

Ю. А. Бережний¹, В. О. Золотарьов², В. П. Михайлюк^{3,*}¹Харківський національний університет ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна²Національний науковий центр «Харківський фізико-технічний інститут» НАН України, Харків, Україна³Інститут ядерних досліджень НАН України, Київ, Україна*Відповідальний автор: mikhailyuk@kinr.kiev.ua**ВЗАЄМОДІЯ ПРОТОНІВ З ЯДРАМИ В БОРНОВОМУ НАБЛИЖЕННІ (I)**

На основі Борнового наближення розроблено підхід, що дає змогу вивчати процеси взаємодії частинок з ядрами в області проміжних енергій. На відміну від підходу, представленому в наших попередніх роботах, де аналітичні вирази для розрахунків поляризаційних спостережуваних пружного розсіяння протонів ядрами було отримано з використанням розкладу потенціалу взаємодії за малими доданками, в даному підході розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не використовувався. При отриманні аналітичних виразів для амплітуд пружного розсіяння протонів ядрами використовувалося друге Борнове наближення з потенціалом у формі Вудса - Саксона, а також з потенціалом взаємодії для ядра з різкою границею поглинання, який коригувався для врахування розмиття ядерної поверхні.

Ключові слова: Борнове наближення, поляризаційні спостережувані.

1. Вступ

Важливу інформацію про структуру мікрооб'єктів і механізми їхньої взаємодії можна отримати з вивчення зіткнень молекул, атомів, атомних ядер і елементарних частинок. Для аналізу таких процесів зазвичай використовуються різноманітні теоретичні підходи щодо опису взаємодії мікрооб'єктів, найпростішим з яких є пружне розсіяння.

Квантово-механічний опис пружного розсіяння в нерелятивістській області енергій базується на розв'язку рівняння Шредінгера, яке в загальному вигляді для різних типів взаємодії можна вирішувати лише чисельно. Тому для розуміння таких процесів важливо також використовувати розумні наближені методи, що дають змогу зрозуміти фізичні особливості процесів розсіяння мікрооб'єктів.

Одним із широко розповсюджених наближених методів є Борнове наближення (БН), яке полягає у визначенні амплітуди розсіяння у формі нескінченного ряду по ступенях потенційної енергії на основі теорії збурень. Зазвичай через складність розрахунків при вивченні процесів взаємодії частинок з ядрами використовується тільки перше БН (перший член Борнового ряду), однак такий підхід у багатьох випадках виявляється недостатньо точним для опису різних характеристик розсіяння.

Як відомо, амплітуда розсіяння в першому БН являє собою простий вираз, який з точністю до постійного множника збігається з перетворенням

Фур'є від потенціалу взаємодії. Істотним недоліком першого БН є дійсна величина амплітуди розсіяння для Ермітового потенціалу, що несумісне з оптичною теоремою. Іншими словами, у цьому випадку область, у якій дійсний Ермітовий потенціал суттєво відрізняється від нуля, діє як джерело частинок. Крім того, у першому БН поляризація частинок для комплексного потенціалу знакопостійна, що суперечить існуючим експериментальним даним.

У той же час, другий доданок БН (другий член Борнового ряду) є достатньо складним математичним виразом, оцінка якого з гарною точністю є непростю задачею. Виявляється, що амплітуда розсіяння в другому БН важлива для обчислення поляризації частинок зі спінами, оскільки в першому БН для Ермітового потенціалу поляризація частинок зі спином 1/2 при їхньому розсіянні мішенню з нульовим спіном, дорівнює нулю [1, 2].

В області середніх енергій перерізи і поляризаційні характеристики розсіяння являють собою складні осцилюючі функції кута розсіяння (переданого імпульсу). Зазвичай для опису таких експериментальних даних використовуються різні підходи. Один з них – оптична модель ядерного розсіяння, у якій проводиться чисельний розв'язок рівняння Шредінгера з комплексним потенціалом (див., наприклад, [3 - 5] і посилання там же). Альтернативою оптичній моделі є теорія, заснована на використанні параметризованої певним чином матриці розсіяння (див., наприклад, [6, 7] і посилання там же). Такий підхід вільний від ряду недоліків, властивих оптичній моделі.

