

К. А. Шаульський*, С. П. Майданюк

Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ, Україна

*Відповідальний автор: shaulskyi_kostiantyn@outlook.com

**КВАНТОВІ ЕФЕКТИ ПІКНОЯДЕРНИХ РЕАКЦІЙ У КОМПАКТНИХ ЗОРЯХ:
НОВІ КВАЗІЗВ'ЯЗАНІ СТАНИ ТА СПЕКТРОСКОПІЯ¹**

Досліджено квантові ефекти у пікноядерних реакціях у компактних зорях при нульових температурах з високою точністю. За допомогою методу багаторазових внутрішніх відбиттів проаналізовано реакцію $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$. Дослідження таких реакцій вимагає повного врахування квантових потоків у внутрішній області ядер. Це зменшує частоту та кількість пікноядерних реакцій до 1,8 раза. Це призводить до появи нових станів (названих нами як квазізв'язані стани), коли складене ядро утворюється максимально ймовірно. Як показано, мінімальна енергія подібного стану трішки вища за енергію нульових коливань у вузлах ґратки у пікноядерній реакції, однак ймовірність утворення складеної системи у квазізв'язаному стані істотно більша, ніж відповідна ймовірність у стані нульових коливань. Доцільно стверджувати, що частота реакцій у квазізв'язаних станах більш ймовірна, ніж у станах нульових коливань. Це може призвести до значних змін в оцінках швидкостей реакцій у зорях.

Ключові слова: пікноядерні реакції, компактна зоря, нейтронна зоря, метод багаторазових внутрішніх відбиттів, коефіцієнти проникності та відбиття, злиття, квазізв'язані стани, складене ядро, щільна ядерна матерія, нульові коливання, тунелювання.

1. Вступ

Коли у зорях термічна енергія реагуючих ядер перевищує енергію кулонівського відштовхування між ними, то можуть відбуватися реакції. За набагато більш високих густин енергія нульових коливань ядер у ґратці навіть при нульових температурах може призвести до значного підвищення швидкості реакцій. Так, наприклад, унаслідок пікноядерної реакції ядра $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ перетворюються у ^{24}Mg при густині вищій за $10^9 \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$. Цей феномен давно відомий як *пікноядерна реакція* [1]. Пояснення цих реакцій було дано ще Зельдовичем, який запропонував оцінювати енергію коливань ядер у ґратці (з подальшою можливістю такої реакції) як основний стан дискретного спектра енергії для гармонічного потенціалу, утвореного в середній точці між двома ядрами у вузлах ґратки [2]. Для деяких ядер у ґратках компактних зір було оцінено швидкості реакцій [3].

Пікноядерне горіння відбувається у щільних ядрах білих карликів [4] та у корі акреційних нейтронних зір [5]. На сьогодні досліджено вже пікноядерні реакції в компактних зорях, коли зоряна матерія описувалася як багатокомпонентна та щільна. Ключовий процес у таких реакціях – це злиття ядер, при якому утворюються нові ядра з більшою масою. Так, у [6] цей процес

було проаналізовано для реакцій, де автори визначили астрофізичні *S*-фактори для злиття карбон-оксигену та оксиген-оксигену на основі мікроскопічних теорій. У тій роботі було знайдено феноменологічні вирази для швидкості реакцій, що містять кілька підгоночних параметрів, які є ефективними для швидких обчислень. У [7] астрофізичні *S*-фактори було розраховано для 946 реакцій злиття, які включають стабільні та нейтрон-надлишкові ізотопи вуглецю, кисню, неону та магнію для енергій центра мас, що знаходяться у межах від 2 до $\sim 18 - 30 \text{ MeV}$ [8]. Великий масив астрофізичних *S*-факторів та їхній компактний вигляд було представлено у [9] для ізотопів берилію, бора, вуглецю, азоту, кисню, фтору, неону, натрію, магнію та кремнію (було створено масив даних *S*-факторів для близько 5000 нерезонансних реакцій злиття).

Важливим питанням є вплив структури багатокомпонентної матерії (ґратка, однорідна суміш тощо) на ядерні процеси, що вивчалось багатьма дослідниками. Але з попередніх досліджень [10, 11] відомо, що врахування квантових потоків у внутрішній області ядерної системи під час реакції істотно змінює розрахункові перерізи реакцій. Це питання ще не було розглянуте у вивченні пікноядерних реакцій, тож воно є головною ідеєю дослідження в цій статті.

© К. А. Шаульський, С. П. Майданюк, 2023

¹ Доповідь на XXIX Щорічній науковій конференції Інституту ядерних досліджень НАН України, Київ, 26 - 30 вересня 2022 р.

Дослідження захоплення α -частинок ядрами [10, 11] показує необхідність взяття до уваги внутрішніх ядерних процесів, що залежить від форми ядерного потенціалу. Зокрема, різні сценарії захоплення (до початку стадії злиття) дають результуючі перерізи з різницею до 4 разів для однакових енергій пучків α -частинок, що використовуються в експериментах. Такі зміни контролюються додатковими незалежними параметрами, отриманими в результаті повного квантового розгляду (що не враховується у наближенні Вентцеля - Крамерса - Бріллюена (ВКБ-наближення)). За допомогою методу у [10], було отримано нову параметризацію α -ядерного потенціалу та ймовірності злиття (див. рис. 6, табл. 2 та В. 3 у тій статті). У даному підході досягнуто високої точності опису експериментальних даних α -захоплення (обчислення на рис. 3, *b* в [11] для $\alpha + {}^{44}\text{Ca}$ у порівнянні з даними [13]).²

Цей квантовий ефект ігнорується в оцінках перерізів на основі оцінок проникностей бар'єрів у ВКБ-наближенні у дослідженні пікноядерних реакцій. Виходячи з такої мотивації, ми зацікавлені в квантовому розгляді пікноядерних реакцій у компактних зорях. У цій статті зосереджуємося на аспектах, де квантові ефекти відіграють істотну роль у реакціях такого типу.

Важливість повністю квантового дослідження полягає також у введенні тестів квантової механіки, які дають змогу перевірити розрахунки (в інших підходах подібні перевірки ще не реалізовано). У рамках підходу [10, 11] точність обчислених характеристик (коефіцієнтів проникності, перерізів розсіювання, *S*-факторів, що базуються на визначенні коефіцієнтів проникності) становить приблизно 10^{-14} , тоді як за межами такого квантового підходу точність базується на ВКБ-розрахунках, що може становити близько $10^{-1} - 10^{-3}$ всередині енергетичної області, де застосовується таке наближення (якщо не враховувати роль додаткових незалежних квантових параметрів, зазначених вище). Енергія для пікноядерних

реакцій низька, тому існують лише процеси глибокого тунелювання під бар'єром, де ВКБ-наближення не застосовується, відповідно до квантової механіки. Це підсилює наш інтерес до цієї проблеми. У роботі [14] було розпочато дослідження питань, вказаних вище, на прикладі реакції ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$. Така реакція часто використовується при аналізі властивостей та еволюції білих карликів. Іншою реакцією, що також часто використовується у таких дослідженнях, є ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ [8]. Тому у даній роботі ми продовжуємо такі дослідження, де в якості реакції обрали ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$.

Стаття організована таким чином. У розділі 2 представлено нове удосконалення формалізму багаторазових внутрішніх відбиттів (БВВ) з орієнтиром на опис пікноядерних реакцій. У розділах 3 і 4 проаналізовано квантові властивості реакцій ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ [8], виконано розрахунки проникностей бар'єрів, перевірки оцінки ймовірностей утворення складеного ядра, енергій та інших квантових характеристик квазізв'язаних станів, швидкостей реакцій тощо. Висновки підсумовано у розділі 5.

