

В. А. Плюйко*, О. М. Горбаченко, Н. О. Романовський

*Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна**Відповідальний автор: plujko@gmail.com**СИСТЕМАТИКА ЕНЕРГІЙ ДИПОЛЬНИХ ПІГМІ РЕЗОНАНСІВ
У СЕРЕДНІХ І ВАЖКИХ АТОМНИХ ЯДРАХ З НАДЛИШКОМ НЕЙТРОНІВ**

Розглянуто систематику енергій пігмі дипольного резонансу (ПДР) у середніх і важких ядрах з надлишком нейтронів. Для опису енергій ПДР застосована макроскопічна модель Ісакера - Нагараджан - Варнера з відносним зміщенням густин протонів кора і поверхневих нейтронів. Представлено модифіковані вирази для обчислення енергії з кількістю приповерхневих нейтронів пропорційною товщині нейтронної шкіри згідно з підходом Песіка - Равенхола. Результати порівнюються з мікроскопічними розрахунками для ланцюжків ізотопів нікелю, олова і свинцю. Продемонстровано, що обчислені енергії ПДР залежно від надлишку нейтронів мають таку ж поведінку, як і обчислені в мікроскопічних підходах експериментальні дані. Запропоновані спрощені вирази для енергій ПДР, як функцій товщини нейтронної шкіри, описують значення енергій ПДР, обчислених з використанням мікроскопічних моделей і їх можна розглядати як систематики мікроскопічних розрахунків енергій ПДР у середніх та важких нейтронно-надлишкових ядрах.

Ключові слова: пігмі дипольний резонанс (ПДР), енергії ПДР, систематика енергій ПДР, товщина нейтронної шкіри, кількість нейтронів у поверхневому прошарку.

1. Вступ

Упродовж останніх років зростає інтерес до експериментальних і теоретичних досліджень колективних станів атомних ядер, зокрема, пігмі дипольного резонансу (ПДР), розташованому поблизу енергії відриву нейтрона [1 - 7].

Хоча його внесок в енергетичне зважене правило сум становить 1 - 2 %, він може суттєво впливати на перебіг різноманітних ядерних процесів [8 - 14], зокрема на швидкість поглинання нейтронів у г-процесі, важливого для аналізу розповсюдженості елементів у Всесвіті, і врахування ПДР суттєво покращує узгодження теоретичних розрахунків з експериментальними значеннями розповсюдженості елементів у Всесвіті [10 - 12].

Існують різноманітні мікроскопічні та макроскопічні методи обчислення властивостей і функцій відгуку ПДР [5, 12, 15 - 31].

Уперше аналітичний вираз для енергії ПДР, E_p , був отриманий у роботі [25] на основі гідродинамічної моделі атомного ядра типу Штейнведеля - Йенсена для двох рідин, в якій густина нуклонів у корі ядра та густина надлишку нейтронів одночасно змінюються одна відносно іншої (SIS-модель). Співвідношення та наближений вираз для енергії ПДР на основі моделі типу Гольдхабера - Теллера були отримані в роботі Ісакера - Нагараджан - Варнера [26]. У такому підході густини протонів кора і поверхневих нейтронів зміщуються у протилежних напрямках

відносно центра мас. Розрахунки енергії ПДР за моделлю SIS як функції надлишку нейтронів суперечать результатам мікроскопічних обчислень [15 - 16].

У даній роботі представлено модифіковані вирази макроскопічної моделі Ісакера - Нагараджан - Варнера [26] з кількістю приповерхневих нейтронів, пропорційною товщині нейтронної шкіри відповідно до роботи Песіка - Равенхола [32] (модель INW). Товщина нейтронної шкіри була апроксимована лінійною функцією параметра надлишку нейтронів $I = (N - Z)/A$ з коефіцієнтами, що залежали від масових чисел атомних ядер, і які були отримані з підгонки експериментальних даних. Для ланцюжків ізотопів нікелю, олова і свинцю обчислено енергії ПДР. Показано, що, загалом, результати узгоджуються з мікроскопічними розрахунками.

2. Порівняння енергій ПДР та їх систематика

Різнорманітні мікроскопічні методи обчислення енергій і функцій відгуку із збудженням ПДР, як правило, призводять до різних значень енергій ПДР E_p . Наприклад, для ізотопів олова значення E_p з робіт [15, 16, 18 - 22] представлено на рис. 1.

З рис. 1 видно, що різниця в значеннях обчислених енергій ПДР може досягати ~30 %, а при надлишку нейтронів більше, ніж ~10 % значення енергій починають доволі сильно зменшуватися.

Для порівняння цих результатів з макроскопічними обчисленнями нами були виконані роз-