© Автор(и), 2025

Стаття опублікована ІЯД НАН України за умовами відкритого доступу за ліцензією CC BY-NC 4.0

У даній роботі з урахуванням першого та другого БН розроблено підхід, що дає можливість вивчати процеси взаємодії частинок з ядрами в області проміжних енергій та отримано аналітичні вирази для розрахунків перерізів і поляризаційних спостережуваних пружного розсіювання протонів ядрами. Аналітичні вирази для амплітуд розсіювання та відповідних спостережуваних характеристик розсіювання представлено в Розділах 2 - 4.

Застосування результатів представлених розрахунків, а також порівняння їх з існуючими роз-

рахунками та наявними експериментальними даними буде наведено в наших наступних публікаціях.

2. Взаємодія частинок з ядрами у першому БН

У БН у загальному випадку амплітуда розсіювання частинок ядрами може бути представлена у вигляді ряду по ступенях збурення

$$\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \sum_{n=1}^{\infty} f^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}'), \quad (2.1)$$

$$f^{(n)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int \prod_{j=1}^n d\mathbf{r}_j \exp(-ik' \mathbf{r}_n) U(\mathbf{r}_n) G_0^{(+)}(|\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1}|) U(\mathbf{r}_{n-1}) \dots G_0^{(+)}(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|) U(\mathbf{r}_1) \exp(-ik \mathbf{r}_1), \quad (2.2)$$

де n – порядок збурення, $m = m_p m_t / (m_p + m_t)$ – зведена маса, $\mathbf{k}$ і $\mathbf{k}'$ – хвильові вектори налітаючої та розсіяної частинки, а функція Гріна визначається таким виразом

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (2.3)$$

Залишаючи в правій частині виразу (2.2) тільки перший доданок, знаходимо амплітуду пружного розсіювання в першому БН

$$f^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} e^{-ik'\mathbf{r}} U(\mathbf{r}) e^{ik\mathbf{r}}, \quad (2.4)$$

де $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ – переданий імпульс, пов'язаний у випадку пружного розсіювання з кутом θ співвідношенням $|\mathbf{q}| = 2k \sin(\theta/2)$. Видно, що вираз (2.4) з точністю до постійного множника збігається з перетворенням Фур'є від потенціалу взаємодії $U(\mathbf{r})$. Зазначимо, що амплітуду розсіювання (2.4) також можна здобути з рівняння Шредінгера, якщо його розв'язувати за допомогою теорії збурень.

В оптичній моделі ядерного розсіювання при вивченні взаємодії частинок з нульовими спінами зазвичай використовується комплексний потенціал (потенціал з рівною геометрією) у формі Вудса - Саксона

$$U_c(r) = -\{V_0 + iW_0\} g(r), \quad g(r) = \frac{1}{1 + e^{(r-R)/d}}, \quad (2.5)$$

де V_0 і W_0 – глибини дійсної і уявної частин оптичного потенціалу, R і d – радіус і ширина розмиття поверхневої області потенціалу, які можна інтерпретувати як радіус і розмиття поверхні ядра.

У наближенні $d \ll R$, яке виконується для більшості ядер крім декількох найлегших, для центральної амплітуди розсіювання у першому БН знаходимо

$$f_c^{(1)}(q) = \frac{2mR^3}{\hbar^2} (V_0 + iW_0) F_0(q) \times \left[\frac{j_1(qR)}{qR} + \left(\frac{\pi d}{R} \right)^2 F_1(q) j_0(qR) \right], \quad (2.6)$$

де формфактори $F_0(q)$ і $F_1(q)$ визначаються виразами [8]

$$F_0(q) = \frac{\pi q d}{\text{sh}(\pi q d)}, \quad F_1(q) = \frac{\pi q d \text{cth}(\pi q d) - 1}{\pi q d}. \quad (2.7)$$

У наближенні $\pi q d \ll 1$ отримуємо

$$f_c^{(1)}(q) = \frac{2mR^3}{\hbar^2} (V_0 + iW_0) F_0(q) \times \left[\frac{j_1(qR)}{qR} + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi d}{R} \right)^2 j_0(qR) \right]. \quad (2.8)$$

Для ядра з різкою границею поглинання ($d = 0$) потенціал взаємодії обирається у формі

$$U_c(r) = \begin{cases} -\{V_0 + iW_0\}, & r \leq R \\ 0, & r > R. \end{cases} \quad (2.9)$$

У такому підході формфактори у формулі (2.7) $F_0(q) = 1$, $F_1(q) = 1/3$, а амплітуда розсіювання дорівнює

$$f_c^{(1)}(q) = \frac{2mR^3}{\hbar^2} (V_0 + iW_0) \frac{j_1(qR)}{qR}. \quad (2.10)$$

З наведених формул видно, що врахування розмиття границі поглинання ядра призводить до появи у виразі для амплітуди розсіювання в першому БН (2.4) фактора згаснення $F_0(q)$ (2.7).

