

В. І. Ковальчук\*

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна

\*Відповідальний автор: [sabkiev@gmail.com](mailto:sabkiev@gmail.com)

## ІНКЛЮЗИВНА РЕАКЦІЯ ФРАГМЕНТАЦІЇ ДЕЙТРОНІВ ПРИ ЗІТКНЕННІ ЇХ З ДЕЙТРОНАМИ МІШЕНІ

У рамках ейконального наближення та моделі подвійного фолдінгу запропоновано формалізм обчислення інклюзивних спектрів частинок із реакцій фрагментації дейтронів при зіткненні їх з дейтронами мішені. Описано спектри протонів із реакції  ${}^2\text{H}(d, p)$  при енергії падаючих частинок 59,9 МеВ. Розраховані величини перерізів добре узгоджуються з відповідними експериментальними даними.

*Ключові слова:* інклюзивна реакція, ейкональне наближення, модель подвійного фолдінгу.

### 1. Вступ

Одним із важливих джерел інформації про ядерну структуру та взаємодію є спектри продуктів розвалу у реакціях за участю легких ядер (дейтрон,  ${}^3\text{He}$  тощо). Для опису процесів у таких системах використовують різноманітні теоретичні підходи, з яких найбільш розповсюдженими є метод гіперсферичних гармонік [1, 2], формалізм рівнянь Фаддеева [3], а також його численні модифікації (див. огляд [4] і посилання там). Дифракційна ядерна модель [5] також може бути застосовною для мікроскопічного опису ексклюзивних спектрів у реакціях фрагментації в системах з декількома частинками [6 - 9], проте намагання одержати інклюзивні перерізи з ексклюзивних інтегруванням, наприклад по куту, веде до сумнівних значень перерізів через кінематичні обмеження моделі. Проте існує доволі простий метод безпосереднього обчислення інклюзивних перерізів розвалу легких ядер.

У [10 - 14] було показано, що формалізм реакції зриву [15] придатний також для опису інклюзивних реакцій фрагментації ядер за участю як легких [10 - 13], так і важких іонів [14].

### 2. Формалізм

Усі нижченаведені розрахунки виконувались із застосуванням системи одиниць  $\hbar = c = 1$ . Спін частинок та кулонівська взаємодія не враховувалися.

Розглянемо реакцію дейтронного зриву, внаслідок якої протон звільняється, а нейтрон поглинається ядром мішені. Нехай  $\vec{k}_d$  – хвильовий вектор відносного руху центра мас дейтрона, що має зіткнутися з ядром, яке знаходиться поза межами області взаємодії, характерний радіус якої є  $R$ . Якщо  $k_d R \gg 1$ , точний хвильовий опис руху

набуває характеру опису в рамках геометричної оптики і аналіз дейтрон-ядерної взаємодії стає можливим у дифракційному наближенні. Позначимо нуклони падаючого дейтрона так: 1 відповідатиме протону, 2 – нейтрону.

Амплітуда ймовірності того, що протон матиме хвильовий вектор  $\vec{k}_1$ , а нейтрон буде знаходитись у точці  $\vec{r}_2$ , має вигляд [16]

$$A_1 = \int d\vec{r}_1 \exp(-i\vec{k}_1\vec{r}_1)(1-\omega_1)\varphi(\vec{r}), \quad (1)$$

де  $\vec{r}_1$  – радіус-вектор протона;  $\omega_1 = \omega_1(b_1)$  – функція профілю;  $b_1$  – параметр удару;  $\varphi(\vec{r})$  – дейтронна хвильова функція;  $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \{\vec{r}_\perp, (\vec{k}_d / k_d)z\}$ , причому  $\vec{r}_\perp$  – складова вектора  $\vec{r}$  така, що  $(\vec{r}_\perp \vec{k}_d) = 0$ . Вісь  $Z$  збігається з напрямком, який визначається вектором  $\vec{k}_d$ . Крім того,  $\vec{r}_1 = \{\vec{b}_1, (\vec{k}_d / k_d)z_1\}$ ,  $\vec{r}_2 = \{\vec{b}_2, (\vec{k}_d / k_d)z_2\}$ , де  $(\vec{b}_1 \vec{k}_d) = (\vec{b}_2 \vec{k}_d) = 0$ , так що  $\vec{r}_\perp = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$ .