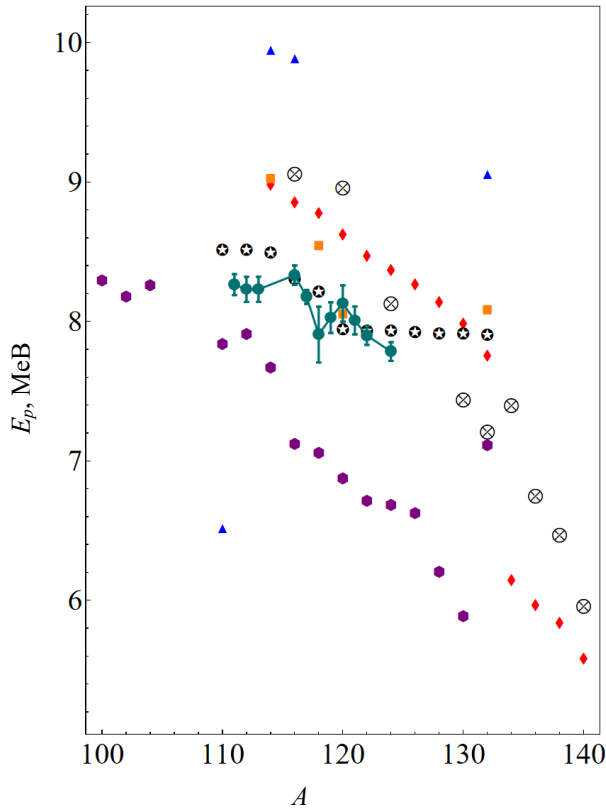


Рис. 1. Енергії ПДР для ізоотопів олова ${}_{82}^{A}\text{Sn}$ з $N \geq Z$ залежно від масового числа. Символи відповідають розрахункам з таких робіт: квадрат (■) - [16], ромб (◆) - [18], коло із зірочкою (⊛) - [19], шестикутник (⬡) - [20], коло з хрестиком (⊗) - [21], трикутник (▲) - [22]. Експериментальні дані, що позначені заштрихованим колом (●), взято з роботи [33] і відповідають усередненим значенням енергій з рис. 2. (Див. кольоровий рисунок на сайті журналу.)

рахунки за підходом INW з надлишком нейтронів згідно з виразом (A.17), який уперше був отриманий у роботі [32] (Додаток А). У результаті, відповідно до співвідношень (A.2), (A.3) і (A.17), вираз моделі INW для енергії ПДР можна представити у вигляді

$$E_p = K \left[\frac{1}{3} \frac{Z}{Z + N_c} \right]^{1/2} \left[\frac{6a}{yR_m} \Delta F(R_n, R_p) \right]^{1/2} A^{-1/6}, \quad (1)$$

де $R_p = R_m - y/2$, $R_n = R_m + y/2$, $R_m = r_m \cdot A^{1/3}$, $N_c = N - N_s$ - кількість нейтронів у корі з надлишком нейтронів $N_s = 3yN / R_0$, (A.17),

$$K = \left[\frac{\hbar^2}{m} \frac{|\kappa_{np}|}{8\pi a r_0^4} \frac{r_m}{r_0} \right]^{1/2} = 1,34 \cdot \sqrt{|\kappa_{np}|} \text{ (MeV)}. \quad (2)$$

У формулі (2) для параметрів були використані такі значення: $a = 0,57$ фм, $r_0 = 1,15$ фм

[34], $r_m = 1,25$ фм, (A.21), $\hbar^2 / m \approx \hbar^2 / m_{\text{proton}} \approx 41,5 \text{ MeV} \cdot \text{фм}^2$.

Подальші обчислення виконуються із значенням сили ефективної протон-нейтронної взаємодії $\kappa_{np} = -1828,23 \text{ MeV} \cdot \text{фм}^3$, яке дорівнює значенню сталої t_0 компоненти центральної взаємодії сил Скірма MSk7 [35], що призводить до такого значення K ,

$$K = 57,3 \text{ MeV}. \quad (3)$$

Відзначимо, що при використанні значення $\kappa_{np} = -555,0 \text{ MeV} \cdot \text{фм}^3$ з [26] значення енергій ПДР будуть на $\sim 55\%$ меншими.

При $R_m \gg \pi a$ для енергії ПДР маємо

$$E_p = K \left[\frac{1}{3} \frac{Z}{Z + N_c} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{y \cdot R_m}{10a^2} \right)^{1/2} A^{-1/6} \approx \quad (4)$$

$$\approx K \left[\frac{1}{3} \frac{Z}{Z + N_c} \right]^{1/2} \left(1 - \frac{y \cdot R_m}{20a^2} \right) A^{-1/6}. \quad (5)$$

Загальний вигляд співвідношення (5) збігається з формулою (10) з роботи [26].

Відзначимо, що на відміну від моделі SIS, (A.22), у підході INW енергія ПДР має скінченне значення і за відсутності нейтронної шкіри. Внесок ПДР (s_p) у проінтегрований переріз поглинання електричних дипольних гамма-квантів (тобто в енергетично зважене правило сум) є пропорційним кількості нейтронів у шкірі [25, 26, 36, 37]

$$s_p \equiv \frac{\sigma_{p,int}}{\sigma_{TRK}} = \frac{N_s Z}{NA_c}, \quad (6)$$

де σ_{TRK} є правилом сум Томаса - Райха - Куна: $\sigma_{TRK} = 2\pi^2 \cdot (e^2 \hbar / mc) NZ / A \approx 59,8 NZ / A$ (мб·МеВ). Оскільки кількість нейтронів біля поверхні пропорційна товщині нейтронної шкіри, то за відсутності шкіри внесок ПДР в енергетичне зважене правило буде нульовим, тобто в такій ситуації резонанс не збуджується.

Значення характеристики товщини нейтронної шкіри у обчислювалося за співвідношенням $y = \sqrt{5/3} \cdot \Delta r_{np}$, (A.10), з товщиною шкіри $\Delta r_{np} = \alpha_s + \beta_s \cdot I$ з параметрами (A.16с), що відповідають підгонці з мінімальним значенням середньоквадратичного відхилення χ^2 .

Порівняння систематик енергій ПДР для ланцюжків ізотопів нікелю, олова і свинцю за моделями INW та SIS з мікроскопічними розрахунками

ми робіт [18] та [10] (для Sn) представлено на рис. 2.

