 510 (1998) 61.
43. E. Gardi, M. Karliner, G. Grunberg. Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure? *J. High Energy Phys. JHEP* 07 (1998) 007.
44. M. Cini, S. Fubini, A. Stanghellini. Fixed angle dispersion relations for nucleon-nucleon scattering. *Phys. Rev.* 114 (1959) 1633.
45. W.T.H. van Oers, J.D. Seagrave. The neutron-deuteron scattering lengths. *Phys. Lett. B* 24 (1967) 562.
46. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Описание дублетного низкоэнергетического рассеяния нейтрона на дейтроне на основе параметров, характеризующих связанное и виртуальное состояния тритона. *Ядерная Физика* 63 (2000) 1798.
47. В.А. Бабенко, Н.М. Петров. Описание рассеяния и связанного состояния в системе двух нуклонов на основе баргмановского представления S-матрицы. *Ядерная Физика* 68 (2005) 244.
48. J. Ellis, M. Karliner. Determination of α_s and the nucleon spin decomposition using recent polarized structure function data. *Phys. Lett. B* 341 (1995) 397.
49. A.A. Penin, A.A. Pivovarov. Next-to-next-to-leading order vacuum polarization function of heavy quark near threshold and sum rules for $b\bar{b}$ system. *Phys. Lett. B* 435 (1998) 413.
50. S. Bethke. α_s at Zinnowitz 2004. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* 135 (2004) 345.
51. C.T.H. Davies et al. Update: accurate determinations of α_s from realistic lattice QCD. *Phys. Rev. D* 78 (2008) 114507.
52. S. Bethke. The 2009 world average of α_s . *Eur. Phys. J. C* 64 (2009) 689.
53. N. Brambilla et al. Extraction of α_s from radiative $\Upsilon(1S)$ decays. *Phys. Rev. D* 75 (2007) 074014.
54. P.A. Movilla Fernandez. Determinations of α_s at $\sqrt{s} = 14$ to 44 GeV using resummed calculations. [arXiv:2020.05014 \[hep-ex\]](https://arxiv.org/abs/2020.05014).
55. S. Bethke. α_s 2016. *Nucl. Part. Phys. Proc.* 282-284 (2017) 149.
56. A. Pich. Precision physics with QCD. *EPJ Web of Conferences* 137 (2017) 01016.
57. K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, A. Kwiatkowski. QCD corrections to the e^+e^- cross-section and the Z boson decay rate: concepts and results. *Phys. Rep.* 277 (1996) 189.
58. P.A. Baikov et al. Adler function, sum rules and Crewther relation of order $O(\alpha_s^4)$: The singlet case. *Phys. Lett. B* 714 (2012) 62.
59. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn. Order α_s^4 QCD corrections to Z and τ decays. *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 012002.
60. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn. Scalar correlator at $O(\alpha_s^4)$, Higgs boson decay into bottom quarks, and bounds on the light-quark masses. *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 012003.
61. F. Rellich. *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems* (New York: Gordon and Breach, 1969) 127 p.
62. К. Фридрихс. *Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве*. (М.: Мир, 1969) 232 с.
63. Т. Като. *Теория возмущений линейных операторов* (М.: Мир, 1972) 740 с.
64. М. Рид, Б. Саймон. *Методы современной математической физики*. Том 4 (М.: Мир, 1982) 426 с.
65. B. Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory: a mathematical overview. *Int. J. Quant. Chem.* 21 (1982) 3.
66. B. Simon. Fifty years of eigenvalue perturbation theory. *Bull. Am. Math. Soc.* 24 (1991) 303.
67. E.J. Weniger. A convergent renormalized strong coupling perturbation expansion for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* 246 (1996) 133.