2. Метод БВВ в описі ядро-ядерного розсіювання з можливістю злиття

Розглянемо процес захоплення частинки ядром з радіальним бар'єром довільної форми, який можна апроксимувати достатньо великою кількістю *N* прямокутних сходинок:

$$V(r) = \begin{cases} V_1 & r_{\min} < r \leq r_1 & (\text{область } 1), \\ \dots & \dots & \dots \\ V_{N_{\text{cap}}} & r_{N_{\text{cap}}-1} \leq r \leq r_{\text{cap}} & (\text{область } N_{\text{cap}}), \\ \dots & \dots & \dots \\ V_N & r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & (\text{область } N), \end{cases} \quad (1)$$

де V_j - константи ($j = 1 \dots N$). Позначимо першу область з лівою межею в точці r_{\min} (ми припускаємо $r_{\min} \leq 0$). На відміну від дослідження [10], у цій роботі припускаємо, що захоплення частинки ядром найбільш імовірно відбувається в області з номером N_{capture} після тунелювання через бар'єр, але існує також імовірність подальшого поширення хвиль у внутрішню область, тобто цей ефект потрібно також враховувати. Це впливає з умови неперервності потоків у квантовій механіці. Розв'язок радіальної хвильової функції (до її нормування) для енергій, вищих за висоту бар'єра, має вигляд

² Просте розуміння нових незалежних параметрів можна отримати з порівняння хвильової функції в першому та другому наближеннях у квазікласичному підході. Зокрема, хвильова функція в другому наближенні включає імпульс і силу як додаткові параметри (наприклад, див. рівняння (46,9) і (46,11) у [12], с. 210). Це може бути ознакою додавання динамічних характеристик квантового процесу, який можна описати в стаціонарному формалізмі. Більш детальний підхід можна отримати, якщо вивчати двовимірне тунелювання у квантовій механіці.

$$\chi(r) = \begin{cases} \alpha_1 e^{ik_1 r} + \beta_1 e^{-ik_1 r}, & r_{\min} < r \leq r_1 & \text{(область 1),} \\ \alpha_2 e^{ik_2 r} + \beta_2 e^{-ik_2 r}, & r_1 \leq r \leq r_2 & \text{(область 2),} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{N-1} e^{ik_{N-1} r} + \beta_{N-1} e^{-ik_{N-1} r}, & r_{N-2} \leq r \leq r_{N-1} & \text{(область } N-1), \\ e^{-ik_N r} + A_R e^{ik_N r}, & r_{N-1} \leq r \leq r_{\max} & \text{(область } N), \end{cases} \quad (2)$$

де α_j та β_j - невідомі амплітуди, A_R - невідома амплітуда повного відбиття, $k_j = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(\tilde{E} - V_j)}$ - комплексні хвильові числа. Зафіксуємо нормування так, щоб модуль амплітуди падаючої хвилі $e^{-ik_N r}$ дорівнював одиниці. Ми можемо знайти розв'язок цієї задачі за допомогою методу БВВ. Цей метод описано в деталях у [10, 11, 15]. У цій статті зосередимося лише на основних аспектах цього підходу для пояснення логіки отримання розв'язку.

Кожну хвилю на довільному етапі можна представити як множення експоненційного множника $e^{\pm ik_j r}$ та невідомої амплітуди. Амплітуда хвилі, що пройшла межу з номером j , записується, як добуток амплітуди падаючої хвилі та нового фактора T_j^{\pm} (іншими словами, амплітуда переходу через межу з номером j). Нижній індекс вказує номер межі, верхній індекс «+» або «-» вказує напрямок падаючої хвилі вправо або вліво відповідно. Амплітуда відбитої від межі хвилі з номером j зв'язана з амплітудою падаючої на цю межу хвилі через нові фактори R_j^{\pm} . Коефіцієнти $T_1^{\pm} \dots T_{N-1}^{\pm}$ та $R_1^{\pm} \dots R_{N-1}^{\pm}$ знаходяться з таких рекурентних співвідношень:

$$T_j^+ = \frac{2k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j}, \quad T_j^- = \frac{2k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{i(k_j - k_{j+1})r_j},$$

$$R_j^+ = \frac{k_j - k_{j+1}}{k_j + k_{j+1}} e^{2ik_j r_j}, \quad R_j^- = \frac{k_{j+1} - k_j}{k_j + k_{j+1}} e^{-2ik_{j+1} r_j}. \quad (3)$$

Ключовим аспектом у формалізмі БВВ для бар'єра з дійсно великою кількістю сходинок є розрахунок сумарних хвиль для довільної області. Хвиля, що приходить в область з номером $j - 1$, сформована всіма можливими падаючими хвилями на бар'єр з координатою r_{j-1} , що утворені після всіх відбиттів та проходжень хвиль у праву область від цього бар'єра. Амплітуда такої сумарної хвилі визначена сумою амплітуд усіх падаючих хвиль на бар'єр у точці r_{j-1} , помножений на фактор T_{j-1}^- , як

$$\tilde{T}_{j-1}^- = \tilde{T}_j^- T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^m \right) = \frac{\tilde{T}_j^- T_{j-1}^-}{1 - R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \quad (4)$$

Повна амплітуда відбиття \tilde{R}_j^+ включає в собі всі хвилі, що проходять через межу в координаті r_j , які поширюються вправо і потім після відбиття та проходження повертаються назад в область з номером j :

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{j-1}^+ &= R_{j-1}^+ + T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^- \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^m \right) = \\ &= R_{j-1}^+ + \frac{T_{j-1}^+ \tilde{R}_j^+ T_{j-1}^-}{1 - R_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \end{aligned} \quad (5)$$

Амплітуди $\tilde{R}_{N-2}^+ \dots \tilde{R}_{N_{cap}}^+$ та $\tilde{T}_{N-2}^- \dots \tilde{T}_{N_{cap}}^-$ визначаються за допомогою рекурентних співвідношень (4) та (5), де слід використати таку умову для старту:

$$\tilde{R}_{N-1}^+ = R_{N-1}^+, \quad \tilde{T}_{N-1}^- = T_{N-1}^-. \quad (6)$$

Амплітуда сумарної хвилі відбиття, що об'єднує всі хвилі, відбиті від бар'єра в точці r_{j+1} та які поширюються вліво, така:

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{j+1}^- &= R_{j+1}^- + T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+ \left(1 + \sum_{m=1}^{+\infty} (R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-)^m \right) = \\ &= R_{j+1}^- + \frac{T_{j+1}^- \tilde{R}_j^- T_{j+1}^+}{1 - R_{j+1}^+ \tilde{R}_j^-}. \end{aligned} \quad (7)$$

Сумарна амплітуда $A_{T,bar}$ проходження через бар'єр (сумарна амплітуда $A_{R,bar}$ відбиття від бар'єра) визначається за допомогою всіх хвиль, що пройшли область потенціалу з бар'єрами (або відбилися від такої області) від r_{cap} до r_{N-1} , таким чином

$$A_{T,bar} = \tilde{T}_{N_{cap}}^-, \quad A_{R,bar} = \tilde{R}_{N-1}^-, \quad \text{де } \tilde{R}_{N_{cap}}^- = R_{N_{cap}}^-. \quad (8)$$

2.1. Амплітуди, коефіцієнти проходження та відбиття відносно бар'єра, перевірка

Можна знайти суму всіх амплітуд $A_{R,ext}$ хвиль, що відбилися від потенціального бар'єра ззовні (від зовнішньої точки повороту $r_{tp,ext}$ до r_{N-1}) та

поширювалися назовні (що можна охарактеризувати як *потенційне розсіяння* на потенціалі) таким чином

$$A_{R,ext} = \tilde{R}_{N-1}^-, \text{ де } \tilde{R}_{N_{p,ext}}^- = R_{N_{p,ext}}^- \quad (9)$$

та сумарну амплітуду $A_{R,tun}$ всіх хвиль, що відбилися відносно області потенціалу від r_{cap} до зовнішньої точки повороту $r_{p,ext}$ (іншими словами, вони пройшли через область зовнішнього потенціалу (без відбиттів), протунелювали під бар'єром, з можливим проходженням до межі в точці r_{cap} та потім відбилися назад) таким чином

$$A_{R,tun} = A_{R,bar} - A_{R,ps}. \quad (10)$$

Оцінюємо амплітуду осциляцій A_{osc} в області захоплення з номером N_{cap} як

$$A_{osc}(N_{cap}) = \frac{1}{1 - \tilde{R}_{N_{cap}-1}^- \tilde{R}_{N_{cap}}^+}. \quad (11)$$

Визначаємо коефіцієнти проникності T_{bar} та відбиття R_{bar} відносно всього бар'єра (тобто області потенціалу від r_{cap} до r_{N-1}) та додаємо також визначення для коефіцієнтів R_{ext} відбиття від зовнішньої частини бар'єра (тобто області від $r_{p,ext}$ до r_{N-1}) коефіцієнт R_{tun} відбиття від області бар'єра (тобто області від r_{cap} до $r_{p,ext}$) як

$$T_{bar} = \frac{k_{cap}}{k_N} \|A_{T,bar}\|^2, \quad R_{bar} = \|A_{R,bar}\|^2,$$

$$R_{ext} = \|A_{R,ext}\|^2, \quad R_{tun} = \|A_{R,tun}\|^2. \quad (12)$$

Перевіряємо властивість

$$T_{bar} + R_{bar} = 1, \quad (13)$$

яка використовується для індикації того, чи дає метод БВВ правильний розрахунок хвильової функції.