Двічі диференціальний переріз (за кутом вильоту протона та його енергії) визначається як [5, 17]

$$d\sigma_1 = B(\vec{k}_1) \frac{d\vec{k}_1}{(2\pi)^3}, \quad (2)$$

де

$$B(\vec{k}_1) = \int d\vec{b}_2 (\omega_2 + \omega_2^* - \omega_2 \omega_2^*) A_1 A_1^\dagger. \quad (3)$$

Не обмежуючи загальності, виберемо  $\omega_1$  і  $\omega_2$  у вигляді двопараметричних гауссіанів

$$\omega_{1,2} = \alpha_{1,2} \exp(-b_{1,2}^2 / \beta_{1,2}), \quad (4)$$

де параметри  $\alpha_{1,2}$ , загалом кажучи, комплексні.

Вважаємо, що основний стан дейтрона від-  
повідає S-хвилі і радіальну залежність його  
хвильової функції також виберемо у вигляді  
гауссіана

$$\varphi(r) = \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^{3/4} \exp(-\lambda r^2). \quad (5)$$

Для випадку  $\alpha_{1,2} = \operatorname{Re}\alpha_{1,2}$  результатом аналі-  
тичного інтегрування в (3) буде вираз

$$B_3 = \frac{\alpha_2^2 \beta_2^2}{\beta_2 + \beta_3} \left\{ \frac{4}{2\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} - \frac{\alpha_1}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \right\} \exp\left(-\frac{\beta_2 \beta_3}{2(\beta_2 + \beta_3)} \kappa_1^2\right). \quad (9)$$

Тут  $\beta_3 = \lambda^{-1}$ ;  $\vec{k}_1 = \{\vec{\kappa}_1, (\vec{k}_d / k_d) k_{1Z}\}$ , причому  
( $\vec{\kappa}_1 \vec{k}_d$ ) = 0;  $Y = (2\pi^5)^{1/2} \beta_1 \beta_3^{3/2} \exp(-\beta_3 k_{1Z}^2 / 2)$ .

Значення  $\kappa_1$  і  $k_{1Z}$  зв'язані з енергією протона  
 $E_1$  та кутом його вильоту  $\Theta_1$  у лабораторній  
системі відліку співвідношеннями [5]

$$\kappa_1 = (k_d / 2 + k_{1Z}) \tan \Theta_1, \quad (10)$$

$$k_{1Z} = \sqrt{m / E_d} (E_1 - E_d / 2), \quad (11)$$

де  $m$  – маса нуклона;  $E_d$  – початкова енергія  
дейтрона.

Виражаючи  $d\vec{k}_1$  у (2) в компонентах  
циліндричної системи координат, з урахуванням  
(10) для перерізу (2) одержимо [18]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_1 dE_1} = \frac{\sqrt{m / E_d}}{(2\pi \cos \Theta_1)^3} (k_d / 2 + k_{1Z})^2 B(\kappa_1, k_{1Z}). \quad (12)$$

### 3. Обчислення функцій профілю в ейкональному наближенні

Одним із широко розповсюджених підходів у  
сучасній теорії ядерних реакцій є застосування  
моделі подвійного фолдінгу [19, 20]. Це дає змо-  
гу природним чином враховувати розподіл ну-  
клонних густин ядер (модельний чи реалістич-  
ний), що стикаються, та зменшувати у такий спосіб  
кількість підгінних параметрів.

– ейкональна фаза. Тут  $N_w$  – параметр норму-  
вання уявної частини нуклон-ядерного потенці-  
алу подвійного фолдінгу, а  $\bar{\sigma}_{NN}^{(1,2)}$  – усереднений за

$$B = 2Y \alpha_1 (B_1 + B_2 + B_3), \quad (6)$$

де

$$B_1 = (4 - \alpha_1) \exp\left(-\frac{\beta_3}{2} \kappa_1^2\right) - \frac{8\alpha_2 \beta_2}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3} \exp\left(-\frac{\beta_3 (2\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3)}{4(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)} \kappa_1^2\right), \quad (7)$$

$$B_2 = \frac{4\alpha_1 \alpha_2 \beta_2}{\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3} \exp\left(-\frac{\beta_3 (\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3)}{2(\beta_1 + 2\beta_2 + 2\beta_3)} \kappa_1^2\right), \quad (8)$$