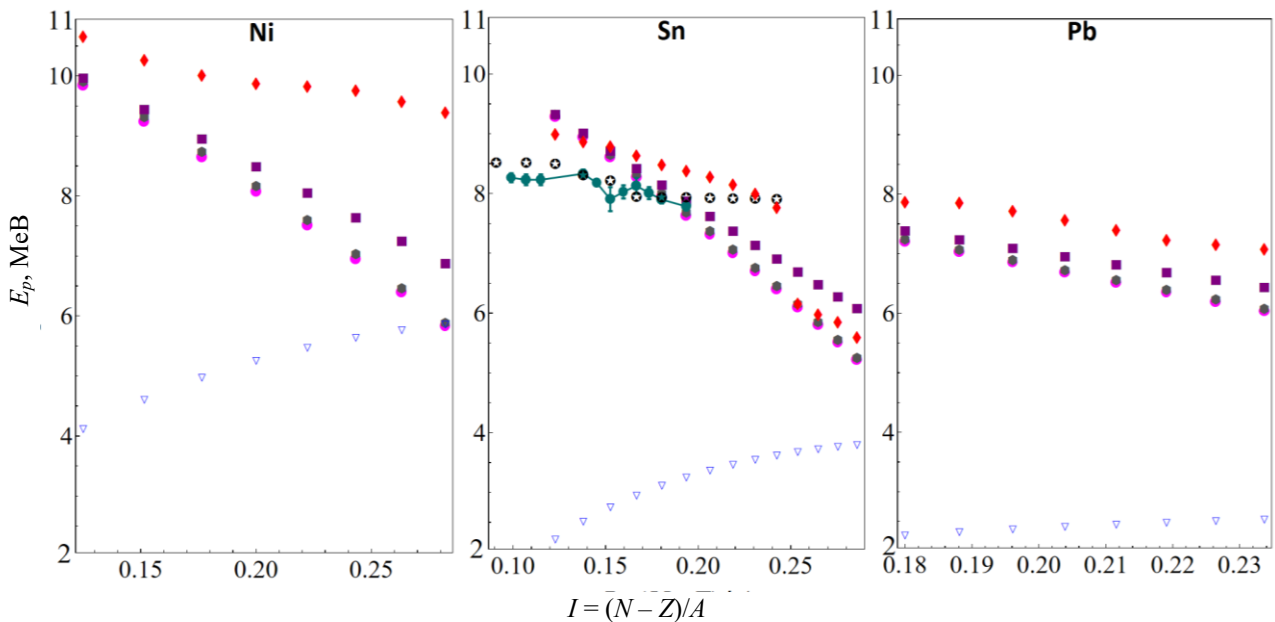


Рис. 2. Порівняння енергій ПДР резонансу в підходах INW та SIS для ізотопів нікелю, олова і свинцю з мікроскопічними розрахунками роботи [18] залежно від параметра нейтронно-протонної асиметрії $I = (N - Z)/A$. Позначення: розрахунки за моделлю INW – заштриховане коло (●) – розрахунок за формулою (1); шестикутник (⬡) – розрахунок за формулою (4); квадрат (■) – розрахунок за формулою (5); обчислення за моделлю SIS, (A.22) – перевернутий трикутник (▽); ромб (◆) – розрахунки за мікроскопічною моделлю [18], коло із зірочкою (⊛) – розрахунки за мікроскопічною моделлю [19], коло (●) – експериментальні дані з роботи [33], відповідають усередненим значенням енергій з рис. 2. (Див. кольоровий рисунок на сайті журналу.)

Видно, що з врахуванням неоднозначності в мікроскопічних розрахунках ($\sim 30\%$), залежно від надлишку нейтронів енергії ПДР в атомних ядрах з $A > \sim 100$ загалом мають приблизно таку ж поведінку, як і обчислені в мікроскопічному підході [18] і експериментальні дані. Запропоновані спрощені вирази для енергії ПДР, як функцій товщини нейтронної шкіри, описують значення енергій ПДР, обчислених з використанням мікроскопічних моделей, і їх можна розглядати, як систематики мікроскопічних розрахунків енергій ПДР в середніх та важких нейтронно-надлишкових ядрах.

3. Висновки

У даній роботі застосована макроскопічна модель Ісакера - Нагараджан - Варнера [26] з кількістю приповерхневих нейтронів, пропорційною товщині нейтронної шкіри згідно з роботою Песіка - Равенхола [32] (модель INW). Товщина нейтронної шкіри була апроксимована лінійною функцією параметра надлишку нейтронів $I = (N - Z)/A$ з коефіцієнтами, що залежали від масових чисел атомних ядер. Показано, що врахування залежності коефіцієнтів від масового числа зменшує середньоквадратичне відхилення розрахованих

них значень енергій від експериментальних даних, тобто покращує опис експериментальних даних. На прикладі енергій ПДР для ланцюжків ізотопів нікелю, олова і свинцю продемонстровано, що розраховані енергії ПДР методом INW зі значеннями сили ефективної протон-нейтронної взаємодії $\kappa_{np} = -1828,23 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^3$, що відповідає значенню сталої t_0 компоненти центральної взаємодії сил Скірма MSk7 [35], загалом узгоджуються з мікроскопічними розрахунками з врахуванням невизначеності ($\sim 30\%$) мікроскопічних значень.

Співвідношення моделі INW з використаними параметрами обчислень, зокрема формулу (4), можна розглядати, як найпростішу систематику мікроскопічних розрахунків енергій ПДР в нейтронно-надлишкових атомних ядрах з $A > \sim 100$.

Автори вдячні В. Ю. Денисову за важливі і конструктивні обговорення макроскопічних визначень та опису геометричних характеристик атомних ядер.