Підрахуємо суму амплітуд $\alpha_j^{(i)}$ та $\beta_j^{(i)}$. Для сум амплітуд в області з номером j маємо

$$\beta_j = \sum_i \beta_j^{(i)} = \tilde{T}_j^- \left(1 + \sum_i (\tilde{R}_{j-1}^- \tilde{R}_j^+)^i \right) = \frac{\tilde{T}_j^-}{1 - \tilde{R}_{j-1}^- \tilde{R}_j^+},$$

$$\alpha_j = \sum_i \alpha_j^{(i)} = \tilde{R}_{j-1}^- \sum_i \beta_j^{(i)} = \frac{\tilde{R}_{j-1}^- \tilde{T}_j^-}{1 - \tilde{R}_{j-1}^- \tilde{R}_j^+}. \quad (14)$$

2.2. Ймовірність існування складеного ядра

Щоб визначити ймовірність існування складеного ядра, визначаємо інтеграл від квадрата хвильової функції у внутрішній області бар'єра. У цій статті визначимо цю область як область між двома внутрішніми точками повороту $r_{int,1}$ та $r_{int,2}$. В області надбар'єрних енергій маємо

$$\int_{r_{int,1}}^{r_{int,2}} \|\chi(r)\|^2 dr = \sum_{j=1}^{n_{int}} \int_{r_{j-1}}^{r_j} \left\| \sum_i \alpha_j^{(i)} e^{ik_j r} + \sum_i \beta_j^{(i)} e^{-ik_j r} \right\|^2 dr = \sum_{j=1}^{n_{int}} \left\{ \left(\|\alpha_j\|^2 + \|\beta_j\|^2 \right) \Delta r + \frac{\|\alpha_j \beta_j\|}{k_j} \sin(\theta_{\alpha_j} - \theta_{\beta_j} + 2k_j r) \right\}_{r_{j-1}}^{r_j}, \quad (15)$$

де θ_{α_j} та θ_{β_j} - це фази амплітуд α_j та β_j відповідно. Якщо просторова область включає тунелювання, то вищенаведені формули повинні бути переписані в комплексній формі (де k_j - комплексні числа)

$$\int_0^{r_{int,max}} \|\chi(r)\|^2 dr = \sum_{j=1}^{n_{int,max}} \int_{r_{j-1}}^{r_j} \left\| \alpha_j e^{ik_j r} + \beta_j e^{-ik_j r} \right\|^2 dr = \sum_{j=1}^{n_{int,max}} \left\{ \left(\|\alpha_j\|^2 + \|\beta_j\|^2 \right) \Delta r + \frac{\alpha_j \beta_j^*}{2ik_j} e^{2ik_j r} \right\}_{r_{j-1}}^{r_j} - \frac{\alpha_j^* \beta_j}{2ik_j} e^{-2ik_j r} \right\}_{r_{j-1}}^{r_j}. \quad (16)$$

У цій статті визначимо ймовірність існування складеного ядра через інтеграл (16), порохований у просторовій області між двома точками повороту (де внутрішня точка повороту визначається

як точка повороту для підбар'єрних енергій, або як координата максимуму бар'єра для надбар'єрних енергій)

$$P_{cn} = \int_{r_{int,1}}^{r_{int,2}} \|\chi(r)\|^2 dr = \sum_{j=1}^{n_{int}} \left\{ \left(\|\alpha_j\|^2 + \|\beta_j\|^2 \right) \Delta r + \frac{\alpha_j \beta_j^*}{2ik_j} e^{2ik_j r} \right\}_{r_{j-1}}^{r_j} - \frac{\alpha_j^* \beta_j}{2ik_j} e^{-2ik_j r} \right\}_{r_{j-1}}^{r_j}. \quad (17)$$

У випадку найпростішого бар'єра, визначеним рівнянням (1) в [11] (і вивченим в розділі 2 цієї статі), можна записати $P_{cn}(E)$ так (див. рівняння (6) і (7) в [11])

$$P_{cn}^{(without\ fusion)} = P_{osc} T_{bar} P_{loc}, \quad P_{osc} = \|A_{osc}\|^2 = \frac{(k_1 + k_2)^2}{2k^2(1 - \cos(2k_1 r_1)) + 2k_1^2(1 + \cos(2k_1 r_1))},$$

$$T_{bar} \equiv \frac{k_1}{k_2} \|T_1^-\|^2, \quad P_{loc} = 2 \frac{k_2}{k_1} \left(r_1 - \frac{\sin(2k_1 r_1)}{2k_1} \right). \quad (18)$$

Порівнюючи формулу (17) з рівнянням (18), бачимо, що рівняння (17) більш складне. Неможливо представити це рівняння як добуток від трьох коефіцієнтів проникності, осциляцій та локалізації, як показано в рівнянні (18) (що відповідає ідеї Гамова, застосованої до зворотного процесу, тобто, α -розпаду ядра, як просто множення двох факторів осциляцій та проникності). Додамо формулу для швидкого злиття для найпростішого бар'єра

$$P_{cn}^{(fast\ fusion)} = \left\| \sum_i \beta_1^{(i)} \int_0^{r_1} R_0 e^{ik_1 r} + e^{-ik_1 r} \right\|^2 dr =$$

$$= \|T_1^-\|^2 r_1 = \frac{k_2 r_1}{k_1} T_{bar}. \quad (19)$$

2.3. Переріз розсіяння та коефіцієнти злиття

В описі захоплення одного ядра іншим ядром стандартне визначення перерізу злиття σ ґрунтується на проникності бар'єра $T_{bar,l}$ та ймовірності злиття P_l (що відбувається, як тільки ядро протунелювало через бар'єр) [13]:

$$\sigma_{fus}(E) = \sum_{l=0}^{+\infty} \sigma_l(E) = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l+1) T_{bar,l}(E) P_l, \quad (20)$$

де σ_l - перерізи злиття при l , E - енергія відносного руху падаючого ядра до іншого ядра. Для вивчення складеного ядра введемо нове визначення перерізу реакції злиття в термінах ймовірності існування складеного ядра (17) таким чином:

$$\sigma_l = \frac{\pi \hbar^2}{2mE} (2l+1) f_l(E) P_{cn}(E), \quad (21)$$

де $f_l(E)$ - додатковий фактор, який необхідний для поєднання ймовірності $P_{cn}(E)$, проникності $T_{bar,l}(E)$ та старого фактора злиття P_l . Для знаходження точного виразу цього коефіцієнта, розглянемо випадок повного злиття, описаного старою формулою. Подібний результат повинен дати коефіцієнт при коефіцієнтах злиття, що дорівнюють одиниці. Отримаємо

$$f(E) = \frac{k_{cap}}{k_N \|r_{cap} - r_{tp,in,l}\|}. \quad (22)$$

Тепер, щоб вивчити формування складеного ядра з повільним злиттям (тобто без миттєвого злиття), варіюємо ці коефіцієнти злиття у просторовій області між точкою захоплення r_{cap} та другою внутрішньою точкою повороту $r_{int,2}$.

3. Аналіз

Для аналізу ми обрали реакцію $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ [8]. Для таких реакцій раніше було отримано різні оцінки густини (наприклад, див. [3], с. 83). Хамада та Салпетер оцінили, що ^{12}C перетворюється в ^{24}Mg у пікноядерній реакції при густині, вищій за $6 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ [16]. Вони базувалися на оцінках швидкостей пікноядерних реакцій, розрахованих Камероном [1]. Пізніше їх було покращено (наприклад, див. розрахунки Салпетера та Ван Хорна [4] та ін.). Проте, вказані тут густини не дуже точні. Крім складності розрахунків урахування ненульової температури та ефектів від урахування кристалічної структури середовища зірки може значно збільшити швидкість реакцій (критична густина для карбону може бути близькою до $5 \cdot 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Але різниця в подібних оцінках не є принциповою для нашого аналізу. Та врахування нашого аналізу може суттєво змінити оцінки у тих роботах. Тому виберемо густину, надану Хамадою та Салпетером, для розрахунків також для $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$.