Багато досліджень при енергіях падаючих ядер  
10 ÷ 100 МеВ/нуклон засновані на ейкональному  
наближенні, що спрощує розрахунки і в деяких  
випадках дає змогу виконувати їх аналітично. У  
цьому розділі буде показано, як можна обчислити  
параметри  $\alpha_{1,2}$  та  $\beta_{1,2}$  для нуклон-дейтронних  
функцій профілю (4) у наближенні ейконала.

Уведемо розподіли нуклонних густин [21] для  
нуклонів снаряда і мішені

$$\rho_{1,2}(b) = \rho_{1,2}(0) \exp(-b^2 / a_{1,2}^2), \quad (13)$$

$$\rho_d(b) = \rho_d(0) \exp(-b^2 / a_d^2), \quad (14)$$

де  $b$  – параметр удару. Зважаючи на [22] і фор-  
мулу (5), визначимо величини, що входять до  
(13), (14) як

$$\rho_{1,2}(0) = (\sqrt{\pi} a_{1,2})^{-3}, \quad \rho_d(0) = (2\lambda / \pi)^{3/2}, \quad (15)$$

$$a_{1,2} = R_N / \sqrt{\ln(2)}, \quad a_d = 1 / \sqrt{2\lambda}, \quad (16)$$

де  $R_N \cong \sqrt{0,65}$  фм – середньоквадратичний радіус  
нуклона.

Представимо нуклон-ядерні функції профілю  
як [20]

$$\omega_{1,2}(b) = 1 - \exp(-\chi_{1,2}(b) / 2), \quad (17)$$

де

$$\chi_{1,2}(b) = N_w \frac{\pi^2 \bar{\sigma}_{NN}^{(1,2)} \rho_{1,2}(0) \rho_d(0) a_{1,2}^3 a_d^3}{a_{1,2}^2 + a_d^2 + R_N^2} \exp\left(-\frac{b^2}{a_{1,2}^2 + a_d^2 + R_N^2}\right) \quad (18)$$

ізоспином повний переріз нуклон-нуклонного  
розсіяння [21, 23], який залежить від енергії  
падаючої частинки, а також від кількості прото-

нів і нейтронів у складі снаряда та мішені. Із формул [21, 23] випливає, що для розсіяння нуклонів на дейтроні

$$\bar{\sigma}_{NN}^{(1)} = \bar{\sigma}_{NN}^{(2)} = \bar{\sigma}_{NN}. \quad (19)$$

Крім того,  $a_1 = a_2 = a_N$ ,  $\rho_1(0) = \rho_2(0) = \rho_N(0)$  і вираз (18) перетворюється на такий

$$\chi_N(b) = N_W \frac{\pi^2 \bar{\sigma}_{NN} \rho_N(0) \rho_d(0) a_N^3 a_d^3}{a_N^2 + a_d^2 + R_N^2} \exp\left(-\frac{b^2}{a_N^2 + a_d^2 + R_N^2}\right). \quad (20)$$

Отже, протон-дейтронна і нейтрон-дейтронна функції профілю однакові і визначаються як

$$\omega_N(b) = 1 - \exp(-\chi_N(b)/2). \quad (21)$$

Обчислення показують, що функції (21) легко параметризуються одним гауссіаном (4) з високим ступенем точності (хоча з вигляду формул (20), (21) безпосередньо це й не видно). При цьому одержуються значення  $\alpha_N = \alpha_1 = \alpha_2$ ,  $\beta_N = \beta_1 = \beta_2$ , що використовуються у подальших розрахунках перерізів.

#### 4. Результати розрахунків та їх аналіз

У літературі неодноразово підкреслювався поверхневий («периферійний») механізм прямих ядерних реакцій [24 - 26], отже реакції передачі нуклонів та розщеплення ядер повинні бути чутливими до поведінки хвильової функції снаряда в області її «хвоста». Насамперед це стосується слабкозв'язаних ядер, що мають довгий хвіст просторового розподілу нуклонної густини.