Розглянемо поляризацію частинок зі спіном $1/2$ у пружному розсіянні ядрами зі спіном 0 у першому БН. Потенціал взаємодії налітаючої частинки з урахуванням спин-орбітової взаємодії представимо у вигляді

$$U(\mathbf{r}) = U_c(r) + U_s(r)\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}, \quad (2.11)$$

де $U_c(r)$ і $U_s(r)$ – центральна і спин-орбітова частини оптичного потенціалу, $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}$ – скалярний добуток оператора спіна і орбітового моменту налітаючої частинки, $\mathbf{l} = -i\mathbf{n}\frac{d}{d\theta}$, а $\mathbf{n}$ – вектор нормалі до площини реакції, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{k}'}{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|}$.

У формулі (2.11) центральна частина оптичного потенціалу $U_c(r)$ визначається формулою (2.5), а спин-орбітова частина може бути представлена у вигляді

$$U_s(r) = \lambda_\pi^2 (V_{s0} + iW_{s0}) \frac{1}{r} \frac{dg_s(r)}{dr}, \quad (2.12)$$

де V_{s0} , W_{s0} описують величину дійсної та уявної частини спин-орбітового потенціалу $U_s(r)$, відповідно, $\lambda_\pi^2 = (\hbar/m_\pi c)^2 = 2$ фм² – комптонівська довжина хвилі π -мезона, яка традиційно використовується в даних розрахунках.

Відзначимо, що у формулах (2.5) і (2.12) радіальна залежність центральної і спин-орбітової частин потенціалу $g(r)$ і $g_s(r)$ обрана однаковою.

Розглянемо ядро з різкою границею поглинання. У такому підході функції $g(r)$ і $g_s(r)$ обираються у вигляді

$$g(r) = \begin{cases} 1, & r \leq R, \\ 0, & r > R, \end{cases}, \quad \frac{dg(r)}{dr} = -\delta(r-R), \quad (2.13)$$

амплітуда $f^{(1)}(\mathbf{q})$ визначається як сума центральної $f_c^{(1)}(q)$ та спин-орбітової $f_s^{(1)}(q)$ частин, в якій амплітуда $f_c^{(1)}(q)$ визначається формулою (2.10), а амплітуда $f_s^{(1)}(q)$ дорівнює

$$f_s^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} U_2(r)(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{l}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} =$$

$$= -i\lambda_\pi^2 \frac{m(V_{s0} + iW_{s0})}{2\pi\hbar^2} \int d^3r e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \frac{\delta(r-R)}{r} ([\mathbf{r}, \nabla]\boldsymbol{\sigma}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}. \quad (2.14)$$

Виконуючи інтегрування у формулі (2.14), отримуємо

$$f_s^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 2i\lambda_\pi^2 \frac{m(V_{s0} + iW_{s0})R^3}{\hbar^2} k^2 \sin(\theta) \frac{j_1(qR)}{qR} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}. \quad (2.15)$$

Диференціальний переріз та поляризація в такому підході визначаються такими виразами

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2mR^3}{\hbar^2} \right)^2 \left[\frac{j_1(qR)}{qR} \right]^2 G(q), \quad (2.16)$$

$$G(q) = (V_0^2 + W_0^2) \left\{ 1 + \left[\lambda_\pi^2 k q \cos(\theta/2) \right]^2 \frac{V_{s0}^2 + W_{s0}^2}{V_0^2 + W_0^2} \right\}, \quad (2.17)$$

$$P(q) = 2\lambda_\pi^2 (V_0 W_{s0} - V_{s0} W_0) k q \cos(\theta/2) / G(q). \quad (2.18)$$

Відзначимо, що у випадку $V_0 = V_{s0}$, $W_0 = W_{s0}$ поляризація $P(q)$ дорівнює нулю.