3.1. Потенціал взаємодії між ядрами, що знаходяться у вузлах ґратки

Визначимо потенціал взаємодії між ядрами як

$$V(r) = v_c(r) + v_N(r) + v_{l=0}(r), \quad (23)$$

де $v_c(r)$, $v_N(r)$ та $v_l(r)$ - кулонівська, ядерна та відцентрова компоненти, що мають таку форму:

$$v_N(r) = - \frac{V_R}{1 + \exp\left\{ \frac{r - R_R}{a_R} \right\}}, \quad v_l(r) = \frac{l(l+1)}{2mr^2},$$

$$v_c(r) = \begin{cases} \frac{Ze^2}{r}, & r \geq R_c, \\ \frac{Ze^2}{2R_c} \left\{ 3 - \frac{r^2}{R_c^2} \right\}, & r < R_c. \end{cases} \quad (24)$$

Тут V_R - сила ядерної компоненти, визначеної в мегаелектронвольтах як

$$V_R = -75,0 \text{ MeV}, \quad (25)$$

R_c та R_R - кулонівський та ядерний радіус дво-ядерної системи, a_R - дифузний параметр. При розрахунках ми скористалися³

$$R_R = r_R \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right), \quad R_c = r_c \left(A_1^{1/3} + A_2^{1/3} \right),$$

$$a_R = 0,44 \text{ фм}, \quad r_R = 1,30 \text{ фм}, \quad r_c = 1,30 \text{ фм}. \quad (26)$$

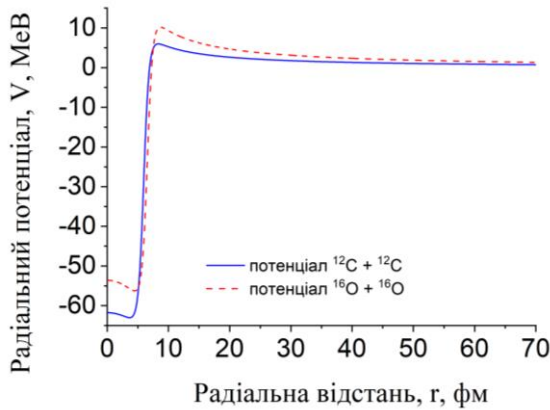


Рис. 1. Потенціали взаємодії двох ядер ^{12}C та ядер ^{16}O . Потенціали та їхні параметри визначено у рівняннях (23) - (26). (Див. кольоровий рисунок на сайті журналу.)

Так, для систем з ядер ^{12}C та ядер ^{16}O потенціал показано на рис. 1. Тут ясно видно форму внутрішньої ями потенціалу (на відміну від розрахунків у [3]). Так, у випадку ядер ^{12}C мінімум ями та максимум бар'єра мають значення

$$r_{\min} = 3,643 \text{ фм}, \quad V_{\min} = -63,018 \text{ MeV},$$

$$r_{\max} = 8,338 \text{ фм}, \quad V_{\max} = +5,972 \text{ MeV}. \quad (27)$$

³ Такий потенціал з параметрами використовувався нами раніше для тестів у розрахунках взаємодії ядерних фрагментів середніх і важких мас при дослідженні гальмівного випромінювання при діленні [17 - 19]. Отже, це простий спосіб просто продовжити формалізм і коди в новій задачі. У літературі можна знайти більш точні формулювання потенціалу взаємодії цих ядер. Наприклад, у [20, 21] S-фактори обчислюються на основі потенціалу Сан-Паулу для широкого діапазону реакцій термоядерного синтезу з участю різних ізотопів (див. також більш точний метод, що враховує більше фізичних властивостей ядер у [22]). Однак такі формулювання мають безліч деталей, що пов'язані з визначенням потенціалу та які не враховують аналіз квантових потоків, досліджених у цій статті. Отже, ефективніше описати наш квантовий метод без технічних ускладнень потенціалу та пов'язаних з цим обчислень.

3.2. Відстань між ядрами в зоряній матерії

Для початку визначимо відстань між ядрами у зоряній матерії, взявши до увагу її густину. Позначимо відстань між двома ядрами, що закріплені в ґратці як $2R_0$, і поставимо ядро, що «розсіюється», між ними (згідно з [3], рис. 3.5, с. 90). Густина ρ_0 у сфері навколо одного ядра в решітці може бути знайдена як відношення маси m_A ядра до об'єму всередині сфери як

$$\rho_0 = \frac{m_A}{V_A} = \frac{Am_u}{4/3\pi R_0^3} \quad (28)$$

або

$$R_0 = \left(\frac{Am_u}{4/3\pi\rho_0} \right)^{1/3}, \quad (29)$$

де m_u - маса одного нуклону, A - масове число ядра. Для пікноядерних реакцій $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ та $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ можна обрати густину згідно з [3] ($A = 12$)

$$\rho_0 = 6 \cdot 10^9 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}. \quad (30)$$

З рівняння (24) знайдемо

$$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}: \quad R_0 = 92,5 \text{ фм},$$

$$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}: \quad R_0 = 101,8 \text{ фм} \quad (31)$$

та концентрація ядер n_A розраховується як

$$(\rho_0 = Am_u \cdot n_A) \rightarrow \left(n_A = \frac{\rho_0}{Am_u} \right). \quad (32)$$

Розрахунки дають такий результат:

$$^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}: \quad n_A = 3,014 \cdot 10^{-7} \text{ фм}^{-3},$$

$$^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}: \quad n_A = 2,260 \cdot 10^{-7} \text{ фм}^{-3}. \quad (33)$$

3.3. Енергія нульових коливань у вузлах ґратки

Енергія нульових коливань ядер у вузлах ґратки розрахована так:

$$E_0 = \frac{\hbar\omega}{2} = \frac{\hbar Ze}{\sqrt{mR_0^3}}, \quad \Delta E = \frac{2Z^2 e^2}{R_0}, \quad E_{\text{full}} = E_0 + \Delta E. \quad (34)$$

Для $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ отримаємо

$$E_0 = 0,021 \text{ MeV}, \quad \Delta E = 0,567 \text{ MeV},$$

$$E_{\text{full}}^{(\text{zero mode})} = 0,589 \text{ MeV}. \quad (35)$$

Для $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ отримаємо

$$E_0 = 0,021 \text{ MeV}, \quad \Delta E = 0,917 \text{ MeV},$$

$$E_{\text{full}}^{(\text{zero mode})} = 0,939 \text{ MeV}. \quad (36)$$

3.4. Проникність бар'єра, швидкість реакції та роль нових квантових ефектів

Порахуємо проникність такого потенціально-го бар'єра, використовуючи метод БВВ. Рис. 2 показує для реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ зміну проникності залежно від зміщення точки переходу на стадію, де може відбуватися ядерний синтез у внутрішній ядерній реакції. Розрахунки проведено за енергії $E = 0,58 \text{ MeV}$ (надлишок цієї енергії над потенціалом $E_0 = 0,021 \text{ MeV}$ при $r = R_0$).

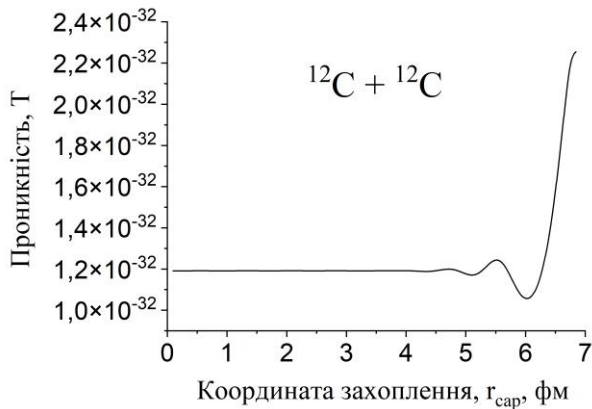


Рис. 2. Коефіцієнт проникності залежно від розташування координати максимуму злиття у внутрішній області потенціалу для $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$. Потенціал та параметри визначено в рівняннях (29) - (31), розрахунки було проведено за енергії $E = 0,58 \text{ MeV}$, що перевищує енергію потенціалу на $\Delta E = 0,02 \text{ MeV}$ у точці R_0 , див. рівняння (35).

На рисунку права частина лінії відповідає внутрішній (другій) точці повороту, тобто випадок, коли ліва частина області потенціалу (використана в розрахунках проникності) заборонена лівою границею області тунелювання. Це збігається з розрахунками у ВКБ-наближенні (без узяття до уваги впливу внутрішньої області потенціалу, який є набагато меншим), як і з розрахунками в інших наближеннях. Таке міркування більш правильно описує внутрішні квантові потоки в ядрі. Також це істотно покращує опис експериментальних даних для відповідних реакцій, де було проведено детальний аналіз [10, 11].