Дейтронна хвильова функція у вигляді однопараметричного гауссіана (5) не відтворює одночасно енергію зв'язку дейтрона та його середньоквадратичний радіус, а лише одну з цих величин. Проте її використання є доцільним, оскільки надає можливість виконати аналітичне інтегрування в (3). Формули (6) - (9) у подальшому можуть бути легко узагальнені також і для реальних хвильових функцій дейтрона [27] із правильною асимптотикою на великих міжнуклонних відстанях, які розкладаються в ряд за гауссоїдальним базисом.

Виберемо значення параметра  $\lambda$  таким, щоб відтворювався середньоквадратичний радіус дейтрона, наприклад,  $R_d^{rms} = 1,967$  фм [27], що дає  $\lambda = 0,048$  фм<sup>-2</sup>. На рис. 1 представлено перерізи (12), розраховані з  $N_W = 0,52$ ,  $\lambda_1 = 0,048$  фм<sup>-2</sup> (суцільна крива) і  $N_W = 0,82$ ,  $\lambda_2 = 0,071$  фм<sup>-2</sup> (штрихова крива), що відповідає осциляторному потенціалу, який відтворює енергію зв'язку дейтрона.

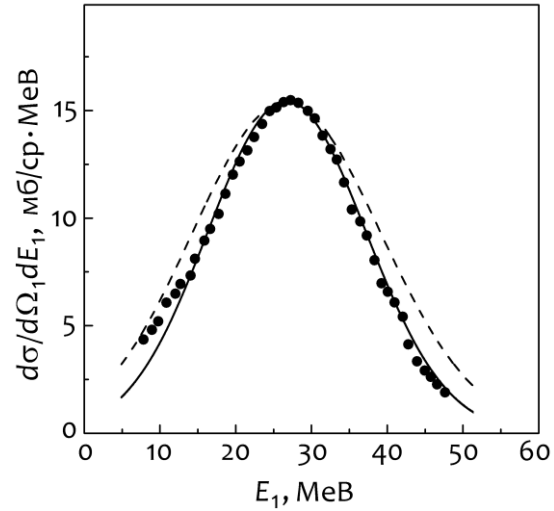


Рис. 1. Диференціальний переріз реакції фрагментації дейтронів (12) при зіткненні їх з дейтронами мішені. Енергія падаючих частинок 59,9 МеВ, кут вильоту протона  $\Theta_1 = 12,68^\circ$ . Пояснення типів кривих – у тексті. Експериментальні дані з [28].

Слід зауважити, що обчислені перерізи доводилося дещо зміщувати ліворуч, щоб досягти узгодження з експериментом. Це можна пояснити тим, що до формул розділу 2 не входить у явному вигляді енергія зв'язку дейтрона, а також через можливі інструментальні похибки експерименту.

Із поведінки кривих на рис. 1 випливає, що використання у розрахунках  $\lambda_1 = 0,048$  фм<sup>-2</sup> ( $R_d^{rms} = 1,967$  фм) дає кращий опис експерименту порівняно з  $\lambda_2 = 0,071$  фм<sup>-2</sup> ( $R_d^{rms} = 1,625$  фм). Тобто, збільшення значення  $R_d^{rms}$  звужує напівширину спектра і навпаки.

На рис. 2 показано перерізи (12), обчислені з  $\lambda = 0,048$  фм<sup>-2</sup>.

Значення  $N_W$ , параметра нормування уявної частини нуклон-ядерного потенціалу подвійного фолдінгу, використаного у розрахунках суцільних кривих на рис. 2, були такі: 0,52 (а), 0,52 (б), 0,6 (в), 0,83 (г). На жаль, решту експериментальних даних з [28] для кутів  $\Theta_1 > 20,18^\circ$  не вдалося описати, оскільки при цьому одержуються значення  $N_W$ , які суттєво перевищують 1 (як правило,  $N_W \leq 1$  [19]).