В. Плуюко і О. Горбаченко також висловлюють вдячність фонду НФДУ за часткову підтримку досліджень (грант НФДУ 2023.05/0024

«Вирішення сучасних проблем хімії, біомедицини, фізики та матеріалознавства з використанням центру високопродуктивних обчислень і машинного навчання»).

ДОДАТОК А

Вирази для енергії ПДР у макроскопічних моделях INW і SIS та параметри їх обчислень

Вираз для квадрата енергії ПДР у підході Ісакера - Нагараджана - Варнера [26] (формула (9) та визначення частоти поверхневих коливань нейтронів відносно протонів кора) на основі моделі Гольдхабера - Теллера [38] можна представити у вигляді

$$E_p^2 = \frac{4\pi |\kappa_{np}|}{3} \frac{\hbar^2 \rho_{n0} \rho_{p0}}{\mu_p} \Delta F(R_n, R_p),$$

$$\Delta F = F(R_n, R_p) - F(R_p, R_p). \quad (\text{A.1})$$

Тут $|\kappa_{np}|$ є абсолютним значенням сили ефективної протон-нейтронної взаємодії; $\mu_p = mN_s A_c / A$, $(1/\mu_p = (1/m) \cdot (1/N_s + 1/A_c))$ - зведена маса нейтрон-протонної підсистеми, що коливається у ПДР; N_s - кількість нейтронів у поверхневому прошарку; $A_c = A - N_s$ масове число кора ядра; $\rho_{n0} = N/V$, $\rho_{p0} = Z/V$ - центральні значення густин протонів і нейтронів у ядрі з об'ємом $V = (4\pi/3)R_0^3$ із середнім радіусом ядра $R_0 = r_0 A^{1/3}$ для густини розподілу нуклонів з різким краєм. У результаті маємо такі загальні вирази для енергій ПДР

$$E_p = \left[\frac{\hbar^2 |\kappa_{np}|}{m} \frac{3}{A} \frac{1}{4\pi r_0^6} \right]^{1/2} \left[\frac{Z}{A_c} \frac{N}{N_s} \right]^{1/2} [\Delta F(R_n, R_p)]^{1/2}, \quad (\text{A.2})$$

Функції $F(R_n, R_p)$, $F(R_p, R_p)$ визначені формулою (6) у роботі [26], можна представити у вигляді

$$F(R_n, R_p) = \frac{1}{4a} \text{csch}^2\left(\frac{y}{2a}\right) \times$$

$$\times \left[\coth\left(\frac{y}{2a}\right) \frac{c_n - c_p}{a} - (c'_n + c'_p) \right], \quad (\text{A.3})$$

а

$$F(R_p, R_p) = \frac{3R_p^2 + (\pi^2 - 6)a^2}{18a}. \quad (\text{A.4})$$

Тут $c_i = (R_i^3 + \pi^2 a^2 R_i) / 3$, $c'_i \equiv c'(R_i, a) = \partial c_i / \partial R_i = R_i^2 + \pi^2 a^2 / 3$; а R_n, R_p - радіуси розподілів густин нейтронів та протонів у вигляді функцій Фермі (2pF розподіл)

$$\rho_j(r) = \rho_{0,j} \cdot \left[1 + \exp\left(\frac{r - R_j}{a_j}\right) \right]^{-1} \quad (\text{A.5})$$

на половині густини; дифузності розподілів протонів і нейтронів вважаються однаковими $a_n = a_p = a$. Величина $R_m = (R_n + R_p) / 2$ є середнім радіусом 2pF розподілів нуклонів, а $y = R_n - R_p$ - товщина нейтронної шкіри. Функції $\text{csch}(x)$ та $\text{coth}(x)$ у (A.3) є гіперболічним косекансом і тангенсом.

У середніх і важких атомних ядрах відношення $a/R_j \ll 1$, тому для функції F можна використовувати лептодермічний розклад. Для його знаходження виділимо сингулярності в гіперболічних функціях $\text{csch}(x)$ і $\text{coth}(x)$ при аргументі, прямуючому до нуля. Формула для $F(R_n, R_p)$, (A.3), приймає вигляд

$$F(\tilde{R}_n, \tilde{R}_p) = \bar{F} + \frac{y^2}{72a} + \frac{1}{4a} H_1\left(\frac{y}{2a}\right) \times$$

$$\times \left[H_2\left(\frac{y}{2a}\right) \frac{y}{a} \left(\bar{c}' + \frac{y^2}{12} \right) + \frac{y^2}{a} \left(\bar{F} + \frac{y^2}{72a} \right) \right] +$$

$$+ H_2\left(\frac{y}{2a}\right) \frac{1}{y} \left(\bar{c}' + \frac{y^2}{12} \right), \quad (\text{A.6})$$

де $\bar{F} \equiv F(R_m, R_m)$, $\bar{c}' = c'(R_m, a)$, а

$$H_1(x) = \text{csch}^2(x) - \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + O(x^4),$$

$$H_2(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} = -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{45} + O(x^5) \quad 3$$

$x = y / (2a)$. У результаті в другому порядку по y маємо

$$F(R_p, R_p) = \bar{F} - \frac{y \cdot R_m}{6a} + \frac{y^2}{24a},$$

$$\bar{F} = \frac{3R_m^2 + (\pi^2 - 6)a^2}{18a} \cong \frac{R_m^2}{6a}. \quad (\text{A.7})$$

$$F(R_n, R_p) = \bar{F} \cdot \left[1 - \frac{y^2}{10a^2} + \frac{y^2}{120a\bar{F}} \right] \cong \frac{R_m^2}{6a} \cdot \left[1 - \frac{y^2}{10a^2} \right], \quad (\text{A.8})$$