Амплітуда $f_s^{(1)}(q)$ для ядра з розмитою границею поглинання дорівнює

$$f_s^{(1)}(q) = -i\lambda_\pi^2 \frac{V_{s0} + W_{s0}}{V_0 + W_0} k q \cos(\theta/2) f_c^{(1)}(q). \quad (2.19)$$

Зазначимо, що при отриманні виразу (2.19) використовувалося співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{d}{dq} \frac{1}{q} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{\exp(iqr + \frac{r-R}{d})}{[1 + \exp(\frac{r-R}{d})]^2} = \\ = R^3 F_0(q) \left[\frac{j_1(qR)}{qR} + \left(\frac{\pi d}{R} \right)^2 F_1(q) j_0(qR) \right]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Диференціальний переріз у такому підході можна представити у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2mR^3}{\hbar^2} \right)^2 (V_0^2 + W_0^2) \times \\ \times \left\{ 1 + \frac{\tilde{V}_0^2 + \tilde{W}_0^2}{V_0^2 + W_0^2} [\gamma k q \cos(\theta/2)]^2 \right\} |S(q)|^2, \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$S(q) = F_0(q) \left[\frac{j_1(qR)}{qR} + \left(\frac{\pi d}{R} \right)^2 F_1(q) j_0(qR) \right]. \quad (2.22)$$

Можна показати, що у наближенні $d \ll R$ розрахована поляризація збігається з виразом (2.18) і не залежить від величини розмиття ядерної поверхні. Підкреслимо, що поляризація частинок зі спином $1/2$, згідно з формулою (2.18), є знакопостійною функцією кута розсіювання, що суперечить експериментальним даним і є недоліком розрахунків, що виконуються у першому БН.

3. Амплітуда розсіювання частинок ядрами у другому БН (центральна взаємодія)

Врахувавши в правій частині виразу (2.2) другий доданок, знайдемо амплітуду пружного розсіювання $f^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ у другому БН

$$f^{(2)}(\mathbf{q}) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' e^{-ik'\mathbf{r}'} U(\mathbf{r}') G_0^{(+)}(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) U(\mathbf{r}) e^{ik\mathbf{r}}. \quad (3.1)$$

Для ядра з різкою границею поглинання ($d = 0$) потенціал взаємодії (2.9) у тривимірному просторі постійний і відмінний від нуля тільки усередині сфери радіуса R із центром у початку координат. Зробивши заміну змінних $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}$, для центрального потенціалу взаємодії у другому БН одержуємо

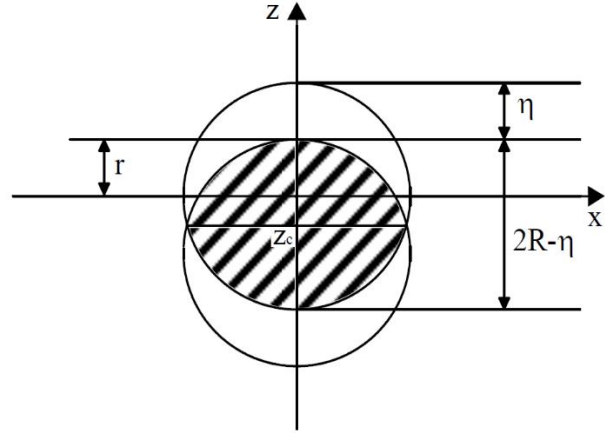
$$f_c^{(2)}(\mathbf{q}) = \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^2 \int d^3\eta \frac{\exp(-ik'\boldsymbol{\eta} + ik\boldsymbol{\eta})}{\eta} I_1(q), \quad (3.2)$$

$$I_1(q) = \int d^3r U(r) U(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}|) e^{iq\mathbf{r}}. \quad (3.3)$$

Виберемо систему координат, у якій вектор $\boldsymbol{\eta} = \eta \mathbf{z}_0$ спрямований уздовж осі z , а $\mathbf{z}_0$ – одиничний вектор. Підінтегральний вираз у формулі (3.3) відрізняється від нуля тільки в області простору, в якій перетинаються дві сфери радіуса R , зміщені одна відносно одної на величину η уздовж осі z . Іншими словами, область інтегру-

вання у формулі (3.3) являє собою двоопуклу лінзу, утворену перетинанням двох сфер (рисунк)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + (z + \eta)^2 = R^2. \quad (3.4)$$



Перетин площинами $y = 0$ фігури, утвореної перетинанням двох однакових сфер радіуса R .