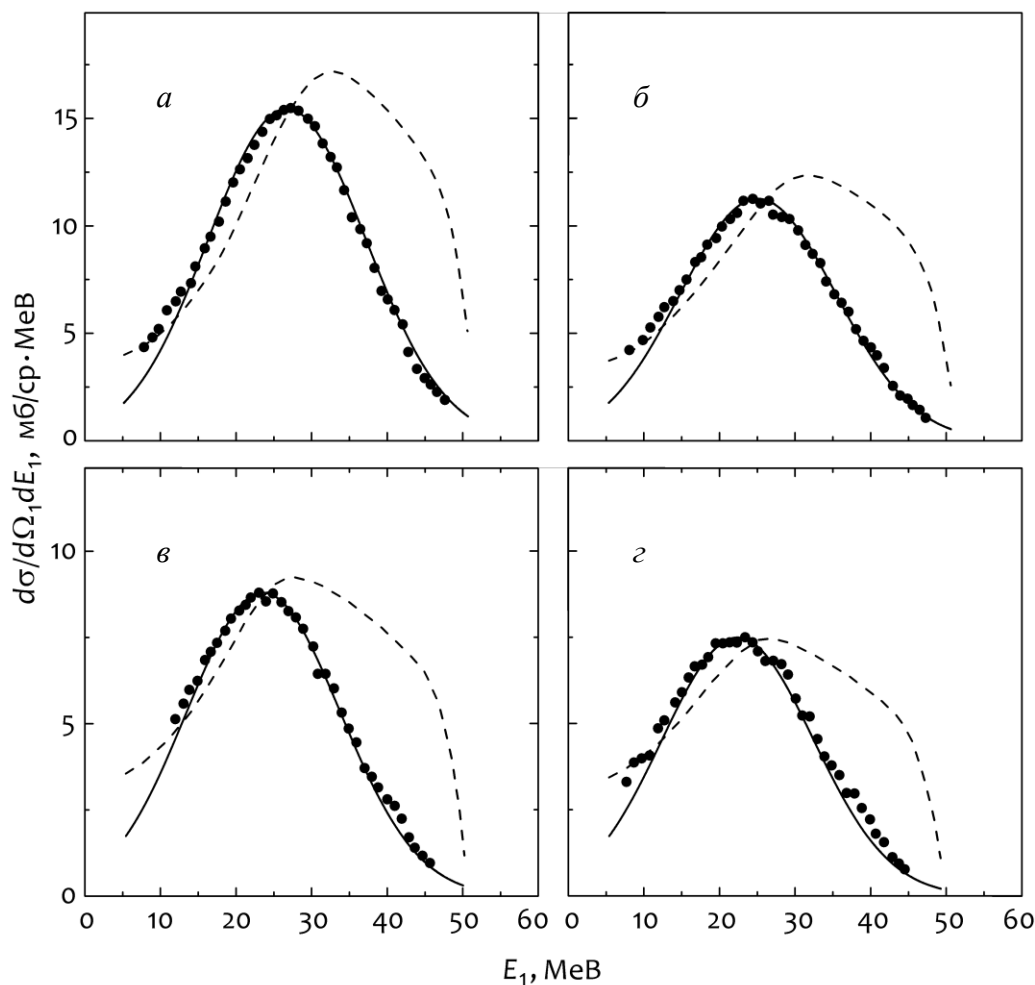


Рис. 2. Те ж саме, що й на рис. 1, але для кутів вильоту протона  $\Theta_1$  :

*a* - 12,68°, *б* - 15,18°, *в* - 17,68°, *г* - 20,18°. Штрихові криві та експериментальні дані з [28].

Штрихові криві на рис. 2 – результат обчислення перерізів у рамках чотиричастинкової моделі фаддєєвського типу [28, 29] у припущенні, що відбуваються лише однократні зіткнення нуклонів снаряда і мішені. При цьому двічі диференціальний переріз одержувався з потрібного шляхом інтегрування по куту вильоту другого фрагмента падаючого дейтрона (нейтрона). Автори роботи [28] вважають, що можлива причина відсутності узгодження з експериментом праворуч від експериментального піка – перерозсіяння нуклонів снаряда на нуклонах мішені (двократне розсіяння), якого бракувало у вихідному формалізмі задіяної моделі.