Тому вираз (А.2) для енергії ПДР у другому порядку по y можна представити у вигляді

$$E_p = \left[\frac{\hbar^2}{m} \frac{|\kappa_{np}|}{A} \frac{3}{4\pi r_0^6} \right]^{1/2} \left[\frac{Z}{A_c} \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\frac{R_m}{6a} \frac{yN}{N_s} \left(1 - \frac{y \cdot 3R_m^2 + \pi^2 a^2}{30a^2 R_m} \right) \right]^{1/2}. \quad (\text{A.9})$$

В якості характеристики товщини нейтронної шкіри, як зазвичай це робиться, використовуємо не параметр y , а різницю коренів із середньоквадратичних радіусів нейтронів і протонів $R_{rms,j} = \sqrt{\langle r^2 \rangle_j}$ або різницю еквівалентних коренів із середньоквадратичних радіусів (так званих еквівалентних радіусів) $\bar{R}_j = \sqrt{\frac{5}{3}} R_{rms,j} = \sqrt{\frac{5}{3}} \langle r^2 \rangle_j$ ($j = p, n$), тобто величини $\Delta r_{np} = R_{rms,n} - R_{rms,p}$, $\delta r_{np} = \bar{R}_n - \bar{R}_p = \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \Delta r_{np}$. Для 2pF розподілу в першому порядку лептодермічного розкладу по параметру a_j / R_j співвідношення між радіусами ядра, які визначені різними способами, представлено в роботах [39 - 42]. У середніх і важких ядрах ($R_p \gg \Delta r_{np}$) маємо такі вирази для товщини шкіри y та середнього радіуса R_m як функції відповідних середньоквадратичних геометричних характеристик

$$y = R_n - R_p \cong \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left[1 + \frac{7\pi^2}{10} \left(\frac{a}{R_{rms,p}} \right)^2 \right] \Delta r_{np} \cong \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \Delta r_{np}, \quad (\text{A.10})$$

$$R_m = \frac{R_n + R_p}{2} \cong \sqrt{\frac{5}{3}} \cdot \left[R_{rms,p} + \frac{\Delta r_{np}}{2} \right]. \quad (\text{A.11})$$

Радіус розподілу протонів $R_{rms,p}$ обчислювався згідно з роботами [43 - 45]

$$R_{rms,p} = \left[r_1 + \frac{r_2}{A^{2/3}} + \frac{r_3}{A^{4/3}} \right] \cdot A^{1/3}, \quad (\text{A.12})$$

де значення параметрів, які були отримані з підгонки експериментальних даних, такі $r_1 = 0,9071$ фм, $r_2 = 1,105$ фм, $r_3 = -0,548$ фм. Вони дуже близькі до тих, що були отримані на основі модифікованої краплинкової моделі [34] (у фм): $r_1 = 0,891$, $r_2 = 1,394$, $r_3 = -0,930$.

Для параметра дифузності використовуємо значення $a = a_p \cong 0,57$ фм [40]; у такій ситуації товщина приповерхового прошарку, яка визначає зміну густини від 90 % до 10 %, дорівнює $t = 4,4 \cdot a_p = 2,49$ фм.

Теоретичні дослідження за різноманітними підходами [46 - 52] та підгонка експериментальних даних продемонстрували, що товщину шкіри біля кореня із середньоквадратичного радіуса в середніх і важких ядрах можна апроксимувати лінійною функцією параметра надлишку нейтронів $I = (N - Z)/A$

$$\Delta r_{np} = \alpha + \beta \cdot I. \quad (\text{A.13})$$

Значення параметрів α, β , отримані в різних дослідженнях, трохи відрізняються, але середні значення близькі [48 - 51]. У роботі [52] було показано, що лінійною функцією (А.15) можна краще описати експериментальні дані по товщинах нейтронної шкіри (підігнати нею дані з меншим значенням χ^2), якщо використовувати різні значення α, β для різних ланцюжків ізотопів. Залежності цих параметрів від масового числа також з'являються, якщо використати розрахунки нейтронного і протонного радіусів, при мікроскопічних обчисленнях [53, 54]. Згідно з [53, 54] вони відповідно мають такий загальний вигляд

$$\alpha \equiv \alpha_w = A^{1/3} (a_1 + a_2 / A), \quad \beta \equiv \beta_w = b_1 A^{1/3}, \quad (\text{A.14})$$

$$\alpha \equiv \alpha_s = A^{1/3} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 A^{2/3} + \bar{a}_3 A^{-1/3}),$$

$$\beta \equiv \beta_s = A^{1/3} (\bar{b}_1 + \bar{b}_2 A^{2/3}), \quad (\text{A.15})$$

де коефіцієнти a_j, b_j та $\bar{a}_j, \bar{b}_j$ вважаються сталими.