В. О. Бабенко*, М. М. Петров

Институт теоретичної фізики ім. М. М. Боголюбова НАН України, Київ, Україна

*Відповідальний автор: pet2@ukr.net

СТОСОВНО ВЛАСТИВОСТЕЙ РУХОМОЇ КОНСТАНТИ ЗВ'ЯЗКУ СИЛЬНОЇ ВЗАЄМОДІЇ В ОБЛАСТІ НИЗЬКИХ ЕНЕРГІЙ

Рухома константа зв'язку α_s квантової хромодинаміки (КХД) та її залежність від перенормувального енергетичного масштабного КХД-параметра μ досліджуються в області енергій $\mu \lesssim 25$ GeV на основі прямого чисельного інтегрування основного ренормгрупового рівняння КХД із врахуванням членів включно до п'ятипетельного порядку. Вперше в п'ятипетельному порядку розраховано значення полюса константи сильно-го зв'язку – полюса Ландау $\mu_0 \equiv \Lambda = 664,9$ MeV (масштабного КХД-параметра Λ). Також для опису залежності

$\alpha_s(\mu)$ запропоновано просту однополюсну формулу, яка дає дуже добрий опис константи сильного зв'язку в даній області енергій.

Ключові слова: квантова хромодинаміка (КХД), константа зв'язку сильної взаємодії, теорія збурень КХД, ренормгрупове рівняння КХД.

V. A. Babenko*, N. M. Petrov

Bogolyubov Institute for Theoretical Physics, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: pet2@ukr.net

PROPERTIES OF THE RUNNING COUPLING CONSTANT OF STRONG INTERACTION AT LOW ENERGIES

Quantum chromodynamics (QCD) running coupling constant α_s and its dependence on the energy scale renormalization parameter μ are studied in the energy range of $\mu \lesssim 25$ GeV based on the five-loop calculations according to QCD renormalization group equation. Position of the Landau pole $\mu_0 \equiv \Lambda = 664.9$ MeV of the $\alpha_s(\mu)$ dependence (QCD scale parameter Λ) is calculated in the five-loop order for the first time. Energy dependence $\alpha_s(\mu)$ of the running coupling constant in the given energy range is very well described by the proposed simple one-pole formula.

Keywords: quantum chromodynamics (QCD), coupling constant of strong interaction, QCD perturbation theory, renormalization group equation of QCD.