Викладений у даній статті підхід можна вважати напівмікроскопічним, оскільки в ньому враховується лише структура снаряда, а структура мішені не розглядається. Ядро-мішень характеризується певним просторовим розподілом нуклонної густини, що дає змогу в ейкональному наближенні мінімізувати набір вільних параметрів та одержувати функції профілю природним чином, без необхідності їхнього моделювання.

Перевагою запропонованого методу є те, що він надає можливість безпосередньо розраховувати інклюзивний переріз реакції фрагментації ядер (до речі, не тільки дейтронів) при зіткненні їх з ядрами. Метод також не використовує жодних спрощень формалізму з метою полегшення обчислень за рахунок погіршення якості результату. У мікроскопічному ж підході [28] інклюзивний переріз одержується з ексклюзивного шляхом інтегрування по куту вильоту частинки, що не реєструється. При цьому важливим є врахування внеску багатократних розсіянь в амплітуду реакції, який стає суттєвим при великих кутах розсіяння [5], чого не було зроблено в [28].

**5. Висновки**

У рамках ейконального наближення та моделі подвійного фолдінгу запропоновано метод обчислення інклюзивних спектрів частинок із реакцій фрагментації дейтронів при зіткненні їх з дейтронами мішені. Показано, що формалізм матриці густини для реакції дейтронного зриву може бути також застосовним і до реакції розвалу дейтронів на дейтронах.

У даній роботі для снаряда і мішені використовується проста модельна хвильова функція дейтрона у вигляді однопараметричного гауссіана, проте формалізм може бути узагальненим у разі застосування так званих реалістичних дейтронних хвильових функцій [27] розкладанням їх у збіжний ряд по гауссоїдальному базису.