У даній роботі відповідні коефіцієнти знаходилися з підгонки методом найменших квадратів експериментальних значень зі змішаної бази даних, що включала оцінені дані для парно-парних ядер з роботи [52] та дані для інших ядер з робіт [46, 47]. Було отримано такі результати

$$\alpha = -0,007 \pm 0,012, \quad \beta = 0,845 \pm 0,078,$$

$$\chi^2 = 1,847, \quad (\text{A.16a})$$

$$a_1 = -0,039 \pm 0,006, \quad a_2 = 1,777 \pm 0,229,$$

$$b_1 = 0,294 \pm 0,025, \quad \chi^2 = 1,165, \quad (\text{A.16b})$$

$$\bar{a}_1 = -0,218 \pm 0,073, \quad \bar{a}_2 = 0,003 \pm 0,002,$$

$$\bar{a}_3 = 0,617 \pm 0,179,$$

$$\bar{b}_1 = 0,468 \pm 0,085, \quad \bar{b}_2 = -0,009 \pm 0,005,$$

$$\chi^2 = 0,961. \quad (\text{A.16c})$$

Тут χ^2 є середньоквадратичним відхиленням апроксимації експериментальних даних моделлю,

$$\chi^2 = \frac{1}{N_{point} - N_{par}} \sum_{k=1}^{N_{point}} \left(\frac{(\Delta r_{np,k})_{th} - (\Delta r_{np,k})_{exp}}{\sigma(\Delta r_{np,k})_{exp}} \right)^2,$$

де N_{point} - кількість експериментальних значень для товщини нейтронної шкіри, N_{par} - кількість параметрів, $\sigma(\Delta r_{np,k})_{exp}$ - середньоквадратичні відхилення параметра.

Відповідно до роботи [32], що пізніше було отримано і у [24, 55, 56] за відомої товщини нейтронної шкіри кількість у ній поверхневих нейтронів для середніх і важких атомних ядер можна обчислити, користуючись співвідношенням

$$\frac{N_s}{N} = \frac{3\delta r_{o,np}}{R_0} \cong \frac{3y}{R_0} \cong \frac{\sqrt{15}\Delta r_{np}}{R_0}, \quad (\text{A.17})$$

де $R_{0,n}$, $R_{0,p}$ - радіуси розподілів нейтронів і протонів з різким краєм; тут також враховані властивості розподілів у вигляді 2pF функції Фермі, згідно з якими [39 - 42], у лептодермічному наближенні $R_0 \gg a$ значення товщини нейтронної шкіри $\delta r_{s,np} \cong \sqrt{5/3}\Delta r_{np}$ збігається зі значенням товщини $y = R_n - R_p$.

Середнє стале значення параметра $r_m = R_m / A^{1/3}$ знаходилося з підгонки радіуса R_m згідно з (A.11), (A.12) і $\Delta r_{np} = \alpha_s + \beta_s \cdot I$. При підгонці використовуємо метод найменших квадратів з мінімізацією значення χ_m^2 ,

$$\chi_m^2 = \sum_j w_j (r_m g_j - R_{m,j})^2, \quad g_j = A_j^{1/3},$$

$$R_{m,j} = R_m(A_j), \quad (\text{A.18})$$

w_j - ваговий коефіцієнт j -того значення квадрату різниці радіусів. Мінімум χ_m^2 реалізується при

таких співвідношеннях для параметра r_m :

$$r_m = \frac{\sum_j w_j g_j R_{m,j}}{\sum_j w_j g_j^2},$$

$$\sigma_{r_m}^2 = \frac{\sum_j [w_j g_j]^2 \sigma_j^2}{\left[\sum_j w_j g_j^2 \right]^2}. \quad (\text{A.19})$$

Тут σ_{r_m} і σ_j - середньоквадратичні відхилення параметра r_m і j -того значення середнього радіуса R_m . Відзначимо, що згідно з (A.20), при сталих вагах значення параметра r_m та його середньоквадратичне відхилення не залежать від їхньої величини. Обчислення виконувалися для масових чисел ядер A_j на лінії бета-стабільності із зарядами $20 \leq Z_j \leq 93$. Значення масових чисел знаходились відповідно до формули Гріна $N - Z = 0,4A^2 / (A + 200)$ [57 - 59], а саме

$$A_j = 5 \left[Z_j + \sqrt{Z_j^2 + 40Z_j + 10000} - 100 \right] / 3. \quad (\text{A.20})$$

При підгонці вагові коефіцієнти вважалися сталими, а середньоквадратичні відхилення дорівнювали $\sigma_j = 0,1 \cdot R_{m,j}$. Для середнього сталого параметра $r_m = R_m / A^{1/3}$ було отримано таке значення

$$r_m = 1,25 \pm 0,02 \text{ фм}. \quad (\text{A.21})$$

У моделі SIS вираз для енергії ПДР має вигляд [25] (в MeB):

$$E_{p,SIS} = \frac{2,082}{A^{1/3}} \left[\frac{\hbar^2 8a_{sym}}{m r_0^2} \frac{ZN}{A^2} \right]^{1/2} \left[\frac{N_s}{A_c} \frac{Z}{N} \right]^{1/2} =$$

$$= 79 \left[\frac{4ZN}{A^2} \right]^{1/2} \left[\frac{N_s}{A_c} \frac{Z}{N} \right]^{1/2} A^{-1/3}, \quad (\text{A.22})$$

де для параметрів були використані такі значення: $\hbar^2 / m \cong \hbar^2 / m_{proton} \cong 41,5 \text{ MeB} \cdot \text{фм}^2$, $r_0 = 1,15 \text{ фм}$, $a_{sym} = 23 \text{ MeB}$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. D. Savran, T. Aumann, A. Zilges. Experimental studies of the Pygmy Dipole Resonance. *Prog. Part. Nucl. Phys.* **70** (2013) 210.
2. D. Savran. Recent results on the pygmy dipole resonance. *J. Phys.: Conf. Ser.* **590** (2015) 012011.
3. A. Zilges et al. The Pygmy Dipole Resonance – status and new developments. *J. Phys.: Conf. Ser.* **580** (2015) 012052.