REFERENCES

1. F.J. Ynduráin. *The Theory of Quark and Gluon Interactions* (Berlin: Springer-Verlag, 2006) 476 p.
2. W. Greiner, S. Schramm, E. Stein. *Quantum Chromodynamics* (Berlin: Springer-Verlag, 2007) 554 p.
3. M. Tanabashi et al. (Particle Data Group). Review of particle physics. *Phys. Rev. D* **98** (2018) 030001.
4. S. Bethke. Determination of the QCD coupling α_s . *J. Phys. G* **26** (2000) R27.
5. G.M. Prosperi, M. Raciti, C. Simolo. On the running coupling constant in QCD. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **58** (2007) 387.
6. A. Deur, S.J. Brodsky, G. de Téramond. The QCD running coupling. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **90** (2016) 1.
7. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn. Five-loop running of the QCD coupling constant. *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 082002.
8. F. Herzog et al. The five-loop beta function of Yang-Mills theory with fermions. *J. High Energy Phys. JHEP* **02** (2017) 090.
9. E.C.G. Stueckelberg, A. Petermann. La normalisation des constantes dans la theorie des quanta. *Helv. Phys. Acta* **26** (1953) 499.
10. A. Petermann. Renormalization group and the deep structure of the proton. *Phys. Rep.* **53** (1979) 157.
11. N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov. *Introduction to the Theory of Quantized Fields* (New York: Wiley Interscience, 1980) 620 p.
12. D. O'Connor, C.R. Stephens. Renormalization group theory in the new millennium. II. *Phys. Rep.* **348** (2001) 1.
13. J. Zinn-Justin. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford: Clarendon Press, 2002) 1054 p.
14. M. Gell-Mann, F.E. Low. Quantum electrodynamics at small distances. *Phys. Rev.* **95** (1954) 1300.
15. C.G. Callan. Broken scale invariance in scalar field theory. *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1541.
16. K. Symanzik. Small distance behaviour in field theory and power counting. *Comm. Math. Phys.* **18** (1970) 227.
17. D.J. Gross, F. Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1343.
18. H.D. Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions. *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 1346.
19. W.E. Caswell. Asymptotic behavior of non-abelian gauge theories to two-loop order. *Phys. Rev. Lett.* **33** (1974) 244.
20. D.R.T. Jones. Two-loop diagrams in Yang-Mills theory. *Nucl. Phys. B* **75** (1974) 531.
21. O.V. Tarasov, A.A. Vladimirov, A.Yu. Zharkov. The Gell-Mann-Low function of QCD in the three-loop approximation. *Phys. Lett. B* **93** (1980) 429.
22. S.A. Larin, J.A.M. Vermaseren. The three-loop QCD β -function and anomalous dimensions. *Phys. Lett. B* **303** (1993) 334.
23. T. van Ritbergen, J.A.M. Vermaseren, S.A. Larin. The four-loop β -function in quantum chromodynamics. *Phys. Lett. B* **400** (1997) 379.
24. M. Czakon. The four-loop QCD β -function and anomalous dimensions. *Nucl. Phys. B* **710** (2005) 485.
25. J. Beringer et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D* **86** (2012) 010001.
26. K.A. Olive et al. (Particle Data Group). Review of Particle Physics. *Chin. Phys. C* **38** (2014) 090001.
27. D. d'Enterria et al. High-precision α_s measurements from LHC to FCC-ee. [arXiv:1512.05194 \[hep-ph\]](https://arxiv.org/abs/1512.05194).
28. S. Aoki et al. Review of lattice results concerning low-energy particle physics. *Eur. Phys. J. C* **77** (2017) 112.
29. L.D. Landau, A.A. Abrikosov, I.M. Khalatnikov. Asymptotic expression for the photon Green's function in quantum electrodynamics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **95** (1954) 1177. (Rus)
30. L.D. Landau, A.A. Abrikosov, I.M. Khalatnikov. The electron mass in quantum electrodynamics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **96** (1954) 261. (Rus)
31. L.D. Landau. On the quantum theory of fields. In:

- Niels Bohr and the Development of Physics*. Ed. W. Pauli (London: Pergamon Press Ltd., 1955) p. 52.
32. K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, M. Steinhauser. RunDec: a Mathematica package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Comp. Phys. Comm.* **133** (2000) 43.
 33. Y. Schröder, M. Steinhauser. Four-loop decoupling relations for the strong coupling. *J. High Energy Phys. JHEP* **01** (2006) 051.
 34. K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, C. Sturm. QCD decoupling at four loops. *Nucl. Phys. B* **744** (2006) 121.
 35. B. Schmidt, M. Steinhauser. CRUnDec: A C++ package for running and decoupling of the strong coupling and quark masses. *Comp. Phys. Comm.* **183** (2012) 1845.
 36. F. Herren, M. Steinhauser. Version 3 of RunDec and CRUnDec. *Comp. Phys. Comm.* **224** (2018) 333.
 37. N. Zenine. The analytic running coupling of QCD at the two loop level. *Proc. of the 3-rd Nucl. and Part. Phys. Conf. NUPPAC-2001, Cairo, Egypt, Oct. 20 - 24, 2001 (Cairo, 2002)* p. 140.
 38. L.B. Okun. *Elementary Particle Physics* (Moskva: Nauka, 1988) 272 p. (Rus)
 39. T. Ericson, W. Weise. *Pions and Nuclei* (Oxford: Clarendon Press, 1988) 479 p.
 40. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Study of the charge dependence of the pion-nucleon coupling constant on the basis of data on low-energy nucleon-nucleon interactions. *Phys. At. Nucl.* **79** (2016) 67.
 41. K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser. Strong coupling constant with flavor thresholds at four loops in the modified minimal-subtraction scheme. *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 2184.
 42. K.G. Chetyrkin, B.A. Kniehl, M. Steinhauser. Decoupling relations to $O(\alpha_s^3)$ and their connection to low-energy theorems. *Nucl. Phys. B* **510** (1998) 61.
 43. E. Gardi, M. Karliner, G. Grunberg. Can the QCD running coupling have a causal analyticity structure? *J. High Energy Phys. JHEP* **07** (1998) 007.
 44. M. Cini, S. Fubini, A. Stanghellini. Fixed angle dispersion relations for nucleon-nucleon scattering. *Phys. Rev.* **114** (1959) 1633.
 45. W.T.H. van Oers, J.D. Seagrave. The neutron-deuteron scattering lengths. *Phys. Lett. B* **24** (1967) 562.
 46. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Description of the low-energy doublet neutron-deuteron scattering in terms of parameters characterizing bound and virtual triton states. *Phys. At. Nucl.* **63** (2000) 1709.
 47. V.A. Babenko, N.M. Petrov. Description of scattering and of a bound state in the two-nucleon system on the basis of the Bargmann representation of the S matrix. *Phys. At. Nucl.* **68** (2005) 219.
 48. J. Ellis, M. Karliner. Determination of α_s and the nucleon spin decomposition using recent polarized structure function data. *Phys. Lett. B* **341** (1995) 397.
 49. A.A. Penin, A.A. Pivovarov. Next-to-next-to-leading order vacuum polarization function of heavy quark near threshold and sum rules for $b\bar{b}$ system. *Phys. Lett. B* **435** (1998) 413.
 50. S. Bethke. α_s at Zinnowitz 2004. *Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **135** (2004) 345.
 51. C.T.H. Davies et al. Update: accurate determinations of α_s from realistic lattice QCD. *Phys. Rev. D* **78** (2008) 114507.
 52. S. Bethke. The 2009 world average of α_s . *Eur. Phys. J. C* **64** (2009) 689.
 53. N. Brambilla et al. Extraction of α_s from radiative $\Upsilon(1S)$ decays. *Phys. Rev. D* **75** (2007) 074014.
 54. P.A. Movilla Fernandez. Determinations of α_s at $\sqrt{s} = 14$ to 44 GeV using resummed calculations. [arXiv:20205014 \[hep-ex\]](https://arxiv.org/abs/20205014).
 55. S. Bethke. α_s , 2016. *Nucl. Part. Phys. Proc.* **282-284** (2017) 149.
 56. A. Pich. Precision physics with QCD. *EPJ Web of Conferences* **137** (2017) 01016.
 57. K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn, A. Kwiatkowski. QCD corrections to the e^+e^- cross-section and the Z boson decay rate: concepts and results. *Phys. Rep.* **277** (1996) 189.
 58. P.A. Baikov et al. Adler function, sum rules and Crewther relation of order $O(\alpha_s^4)$: The singlet case. *Phys. Lett. B* **714** (2012) 62.
 59. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn. Order α_s^4 QCD corrections to Z and τ decays. *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 012002.
 60. P.A. Baikov, K.G. Chetyrkin, J.H. Kühn. Scalar correlator at $O(\alpha_s^4)$, Higgs boson decay into bottom quarks, and bounds on the light-quark masses. *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 012003.
 61. F. Rellich. *Perturbation Theory of Eigenvalue Problems* (New York: Gordon and Breach, 1969) 127 p.
 62. K.O. Friedrichs. *Perturbation of Spectra in Hilbert Space* (Providence: Am. Math. Soc., 1965) 178 p.
 63. T. Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators* (Berlin: Springer-Verlag, 1995) 619 p.
 64. M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Vol. 4 (New York: Academic Press, 1978) 325 p.
 65. B. Simon. Large orders and summability of eigenvalue perturbation theory: a mathematical overview. *Int. J. Quant. Chem.* **21** (1982) 3.
 66. B. Simon. Fifty years of eigenvalue perturbation theory. *Bull. Am. Math. Soc.* **24** (1991) 303.
 67. E.J. Weniger. A convergent renormalized strong coupling perturbation expansion for the ground state energy of the quartic, sextic, and octic anharmonic oscillator. *Ann. Phys.* **246** (1996) 133.

Надійшла 10.10.2018
Received 10.10.2018