Ця лінза є фігурою обертання навколо осі z заштрихованої області на рисунку. Товщина лінзи в центрі дорівнює $2R - \eta$. При $\eta = 0$ сфери збігаються, тобто ми маємо одну сферу радіуса R . Відзначимо, що $\eta \leq 2R$. Якщо $\eta \geq 2R$, $I_1(q) = 0$ (сфери не перетинаються).

Інтеграл (3.3) представимо у формі

$$I_1(q) = U_0^2 \int_{-b}^b dx e^{iq_x x} \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy e^{iq_y y} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}-R+r} dz e^{iq_z z}, \quad (3.5)$$

де враховано, що центральна частина лінзи обмежена колом, тобто $x^2 + y^2 =$

$$= R^2 - \frac{1}{4}(R-r)^2 = b^2, \quad \text{і введено позначення}$$

$$U_0 = V_0 + iW_0.$$

Виконуючи інтегрування у формулі (3.5), отримуємо

$$I_1(q) = 8U_0^2 \exp\left[-\frac{1}{2}iq_z(R-r)\right] \int_0^b dx \cos(iq_x x) \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \cos(iq_y y) \frac{\sin q_z(\sqrt{R^2-x^2-y^2} - \frac{R-r}{2})}{q_z}. \quad (3.6)$$

В області середніх енергій, де можна використовувати представлений підхід, величина поздовжньої складової переданого імпульсу q_z мала. Тому у формулі (3.6) цю величину можна спрямувати до нуля

$$\lim_{q_z \rightarrow 0} \frac{\sin q_z \left(\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \frac{R-r}{2} \right)}{q_z} =$$

$$\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} - \frac{R-r}{2}. \quad (3.7)$$

У результаті отримуємо

$$I_1(q) = 8U_0^2 \left\{ I_3 - \frac{1}{2}(R-r)I_2 \right\}, \quad (3.8)$$

$$I_2 = \int_0^b dx \cos(iq_x x) \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \cos(iq_y y), \quad (3.9)$$

$$I_3(q) = \int_0^b dx \cos(iq_x x) \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \cos(iq_y y) \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}. \quad (3.10)$$

Переходячи до полярних координат, вираз для інтегралу I_2 представимо у вигляді

$$I_2(q) = \int_0^b d\rho \rho \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos(q_x \rho \cos \varphi) \cos(q_y \rho \sin \varphi), \quad (3.11)$$

де $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $0 \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

Розкладаючи величину $\cos(q_x \rho \cos \varphi)$ у ряд, отримуємо

$$I_2(q) = \int_0^b d\rho \rho \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (q_x \rho)^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos(q_y \rho \sin \varphi) \cos^{2n} \varphi. \quad (3.12)$$

Використовуючи формулу Пуассона

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \cos(q_y \rho \sin \varphi) \cos^{2n} \varphi = \frac{\pi}{2} \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} J_n(q_y \rho), \quad (3.13)$$

інтеграл I_2 представимо у вигляді

$$I_2(q) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{q_x^{2n}}{q_y^n} \int_0^b d\rho \rho^{n+1} J_n(q_y \rho). \quad (3.14)$$

Представимо функцію Бесселя у формулі (3.14) у вигляді ряду

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}. \quad (3.15)$$

У такому підході інтеграл I_2 дорівнює

$$I_2(q) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{2^n n! m! (n+m)!} \left(\frac{q_x^2}{q_y}\right)^n \int_0^b d\rho \rho^{n+1} \left(\frac{q_y \rho}{2}\right)^{2m+n}. \quad (3.16)$$

Після виконання інтегрування одержуємо

$$I_2(q) = \frac{\pi}{4} b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m+1)!} \left(\frac{b}{2}\right)^{2(n+m)} \frac{q_x^{2n}}{n!} \frac{q_y^{2m}}{m!}. \quad (3.17)$$

Симетрія виразу у формулі (3.17) дає можливість перебудувати подвійну суму в одинарну, в результаті чого отримуємо

$$I_2(q) = \frac{\pi b^2}{4} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s b^{2s}}{(s+1)! s!} \left(\frac{q}{2}\right)^{2s}, \quad (3.18)$$

де $s = n + m$, $q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$ – переданий імпульс.