4. A. Bracco, E.G. Lanza, A. Tamii. Isoscalar and isovector dipole excitations: Nuclear properties from low-lying states and from the isovector giant dipole resonance. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 106 (2019) 360.
5. E.G. Lanza, A. Vitturi. Theoretical description of Pygmy (Dipole) Resonances. In: *Handbook of Nuclear Physics*. I. Tanihata, H. Toki, T. Kajino (Eds.) (Singapore, Springer, 2023) p. 675.
6. E.G. Lanza et al. Theoretical studies of Pygmy Resonances. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 129 (2023) 104006.
7. E.G. Lanza et al. Pygmy dipole resonances: open problems. *J. Phys.: Conf. Ser.* 2586 (2023) 012084.
8. J.S. Brzozko et al. Effect of the pigmy resonance on the calculations of the neutron capture cross section. *Can. J. Phys.* 47(24) (1969) 2849.
9. M. Igashira et al. Systematics of the pygmy resonance in keV neutron capture γ -ray spectra of nuclei with $N = 82 - 126$. *Nucl. Phys. A* 457 (1986) 301.
10. S. Goriely. Radiative neutron captures by neutron-rich nuclei and the r-process nucleosynthesis. *Phys. Lett. B* 436 (1998) 10.
11. M. Arnould, S. Goriely, K. Takahashi. The r-process of stellar nucleosynthesis: Astrophysics and nuclear physics achievements and mysteries. *Phys. Rep.* 450 (2007) 97.
12. S. Goriely. Nuclear properties for nuclear astrophysics studies. *Eur. Phys. J. A* 59 (2023) 16.
13. T. Aumann. Low-energy dipole response of exotic nuclei. *Eur. Phys. J. A* 55 (2019) 234.
14. A. Zilges et al. Photonuclear reactions – From basic research to applications. *Prog. Part. Nucl. Phys.* 122 (2022) 103903.
15. J. Chambers et al. Pygmy dipole resonances in the calcium isotopes. *Phys. Rev. C* 50 (1994) R2671.
16. D. Vretenar et al. Collectivity of the low-lying dipole strength in relativistic random approximation. *Nucl. Phys. A* 692 (2001) 496.
17. S. Goriely, E. Khan. Large-scale QRPA calculation of E1-strength and its impact on the neutron capture cross section. *Nucl. Phys. A* 706 (2002) 217.
18. N. Paar et al. Isotopic dependence of the pygmy dipole resonance. *Phys. Lett. B* 606 (2005) 288.
19. J. Piekarewicz. Pygmy dipole resonance as a constraint on the neutron skin of heavy nuclei. *Phys. Rev. C* 73 (2006) 044325.
20. N. Tsoneva, H. Lenske. Pygmy dipole resonances in the tin region. *Phys. Rev. C* 77 (2008) 024321.
21. E. Litvinova et al. Relativistic quasiparticle time blocking approximation. II. Pygmy dipole resonance in neutron-rich nuclei. *Phys. Rev. C* 79 (2009) 054312.
22. G. C   et al. Pygmy and giant electric dipole responses of medium-heavy nuclei in a self-consistent random-phase approximation approach with a finite-range interaction. *Phys. Rev. C* 87 (2013) 034305.
23. E.G. Lanza, A. Vitturi, M.V. Andr  s. Microscopic nuclear form factors for the pygmy dipole resonance. *Phys. Rev. C* 91 (2015) 054607.
24. В. І. Абросімов, О. І. Давидовська. Напівкласична модель дипольного пігмі-резонансу в ядрах із надлишком нейтронів. *Укр. фіз. журн.* 54(11) (2009) 1069. / V.I. Abrosimov, O.I. Davydovska. Semiclassical model of dipole pygmy-resonance in nuclei with neutron excess. *Ukr. J. Phys.* 54(11) (2009) 1069. (Ukr)
25. Y. Suzuki, K. Ikeda, H. Sato. New type of dipole vibration in nuclei. *Prog. Theor. Phys.* 83 (1990) 180.
26. P. Van Isacker, M.A. Nagarajan, D.D. Warner. Effect of the neutron skin on collective states of nuclei. *Phys. Rev. C* 45 (1992) R13(R).
27. V. Baran et al. Pygmy dipole resonance: Collective features and symmetry energy effects. *Phys. Rev. C* 85 (2012) 051601(R).
28. V. Baran et al. Collective dipole modes in nuclear systems. *Rom. Journ. Phys.* 57 (2012) 36.
29. A. Croitoru et al. Pygmy dipole resonance in a schematic model. *Rom. Journ. Phys.* 60 (2015) 748.
30. V. Plujko et al. Improvements and testing practical expressions for photon strength functions of E1 gamma-transitions. *EPJ Web of Conf.* 146 (2017) 05014.
31. О.М. Горбаченко та ін. Опис фотопоглинання фотонними силовими функціями із збудженням двох резонансних станів. *Ядерна фізика та енергетика* 24(1) (2023) 17. / О.М. Gorbachenko et al. Description of photoabsorption using photon strength function with the excitation of two resonance states. *Nucl. Phys. At. Energy* 24(1) (2023) 17. (Ukr)
32. C.J. Pethick, D.G. Ravenhall. The dependence of neutron skin thickness and surface tension on neutron excess. *Nucl. Phys. A* 606(1-2) (1996) 173.
33. M. Markova, P. von Neumann-Cosel, E. Litvinova. Systematics of the low-energy electric dipole strength in the Sn isotopic chain. *Phys. Lett. B* 860 (2025) 139216.
34. W.D. Myers, K.-H. Schmidt. An update on droplet-model charge distributions. *Nucl. Phys. A* 410 (1983) 61.
35. S. Goriely, F. Tondeur, J.M. Pearson. A Hartree-Fock nuclear mass table. *At. Data Nucl. Data Tables* 77 (2001) 311.
36. Y. Alhassid, M. Gai, G.F. Bertsch. Radiative width of molecular-cluster states. *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982) 1482.
37. H. Kurasawa, T. Suzuki. A sum-rule constraint on the soft dipole mode. *Prog. Theor. Phys.* 94 (1995) 931.
38. M. Goldhaber, E. Teller. On nuclear dipole vibrations. *Phys. Rev.* 74 (1948) 1046.
39. L.R.B. Elton. A semi-empirical formula for nuclear radius. *Nucl. Phys.* 5 (1958) 173.
40. L.R.B. Elton. *Nuclear Sizes* (Oxford, Oxford University Press, 1961) 114 p.
41. R.W. Hasse, W.D. Myers. *Geometrical Relationships of Macroscopic Nuclear Physics* (Heidelberg, Springer-Verlag, 1988).
42. M. Warda et al. Analysis of bulk and surface contributions in the neutron skin of nuclei. *Phys. Rev. C* 81 (2010) 054309.
43. I. Angeli. *Table of Nuclear Root Mean Square Charge Radii*. INDC(HUN)-033 (Vienna, IAEA, 1999) 84 p.