Відмінність у ВКБ-наближення:

$$r_{\text{cap}} = r_{\text{tp},2} = 6,845 \text{ фм}, \quad T_{\text{bar}}^{(\text{BKБ})} = 2,255 \cdot 10^{-32},$$

БВВ-наближення:

$$r_{\text{cap}} = r_{\text{min}} = 3,643 \text{ фм}, \quad T_{\text{bar}}^{(\text{БВВ})} = 1,191 \cdot 10^{-32}. \quad (37)$$

Необхідно звернути увагу, що у цій статті нами оцінено проникаючу здатність $T_{\text{bar}}^{(\text{BKБ})}$ (та інші характеристики на основі проникності) для потенціального бар'єра, обмеженого областю тунелювання на основі розрахунків БВВ, тоді як ВКБ-формула проникності є більш грубим наближенням, яке застосовне всередині області енергій для напівкласичного наближення у першому порядку. Але, для стислості викладу, будемо використовувати верхній індекс (ВКБ) у таких розрахунках. На відміну від попередніх підходів, тепер проникаюча здатність, отримана формалізмом БВВ, залежить від положення процесу злиття. Можна побачити, що такий зсув положення злиття знижує проникаючу здатність приблизно в два рази. Точна оцінка дає $T_{\text{bar}}^{(\text{BKБ})} / T_{\text{bar}}^{(\text{БВВ})} = 2,255 \cdot 10^{-32} / 1,191 \cdot 10^{-32} = 1,893$.

Розрахуємо швидкість реакції як

$$W_{\text{new}} = \frac{k_1 \hbar}{m} \cdot \frac{S(E)}{E} \cdot T_{\text{bar}}^{(\text{БВВ})}(r_{\text{cap}}) = \frac{W_{\text{old}}}{1,893}. \quad (38)$$

Для розрахунків візьмемо оцінку S_{CC} із джерела [3] (див. с. 95):

$$S_{\text{CC}} = 8,83 \cdot 10^{16} \text{ MeV} \cdot \text{б}. \quad (39)$$

Необхідно звернути увагу, що більш точний розрахунок S -факторів у щільній густині матерії зроблено, для прикладу, в [6] (див. рис. 1 у цій статті; див. також [8]). Він також надає зручні формули для самоаналізу для інших дослідників, і ми можемо рухатися вперед цим напрямком. Тим не менш для перших оцінок, значення S -факторів у рівнянні (38) та у цих джерелах є досить близькими. Отже, ми використаємо оцінку в рівнянні (38) для S -фактора в аналізі. З рівняння (37) знаходимо

$$W_{\text{old}} = 1,943 \frac{10^3}{\text{с} \cdot \text{MeV}^3}, \quad W_{\text{new}} = 1,026 \frac{10^3}{\text{с} \cdot \text{MeV}^3}. \quad (40)$$

Визначаємо кількість реакцій у секунду:

$$P_{\text{old}} = 4,686 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}}, \quad P_{\text{new}} = 2,475 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{с}}. \quad (41)$$

3.5. Перенормування хвильової функції

Оцінки швидкості реакцій сильно залежать від того, як ми нормалізуємо хвильову функцію. У цій темі використовуються оцінки в одиницях об'єму (зазвичай у кубічних сантиметрах). Отже, перенормуємо наші розрахунки. Дотримуючись [3] (див. рівняння (3.7.22) і (3.7.25), с. 92), квадрат модуля хвильової функції падаючої хвилі на бар'єр нормується на об'єм сфери, визначений радіусом r_0 надбар'єрної області як

$$\|\chi_{inc}\|^2 = \frac{1}{r_0^3 \pi^{3/2}}, \quad r_0 = \left(\frac{\hbar}{2Ze} \right)^{1/2} \left(\frac{R_0^3}{m} \right)^{1/4}. \quad (42)$$

Розрахунки дають нам коефіцієнт перенормування

$$\frac{r_0}{R_0} = 0,138, \quad c_0 = \left(\frac{R_0}{r_0} \right)^3 \cdot \frac{1}{R_0^3 \pi^{3/2}} = 681,741 \text{ MeV}^3 \quad (43)$$

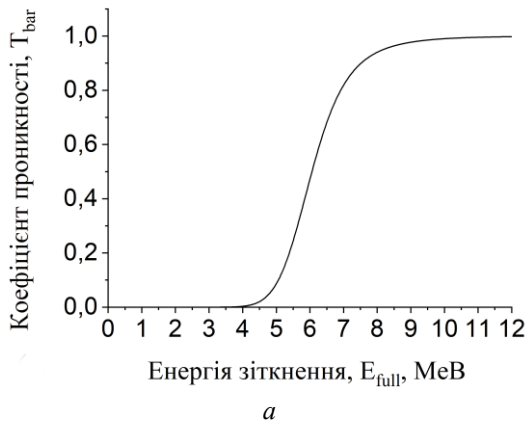


Рис. 3. Коефіцієнти проникності (а) та відбиття (б) залежно від енергії відносного руху ядер у реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$. Коефіцієнти порашовано незалежно; потенціал та параметри визначено в рівняннях (29) - (31).

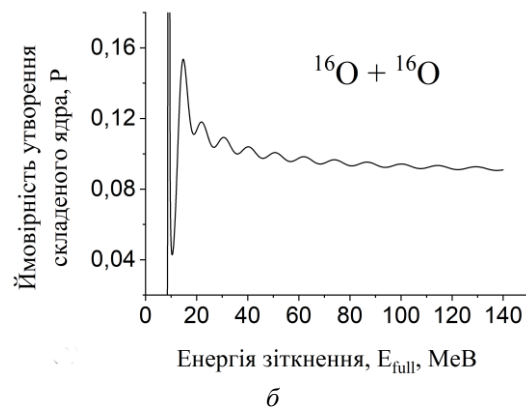
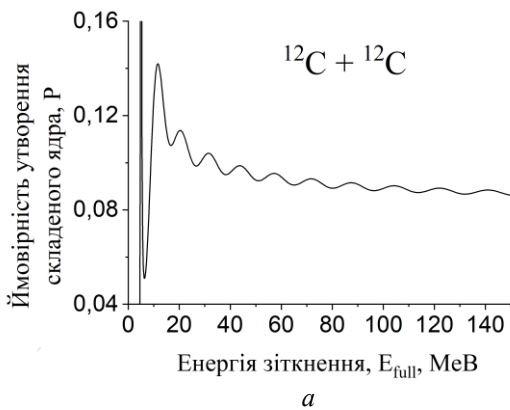


Рис. 4. Залежність імовірності утворення складеного ядра P_{cn} від енергії відносного руху між ядрами в реакціях $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ (а) та $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ (б). Потенціал та параметри визначено в рівняннях (29) - (31). Перший максимум відповідає підбар'єрним енергіям, де пікноядерна реакція відбувається після тунелювання під бар'єром (див. параметри бар'єра в рівнянні (33)).

та такі перенормовані швидкість та кількість реакцій:

$$\bar{W} = W \cdot c_0, \quad \bar{P} = P \cdot c_0. \quad (44)$$

У кінці отримаємо швидкість реакції в секунду та кількість реакцій в $1 \text{ cm}^3/\text{c}$ як

$$\bar{W}_{old} = 1,324 \frac{10^6}{\text{c}}, \quad \bar{W}_{new} = 6,998 \frac{10^5}{\text{c}}, \quad \bar{P}_{old} = 2,556 \frac{10^{52}}{\text{c} \cdot \text{cm}^3}, \quad \bar{P}_{new} = 1,349 \frac{10^{52}}{\text{c} \cdot \text{cm}^3}. \quad (45)$$

3.6. Резонанси та утворення складеної ядерної системи

Проаналізуємо, як коефіцієнти проникності та відбиття змінюються залежно від енергій падаючих ядер. Розрахунки цих характеристик представлено на рис. 3. Можна побачити, що обидва коефіцієнти змінюються монотонно залежно від енергій. У цих залежностях відсутні максимуми або мінімуми. Ці рисунки узгоджуються з попередніми дослідженнями захоплення α -частинки ядром [10, 11].