Зазначимо, що формалізм матриці густини у

дифракційному наближенні [5] дає змогу обчислювати також поляризації нуклонів із реакції фрагментації дейтронів при їхньому розсіянні на ядрах. Викладений вище підхід може виявитися корисним і при аналізі спостережуваних в експерименті величин у реакціях за участю нейтроннонадлишкових та екзотичних гіперядер, які останнім часом інтенсивно досліджуються.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. A. Kievsky, M. Viviani, S. Rosati. Study of bound and scattering states in three-nucleon systems. *Nucl. Phys. A* 577 (1994) 511.
2. A. Kievsky. The complex Kohn variational method applied to N-d scattering. *Nucl. Phys. A* 624 (1997) 125.
3. L.D. Faddeev, S.P. Merkuriev. *Quantum Scattering Theory for Several Particle Systems* (Springer Dordrecht, 1993) 406 p.
4. J. Carlson, R. Schiavilla. Structure and dynamics of few-nucleon systems. *Rev. Mod. Phys.* 70 (1998) 743.
5. A.G. Sitenko. *Theory of Nuclear Reactions* (Singapore, World Scientific, 1990) 636 p.
6. V.K. Tartakovsky, A.V. Fursayev, B.I. Sidorenko. Diffractive dissociation of tritons by incident protons. *Phys. At. Nucl.* 68 (2005) 33.
7. O.O. Beliuskina et al. Breakup of deuterons on tritons. *Phys. At. Nucl.* 75 (2012) 1454.
8. О.О. Белюска іна та ін. Енергетичні розподіли протонів у  $D(d, p)$  реакції. *Ядерна фізика та енергетика* 16 (2015) 343. // О.О. Beliyuskina et al. Energy distributions of protons in  $D(d, p)$  reaction. *Nucl. Phys. At. Energy* 16 (2015) 343. (Ukr)
9. V.I. Kovalchuk. Microscopic description of diffractive deuteron breakup by  $^3\text{He}$  nuclei. *Phys. At. Nucl.* 79 (2016) 335.
10. N. Matsuoка et al. Projectile break-up and the continuum spectra of the ( $^3\text{He}, d$ ) reaction. *Nucl. Phys. A* 311 (1978) 173.
11. J.R. Wu, C.C. Chang, H.D. Holmgren. Breakup of  $\alpha$  Particles in the Fields of Nuclei. *Phys. Rev. Lett.* 40 (1978) 1013.
12. N. Matsuoка et al. Deuteron break-up in the fields of nuclei at 56 MeV. *Nucl. Phys. A* 345 (1980) 1.
13. В.І. Ковальчук. Інклюзивні реакції зриву та фрагментації легких кластерних ядер при проміжних енергіях. *Ядерна фізика та енергетика* 23 (2022) 20. // V.I. Kovalchuk. Inclusive reactions of stripping and fragmentation involving light cluster nuclei at intermediate energies. *Nucl. Phys. At. Energy* 23 (2022) 20. (Ukr)
14. H. Utsunomiya. "Stripping" reaction in heavy ion projectile dissociation: Extended Serber model. *Phys. Rev. C* 32 (1985) 849.
15. R. Serber. The production of high energy neutrons by stripping. *Phys. Rev.* 72 (1947) 1008.
16. A.I. Akhiezer, A.G. Sitenko. Contribution to the theory of stripping at high energies. *Sov. Phys. J. Exp. Theor. Phys.* 6 (1958) 799.
17. A.G. Sitenko. On the polarization of nucleons in high energy stripping reactions. *Nucl. Phys.* 9 (1958/59) 412.
18. V.I. Kovalchuk. Deuteron stripping on nuclei at intermediate energies. *Nucl. Phys. A* 937 (2015) 59.
19. G.R. Satchler, W.G. Love. Folding model potentials from realistic interactions for heavy-ion scattering. *Phys. Rep.* 55 (1979) 183.
20. В.К. Лукьянов, Е.В. Земляная, К.В. Лукьянов. Ядро-ядерное рассеяние в высокоэнергетическом приближении и оптический потенциал фолдинга. *Препринт ОИЯИ P4-2004-115 (Дубна, 2004) 19 с.* // V.K. Lukyanov, E.V. Zemlyanaya, K.V. Lukyanov. Nucleus-nucleus scattering in the high-energy approximation and the optical folding potential. *Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research P4-2004-115 (Dubna, 2004) 19 p.* (Rus)
21. S.K. Charagi, S.K. Gupta. Coulomb-modified Glauber model description of heavy-ion reaction cross sections. *Phys. Rev. C* 41 (1990) 1610.
22. V.K. Lukyanov, E.V. Zemlyanaya, B. Słowiński. Total cross sections for nucleus-nucleus reactions within the Glauber-Sitenko approach for realistic distributions of nuclear matter. *Phys. At. Nucl.* 67 (2004) 1282.
23. P. Shukla. Glauber model for heavy ion collisions from low energies to high energies. *arXiv: nucl-th/0112039*.
24. S.T. Butler. Direct nuclear reactions. *Phys. Rev.* 106 (1957) 272.
25. V.M. Strutinskii. Surface Nucleon Stripping Reactions. *JETP* 19 (1964) 1401.
26. W.E. Frahn, R.H. Venter. Diffraction model for single-nucleon transfer reactions between complex nuclei. *Nucl. Phys.* 59 (1964) 651.
27. V.G.J. Stoks et al. Construction of high-quality NN potential models. *Phys. Rev. C* 49 (1994) 2950.
28. K. Fukunaga et al. Energy spectra of deuterons and protons for the  $d + d$  reaction at 60 MeV. *Nucl. Phys. A* 390 (1982) 19.
29. K. Fukunaga et al. Deuteron breakup with  $^3\text{He}$  at 89.4 and 118.9 MeV. *Nucl. Phys. A* 369 (1981) 289.

**V. I. Kovalchuk\***

*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine*

\*Corresponding author: [sabkiev@gmail.com](mailto:sabkiev@gmail.com)

**INCLUSIVE REACTION OF DEUTERON FRAGMENTATION UPON ITS COLLISION  
WITH A TARGET DEUTERON**

Within the framework of eikonal approximation and the double folding model, a formalism for calculating the inclusive spectra of particles emitted from the deuteron breakup reaction is proposed. The spectra of protons from the reaction  ${}^2\text{H}(d, p)$  at an incident particle energy of 59.9 MeV are described. The calculated values of cross-sections are in good agreement with the corresponding experimental data.

*Keywords:* inclusive reaction, eikonal approximation, double folding model.

Надійшла/Received 12.12.2023