44. I. Angeli. A consistent set of nuclear rms charge radii: properties of the radius surface $R(N, Z)$. *At. Data Nucl. Data Tables* 87 (2004) 185.
45. I. Angeli, K.P. Marinova. Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update. *At. Data Nucl. Data Tables* 99 (2013) 69.
46. A. Trzcińska et al. Neutron density distributions deduced from antiprotonic atoms. *Phys. Rev. Lett.* 87 (2001) 082501.
47. J. Jastrzębski et al. Neutron density distributions from antiprotonic atoms compared with hadron scattering data. *Int. J. Mod. Phys. E* 13 (2004) 343.
48. W.J. Świątecki, A. Trzcińska, J. Jastrzębski. Difference of the root-mean-square sizes of neutron and proton distributions in nuclei: Comparison of theory with data. *Phys. Rev. C* 71 (2005) 047301.
49. E. Friedman, A. Gal. In-medium nuclear interactions of low-energy hadrons. *Phys. Rep.* 452 (2007) 89.
50. M. Warda et al. Neutron skin thickness in the droplet model with surface width dependence: Indications of softness of the nuclear symmetry energy. *Phys. Rev. C* 80 (2009) 024316.
51. S.V. Lukyanov, A.I. Sanzhur. Influence of surface effects on neutron skin in atomic nuclei. *Nucl. Phys. At. Energy* 21 (2020) 223.
52. J.T. Zhang et al. Systematic trends of neutron skin thickness versus relative neutron excess. *Phys. Rev. C* 104 (2021) 034303.
53. M. Warda, B. Nerlo-Pomorska, K. Pomorski. Isospin dependence of proton and neutron radii within relativistic mean field theory. *Nucl. Phys. A* 635 (1998) 484.
54. W.M. Seif, H. Mansour. Systematics of nucleon density distributions and neutron skin of nuclei. *Int. J. Mod. Phys. E* 24 (2015) 1550083.
55. В.М. Коломієць, А.І. Санжур. Об'ємна та поверхнева енергія симетрії для ядер, віддалених від долини стабільності. *Ядерна фізика та енергетика* 8(2) (2007) 7. / V.M. Kolomietz, A.I. Sanzhur. Bulk and surface symmetry energy for the nuclei far from the valley of stability. *Nucl. Phys. At. Energy* 8(2) (2007) 7. (Ukr)
56. V.M. Kolomietz, A.I. Sanzhur. Equation of state and symmetry energy within the stability valley. *Eur. Phys. J. A* 38 (2008) 345.
57. A.E.S. Green. The systematics of nuclear energies. *Phys. Rev.* 83 (1951) 1248.
58. A.E.S. Green, N.A. Engler. Mass surfaces. *Phys. Rev.* 91 (1952) 40.
59. P. Moller et al. Nuclear ground-state masses and deformations. *At. Data and Nucl. Data Tables* 59 (1995) 185.

V. A. Plujko*, O. M. Gorbachenko, N. O. Romanovskyi

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: plujko@gmail.com

SYSTEMATICS OF PYGMY DIPOLE RESONANCE ENERGIES IN MEDIUM AND HEAVY ATOMIC NUCLEI WITH NEUTRON EXCESS

Systematics of the energies of the pygmy dipole resonances (PDR) in medium and heavy nuclei with neutron excess is considered. The macroscopic Isacker - Nagarajan - Warner model, incorporating a relative shift between the proton core density and the surface neutron density, is used to describe the PDR energies. Modified expressions for calculating energy with the number of near-surface neutrons proportional to the neutron skin thickness according to the Pethick - Ravenhall approach are presented. The results are compared with microscopic calculations for Nickel, Tin, and Lead isotope chains. It is demonstrated that the calculated PDR energies, depending on the neutron excess, exhibit the same behavior as those calculated in microscopic approaches and experimental data. Simple expressions for the PDR energy as a function of the neutron skin thickness are proposed to describe the values of PDR energies calculated using microscopic models and can be considered as systematics of microscopic calculations of PDR energies in medium and heavy neutron-rich nuclei.

Keywords: pygmy dipole resonance (PDR), energies of the PDR, energy systematics, neutron skin thickness, number of near-surface neutrons.

Надійшла / Received 12.05.2025