Формалізм методу БВВ визначає й інші квантові характеристики. Розраховану таким чином імовірність утворення складеного ядра показано на рис. 4. Тут на кривій імовірності вже чітко простежуються резонансні максимуми, що відповідають цілком певним енергіям. Цей результат дає абсолютно нову картину процесів, подібних до пікноядерних реакцій. Ці максимуми пояснюються необхідністю врахування подальшого поширення квантових потоків в області потенціалу, на відміну від існуючого сучасного опису пікноядерних реакцій, де ці потоки перериваються і зникають у внутрішній точці повороту. Такого розгляду вимагає квантова механіка, яка строго вказує на безперервність хвильової функції у повній області її визначення. Це вимагає збере-

ження потоків у повній області визначення хвильової функції (при розрахунках перерізів і швидкостей реакцій у старому підході, наприклад $T_{bar}^{(BK\bar{B})}$ у рівнянні (36), $\bar{W}_{old} \cdot \bar{P}_{old}$ з рівняння (44), основані на перериванні квантових потоків у точці повороту). Максимуми на кривій імовірності вказують на якісь нові стани, в яких складене ядро утворюється і може існувати з максимальною ймовірністю. Саме в таких станах і при таких енергіях відбувається процес подальшого злиття з утворенням нового ядра ^{24}Mg , який є більш імовірним, ніж за енергій, визначених теорією пікноядерних реакцій у зірках, вивчених Зельдовичем.

Таблиця 1. Перші резонансні стани за енергій, що відповідають максимуму ймовірності утворення складеного ядра в реакції $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ (див. рис. 4)

| E_{full}, MeV | P_{cn} | T_{bar} | R_{bar} | $R_{pot.sc.}$ | $R_{res.sc.}$ |
|------------------------|----------|-----------|-------------------------|------------------------|------------------------|
| 5,0032 | 0,78050 | 0,08112 | 0,91888 | 0,03581 | 0,61165 |
| 11,6076 | 0,14195 | 0,99697 | 0,00303 | $6,2445 \cdot 10^{-5}$ | 0,00389 |
| 20,3134 | 0,11369 | 0,99996 | $3,6922 \cdot 10^{-5}$ | $2,0760 \cdot 10^{-6}$ | $2,2511 \cdot 10^{-5}$ |
| 31,4208 | 0,10401 | 0,99999 | $8,7746 \cdot 10^{-7}$ | $2,3113 \cdot 10^{-7}$ | $1,9218 \cdot 10^{-6}$ |
| 43,7290 | 0,09875 | 0,99999 | $4,8371 \cdot 10^{-8}$ | $4,9908 \cdot 10^{-8}$ | $1,7137 \cdot 10^{-8}$ |
| 57,2380 | 0,09547 | 0,99999 | $3,4622 \cdot 10^{-9}$ | $1,5731 \cdot 10^{-8}$ | $3,2376 \cdot 10^{-8}$ |
| 71,6477 | 0,09319 | 0,99999 | $2,2762 \cdot 10^{-10}$ | $5,7043 \cdot 10^{-9}$ | $3,7514 \cdot 10^{-9}$ |
| 87,2581 | 0,09152 | 0,99999 | $1,9270 \cdot 10^{-10}$ | $2,2821 \cdot 10^{-9}$ | $1,3541 \cdot 10^{-9}$ |

Перші енергії для резонансних максимумів показано в табл. 1. Запишемо, наскільки відрізняються коефіцієнти проникності в цих двох станах ($r_{cap} = r_{min} = 3,643 \text{ фм}$):

$$E_{full}^{(zero\ mode)} = 0,58 \text{ MeV}: T_{bar}^{(zero\ mode)} = 1,191 \cdot 10^{-32},$$

$$E_{full}^{(quasibound)} = 5,00 \text{ MeV}: T_{bar}^{(quasibound)} = 0,08112. \quad (46)$$

Отже, маємо відношення

$$\frac{T_{bar}^{(quasibound)}(E_{full} = 5,00 \text{ MeV})}{T_{bar}^{(zero\ mode)}(E_{full} = 0,58 \text{ MeV})} = \frac{0,08112}{1,191 \cdot 10^{-32}} = 6,811 \cdot 10^{30}. \quad (47)$$

Швидкість і кількість пікноядерних реакцій (в одиницю часу в одиниці об'єму), що проходять через найбільш імовірну стадію утворення складеного ядра, будуть у стільки ж разів перевищувати ці характеристики для нульових коливань ядер у вузлах решітки. Отже, по суті більше реакцій протікає через такі стабільні утворення з ядрами в решітці. Зауважимо, що такий ефект ще не досліджений і не виявлений.

4. Енергетичні рівні нульових коливань

Формалізм методу множинних внутрішніх відбитків може бути додатково досліджений з метою обчислення спектра енергій в станах нульових коливань. Радіальна хвильова функція в асимптотичній області має вигляд як

$$\chi(r) = e^{-ikr} + A_R e^{+ikr}. \quad (48)$$

Зокрема, такий же вигляд має хвильова функція в точці R_0 , де розсіяне ядро знаходиться в мінімумі потенціалу між двома ядрами у вузлах решітки. Однак дискретність спектра енергій накладає додаткову вимогу, щоб повна хвильова функція дорівнювала нулю (для непарних станів) або приймала максимальне значення по модулю (для парних станів) у цій точці⁴.

⁴ Парність характеризує зміну хвильової функції системи при операції просторової інверсії, тобто заміни знаків координат усіх частинок. При такій операції енергія не змінюється, а хвильова функція залишається незмінною (парний стан) або змінює свій знак на протилежний (непарний стан). Парність P приймає два значення $P = \pm 1$ відповідно.

Знаходимо

$$\begin{aligned}
 1) \chi(R_0) &= e^{-ikR_0} + A_R e^{+ikR_0} = e^{-ikR_0} + e^{+ikR_0}, \quad A_R = +1, \\
 2) \chi(R_0) &= e^{-ikR_0} + A_R e^{+ikR_0} = e^{-ikR_0} - e^{+ikR_0}, \quad A_R = -1.
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

Амплітуду коефіцієнта відбиття, розраховану таким чином у точці R_0 , показано на рис. 5. Можна побачити, що кожна функція має свій власний максимум та мінімум за близьких енергій. Згідно з рівнянням (49), можуть бути визначені енергетичні рівні уявної частини амплітуди, що прирівняна до нуля (рис. 5, б).

1) Парні стани:

$$A_R = +1, \quad \text{Re}(A_R) = +1, \quad \text{Im}(A_R) = 0,$$

2) Непарні стани:

$$A_R = -1, \quad \text{Re}(A_R) = -1, \quad \text{Im}(A_R) = 0.$$

(50)

Парність стану визначається знаком дійсної частини амплітуди відбиття. Значення рівнів енергії в дискретному спектрі, визначені таким чином, представлено для $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ у табл. 2 та для $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ у табл. 3.

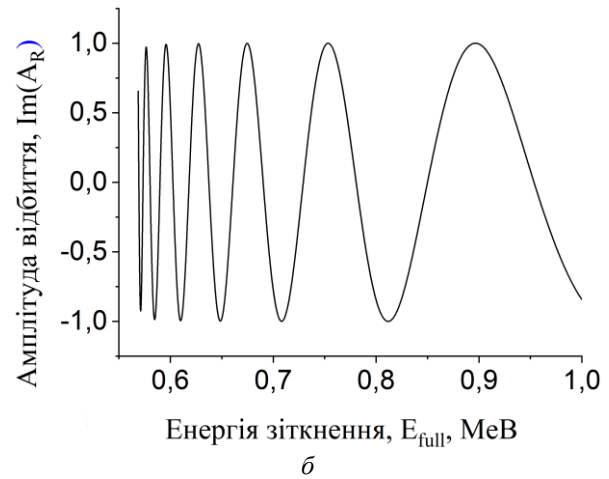
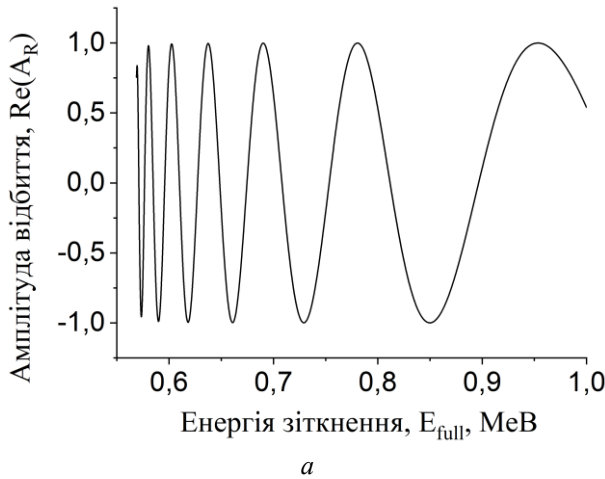


Рис. 5. Дійсна та уявна частина амплітуди відбиття, $A_R(r)$, порахована в точці R_0 в області енергії відносного руху $E_{kin} = 0,55 - 1,0$ MeV. Потенціал та параметри визначено в рівняннях (29) - (31), R_0 визначено з формули (24), значення зазначено в рівнянні (26).

Таблиця 2. Розраховані рівні енергії нульових коливань і відповідні значення амплітуди відбиття A_R (дійсна та уявна її частини) для $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$

| E_{zero} , MeV | $\text{Re}(A_R)$ | $\text{Im}(A_R)$ | $[\text{Re}(A_R)]^2 + [\text{Im}(A_R)]^2$ |
|-------------------|--------------------|--------------------|---|
| 0,569699398797595 | 0,933197319275621 | -0,359364387908423 | 1,0000000000000000 |
| 0,574108216432866 | -0,929937621506901 | 0,367717310044127 | 1,0000000000000000 |
| 0,580280561122244 | -0,999976682784241 | -0,006828900923611 | 1,0000000000000000 |
| 0,589979959919840 | -0,999804559327251 | 0,019769753373290 | 1,0000000000000000 |
| 0,603206412825651 | 0,987566383351778 | -0,157202539653435 | 1,0000000000000000 |
| 0,619078156312625 | -0,987872204000573 | 0,155269148780593 | 1,0000000000000000 |
| 0,637595190380762 | 0,999675512392435 | -0,025472925291808 | 1,0000000000000000 |
| 0,661402805611222 | -0,997827712405446 | 0,065877586140615 | 1,0000000000000000 |
| 0,690501002004008 | 0,999520247643956 | -0,030972157654334 | 1,0000000000000000 |
| 0,729298597194389 | -0,999921682875423 | 0,012515115484128 | 1,0000000000000000 |
| 0,781322645290581 | 0,999300653371264 | -0,037392568402883 | 1,0000000000000000 |
| 0,850100200400802 | -0,999977543965837 | 0,006701609064401 | 1,0000000000000000 |
| 0,954148296593186 | 0,999861191695802 | -0,016661252673514 | 1,0000000000000000 |
| 1,14428857715431 | -0,99651881729656 | 0,083368140042060 | 1,0000000000000000 |

Рівні енергії в табл. 2 належать до дискретного спектра для досліджуваної системи, де є три рівня енергії нижче енергії нульових коливань $E_{full}^{(zero,mode)} = 0,58968043$ MeV, яка визначається

відповідно до підходу Зельдовича (35). Відстані між кожними двома сусідніми рівнями суттєво відрізняються від спектра гармонічного осцилятора, який існує у підході Зельдовича. Амплітуда

Таблиця 3. Розраховані рівні енергії нульових коливань в області енергій до 1,5 MeB і відповідні амплітуди відбиття A_R (дійсна та уявна частини) для $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$

| E_{zero} , MeB | $\text{Re}(A_R)$ | $\text{Im}(A_R)$ | $[\text{Re}(A_R)]^2 + [\text{Im}(A_R)]^2$ |
|-------------------------|--------------------|---------------------|---|
| 0,917682403433476 | 0,646151650751747 | 0,763209043598667 | 1,0000000000000000 |
| 0,920429184549356 | -0,999289005463307 | 0,0377025670234193 | 1,0000000000000000 |
| 0,924549356223176 | 0,985932507053738 | -0,167143924612083 | 1,0000000000000000 |
| 0,930042918454936 | -0,991428955611261 | 0,130646951650487 | 1,0000000000000000 |
| 0,936909871244635 | 0,999806834552058 | -0,0196543527747339 | 1,0000000000000000 |
| 0,946523605150215 | -0,951440206042077 | 0,307833614679442 | 1,0000000000000000 |
| 0,956137339055794 | 0,998417823477356 | -0,0562303277843756 | 1,0000000000000000 |
| 0,968497854077253 | -0,993575988486092 | 0,113166934675663 | 1,0000000000000000 |
| 0,982231759656652 | 0,997942396582127 | -0,0641168706653784 | 1,0000000000000000 |
| 0,998712446351931 | -0,984749055342598 | 0,173980740318751 | 1,0000000000000000 |
| 1,01656652360515 | 0,991559000810560 | -0,129656268308029 | 1,0000000000000000 |
| 1,03716738197425 | -0,992420437834546 | 0,122888870807275 | 1,0000000000000000 |
| 1,06051502145923 | 0,998199013331230 | -0,059989413937451 | 1,0000000000000000 |
| 1,08798283261803 | -0,999999010902599 | 0,0014064827848878 | 1,0000000000000000 |
| 1,12231759656652 | 0,992585396689675 | -0,121549291558609 | 1,0000000000000000 |
| 1,15939914163090 | -0,998158432843298 | 0,0606608847925162 | 1,0000000000000000 |
| 1,20334763948498 | 0,997952339646408 | -0,0639619245665836 | 1,0000000000000000 |
| 1,25690987124464 | -0,998664957619913 | 0,0516556136544438 | 1,0000000000000000 |
| 1,32008583690987 | 0,999636507675408 | -0,0269602025681128 | 1,0000000000000000 |
| 1,40111587982833 | -0,998914534220290 | 0,0465806110249889 | 1,0000000000000000 |
| 1,500000000000000 | 0,997036517170615 | 0,0769297304576710 | 1,0000000000000000 |

$\text{Re}(A_R)$ приймає позитивні та негативні значення, що вказує на парні та непарні стани в дискретному спектрі енергії. Точність розрахунку рівнів оцінюється з $|\text{Re}(A_R)| \approx 1$. Проте підсумовування $[\text{Re}(A_R)]^2 + [\text{Im}(A_R)]^2$ свідчить про точність методу БВВ у визначенні отриманих цифр амплітуд. У табл. 3 амплітуда $\text{Re}(A_R)$ приймає позитивні та негативні значення, що вказує на парні та непарні стани в дискретному спектрі енергії.

5. Висновки та перспективи

У цій статті розроблено новий квантовий метод опису пікноядерних реакцій у компактних зорях. В основу методу покладено формалізм БВВ, розроблений раніше для дослідження квантових процесів з високою точністю в задачах ядерних розпадів, захоплення ядер ядрами [10 - 12], а також проблем квантової космології, де застосовується ідея тунелювання [23].

Висновки аналізу на прикладі реакцій $^{16}\text{O} + ^{16}\text{O}$ такі.

Швидкості пікноядерних реакцій істотно змінюються після врахування ядерної частини потенціалу взаємодії.

Повністю квантовий аналіз зменшує швидкість і кількість реакцій у 1,8 раза. Це пояснюється тим, що найбільш імовірно злиття ядер

відбувається не відразу після виходу фрагмента ядра з тунельної області (друга внутрішня точка повороту), а після досягнення середини внутрішньої потенціальної ями.

Загальний квантовий розгляд пікноядерної реакції вимагає повного врахування та аналізу квантових потоків у внутрішній області потенціалу. Це пояснюється тим, що квантова механіка визначає хвильову функцію на всій просторовій області з включенням ядерної частини потенціалу взаємодії, хвильова функція має бути неперервною. Це призводить до появи нових станів, у яких утворення складеної ядерної системи виявляється найбільш імовірним (див. рис. 4, табл. 1). Дотримуючись логіки та формалізму робіт [10, 11], такі стани ми назвали квазізв'язаними станами у пікноядерних реакціях. Як показано на рис. 4, за відповідних енергій реакція у таких станах істотно більш імовірна, ніж при енергіях нульових коливань підходу Зельдовича [2] і послідовників цієї ідеї. Тому є сенс говорити про швидкості реакції для таких квазізв'язаних станів, а не для станів нульових коливань у вузлах ґратки. Це може призвести до істотних змін в оцінках швидкостей пікноядерних реакцій у зорях. Існує перспектива перевірити метод, представлений у цій статті, на основі нових експериментальних вимірювань [24].

Розроблено новий метод до визначення рівнів енергії нульових коливань і відповідних амплі-

туд відбиття A_R . Енергетичні рівні належать до дискретного спектра для досліджуваної системи, серед яких є три рівня, що лежать нижче енергії нульових коливань, отриманої у підході Зельдовича та його колег. Відстані між кожними двома сусідніми рівнями радикально відрізняються від спектра гармонічного осцилятора, отриманого в підході Зельдовича та його колег. Амплітуда $\text{Re}(A_R)$ приймає позитивні та негативні значення, що вказує на парні та непарні стани в дискретному спектрі.

На завершення вкажемо на новий внесок нашого підходу до вивчення фізики компактних зір.

Один з напрямків отримання інформації про компактні зорі пов'язаний з вивченням охолодження зір (наприклад, див. [3], с. 96 - 118). Швидкість охолодження зір залежить від типу ядер, що знаходяться у відповідній області зір. Ядерні процеси, що нами досліджуються, дають змогу утворюватися більш важким ядрам з деякою ймовірністю. Зміна ядерної речовини змінює швидкість охолодження зір та час її існування, що також є даними астрономічних спостережень (наприклад, див. [3], с. 98 - 102). Наші дослідження можуть змінювати такі оцінки та уявлення про компактні зорі.

Також існують ядерно-фізичні дослідження реакцій з такими ядрами при близьких енергіях, на основі яких створено бази даних [6, 7, 9]. У них нехтують впливом додаткових параметрів (які описують квантові потоки у внутрішньоядерній області), врахування яких може суттєво змінити результати, особливо для енергій пікноядерних реакцій. Це поглиблює розуміння процесів, що відбуваються. Наш метод є високоточним, яких зараз не існує у таких задачах, та опи-

сує такі процеси з високою точністю, дає змогу тестувати отримані результати (на відміну від існуючих інших). Нами введена можливість тестування своїх та чужих розрахунків, що є дуже важливим.

У зв'язку підходів до визначення параметрів ядерних потенціалів, астрономічного S-фактора з перерізами ядерних процесів, які саме можна експериментально визначати, існуючі методи обмежені першим квазікласичним наближенням (якщо використовувати квантову механіку та ядерні потенціали). Так, у підручниках з квантової механіки вказуються межі застосування такого наближення. Зазвичай автори інших підходів не розглядають такої проблеми (наприклад, вона відсутня в дослідженнях [6 - 9]), тоді як безпосередні оцінки [14] вказують, що такий шлях лежить за межами застосування такого наближення для пікноядерних реакцій. Для більш високих енергій, що вже підпадають у межі застосування квазікласичного наближення першого порядку, існують похибки, які достатньо суттєві, тоді як точність нашого методу на декілька порядків вища. Наш підхід дає можливість здолати цей бар'єр, дає формалізм для високоточних досліджень без таких наближень. Слід відзначити, що наведені оцінки на рисунках та в таблицях у статті – це лише деякі обрані демонстрації, взяті з картини додаткових ефектів, нових незалежних параметрів тощо. Для низьких енергій такі ефекти відіграють більш важливу роль, ніж наприклад деформації ядер, врахування їх може сильніше змінювати переріз реакції, ніж врахування деформацій ядер без таких ефектів. На наш погляд на сьогодні не існує альтернативних підходів до нашого щодо вивчення компактних зір.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. A.G.W. Cameron. Pycnonuclear reactions and nova explosions. *Astrophys. J.* 130 (1959) 916.
2. Ya.B. Zeldovich, O.H. Guseynov. Collapsed stars in binaries. *Astrophys. J.* 144 (1966) 840.
3. S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects* (New York: Wiley, 1983) 663 p.
4. E.E. Salpeter, H.M. Van Horn. Nuclear reaction rates at high densities. *Astrophys. J.* 155 (1969) 183.
5. P. Haensel, J.L. Zdunik. Equation of state and structure of the crust of an accreting neutron star. *Astron. Astrophys.* 229 (1990) 117; P. Haensel, J.L. Zdunik. Nuclear composition and heating in accreting neutron-star crusts. *Astron. Astrophys.* 404 (2003) L33.
6. D.G. Yakovlev et al. Fusion reactions in multicomponent dense matter. *Phys. Rev. C* 74 (2006) 035803.
7. M. Beard et al. Astrophysical S-factors for fusion reactions involving C, O, Ne, and Mg isotopes. *At. Data Nucl. Data Tables* 96 (2010) 541.
8. V. Singh, J. Lahiri, D.N. Basu. Theoretical exploration of S-factors for nuclear reactions of astrophysical importance. *Nucl. Phys. A* 987 (2019) 260.
9. A.V. Afanasjev et al. Large collection of astrophysical S-factors and their compact representation. *Phys. Rev. C* 85 (2012) 054615.
10. S.P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, S.V. Belchikov. Quantum design using a multiple internal reflections method in a study of fusion processes in the capture of alpha-particles by nuclei. *Nucl. Phys. A* 940 (2015) 89.
11. S.P. Maydanyuk, P.-M. Zhang, L.-P. Zou. New quasibound states of the compound nucleus in α -particle capture by the nucleus. *Phys. Rev. C* 96 (2017) 014602.
12. L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Quantum Mechanics. Vol. 3. Course of Theoretical Physics. 3rd ed.* (Pergamon Press, 1977) 691 p.

13. K.A. Eberhard et al. Fusion cross sections for $\alpha + {}^{40,44}\text{Ca}$ and the problem of anomalous large-angle scattering. *Phys. Rev. Lett.* **43** (1979) 107.
14. S.P. Maydanyuk, K.A. Shaulskiy. Quantum design in study of pycnonuclear reactions in compact stars: Nuclear fusion, new quasibound states and spectroscopy. *Eur. Phys. J. A* **58** (2022) 220.
15. S.P. Maydanyuk, V.S. Olkhovsky, A.K. Zaichenko. The method of multiple internal reflections in description of tunneling evolution of nonrelativistic particles and photons. *J. Phys. Studies* **6**(1) (2002) 24.
16. T. Hamada, E.E. Salpeter. Models for zero-temperature stars. *Astrophys. J.* **134** (1961) 683.
17. S.P. Maydanyuk et al. Bremsstrahlung emission of high energy accompanying spontaneous fission of ${}^{252}\text{Cf}$. *Phys. Rev. C* **82** (2010) 014602.
18. S.P. Maydanyuk et al. Bremsstrahlung emission accompanying decays and spontaneous fission of heavy nuclei. *Int. J. Mod. Phys. E* **19** (2010) 1189.
19. S.P. Maydanyuk et al. Bremsstrahlung emission of photons accompanying ternary fission of ${}^{252}\text{Cf}$. *J. Phys.: Conf. Ser.* **282** (2011) 012016.
20. L.R. Gasques et al. Nuclear fusion in dense matter: Reaction rate and carbon burning. *Phys. Rev. C* **72** (2005) 025806.
21. L.R. Gasques et al. Sao Paulo potential as a tool for calculating S factors of fusion reactions in dense stellar matter. *Phys. Rev. C* **76** (2007) 045802.
22. V.Yu. Denisov. Nucleus-nucleus potential with shell-correction contribution. *Phys. Rev. C* **91** (2015) 024603.
23. S.P. Maydanyuk. Resonant structure of the early-universe space-time. *Eur. Phys. J. Plus* **126** (2011) 76.
24. X. Fang et al. Experimental measurement of ${}^{12}\text{C} + {}^{16}\text{O}$ fusion at stellar energies. *Phys. Rev. C* **96** (2017) 045804.

K. A. Shaulskiy*, S. P. Maydanyuk

Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: shaulskiy_kostiantyn@outlook.com

QUANTUM DESIGN IN THE STUDY OF PYCNONUCLEAR REACTIONS IN COMPACT STARS AND NEW QUASIBOUND STATES

Quantum effects in pycnonuclear reactions in compact stars at zero temperatures are studied with high precision. The reaction ${}^{16}\text{O} + {}^{16}\text{O}$ was analyzed using the method of multiple internal reflections. The study of such reactions requires full consideration of quantum fluxes in the internal nuclear region. This reduces the rate and number of pycnonuclear reactions up to 1.8 times. This leads to the appearance of new states (which we call quasibound states) where the compound nuclear system is formed with maximal probability. As shown, the minimal energy of such a state is slightly higher than the energy of zero-mode oscillations in the lattice nodes in the pycnonuclear reaction, however, the probability of the formation of a compound system in a quasibound state is significantly greater than the corresponding probability in a state of zero-mode oscillations. It is reasonable to say that the frequency of reactions in quasi-bound states is more likely than in states of zero-mode oscillations. This can lead to significant changes in estimates of reaction rates in stars.

Keywords: pycnonuclear reactions, compact star, neutron star, multiple internal reflections, coefficients of penetrability and reflection, fusion, quasibound state, compound nucleus, dense nuclear matter, zero mode oscillations, tunneling.

Надійшла/Received 27.01.2023