Доведення перебудови суми у формулі (3.17) полягає у порівнянні перших членів обох сум і подальшому використанні методу математичної індукції.

Аналогічні розрахунки можна виконати для інтеграла I_3 у формулі (3.10). У результаті отримуємо

$$I_3(q) = \frac{\pi}{2} b^2 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{n! m! (n+m)!} \frac{q_x^{2n} q_y^{2m}}{4^{n+m}} C_{n+m}(b), \quad (3.19)$$

де коефіцієнти $C_{n+m}(b) \equiv C_s(b)$ дорівнюють

$$C_s(b) = \int_0^b d\rho \rho^{2s+1} \sqrt{R^2 - \rho^2} = R^{2s+3} \int_{\eta/(2R)}^1 du u^2 (1-u^2)^s. \quad (3.20)$$

Перебудова подвійної суми у формулі (3.19) дає змогу отримати такий вираз для інтеграла $I_3(q)$

$$I_3(q) = \frac{\pi}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s C_s(b)}{s! s!} \left(\frac{q}{2}\right)^{2s}. \quad (3.21)$$

Враховуючи співвідношення (3.8), отримуємо

$$I_1(q) = 4\pi U_0^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! s!} \left(\frac{q}{2}\right)^{2s} \left[C_s(b) - \frac{(R-r)}{4(s+1)} b^{2s+2} \right]. \quad (3.22)$$

Підставляючи функцію $I_1(q)$ у формулу (3.2), для центральної амплітуди пружного розсіяння у другому БН отримуємо

$$f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = 4\pi U_0^2 \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! s!} \left(\frac{q}{2}\right)^{2s} D(s), \quad (3.23)$$

$$D(s) = \int d^3\eta \frac{\exp(-i\mathbf{k}'\eta + i\mathbf{k}\eta)}{\eta} \times \left[C_s(b) - \frac{\eta}{4(s+1)} \left(R^2 - \frac{\eta^2}{4}\right)^{s+1} \right]. \quad (3.24)$$

Інтегрування по кутах у формулі (3.24) і перехід до безрозмірної змінної $\eta = Rv$ дає змогу отримати таку величину для функції $D(s)$

$$D(s) = D_1(s) + D_2(s), \quad (3.25)$$

$$D_1(s) = \frac{2\pi i}{k} R^{2s+4} \times \left[\int_0^1 dv \int_{v/2}^1 du u^2 (1-u^2)^s - \frac{1}{4(s+1)} \int_0^1 dv v \left(1 - \frac{v^2}{4}\right)^{s+1} \right], \quad (3.26)$$

$$D_2(s) = -\frac{2\pi i}{k} R^{2s+4} \int_0^1 dv e^{2ikRv} \times$$

$$\times \left[\int_{v/2}^1 du u^2 (1-u^2)^s - \frac{v}{4(s+1)} \left(1 - \frac{v^2}{4}\right)^{s+1} \right]. \quad (3.27)$$

Виконуючи інтегрування у формулах (3.26) і (3.27), знаходимо

$$D_1(s) = \frac{\pi i}{k(s+1)(s+2)} R^{2s+4} \left[1 - \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \frac{du}{u^2} (1-u^2)^{s+2} \right], \quad (3.28)$$

$$D_2(s) = -\frac{2\pi i}{k} R^{2s+4} \left\{ \frac{e^{2ikR}}{2ikR} \left[\int_{1/2}^1 du u^2 (1-u^2)^s - \frac{1}{4(s+1)} \left(\frac{3}{4}\right)^{s+1} \right] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2ikR} \int_0^1 du u^2 (1-u^2)^s + \frac{1}{2ikR} \int_0^1 dv e^{2ikRv} \left[\left(\frac{v}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{4}\right)^s + \frac{1}{4(s+1)} \left(1 - \frac{v^2}{4}\right)^{s+1} - \frac{v^2}{8} \left(1 - \frac{v^2}{4}\right)^s \right] \right\}. \quad (3.29)$$

В області енергій, що розглядаються, справедливе співвідношення $kR \gg 1$. Тоді величина $D_2(s)$ виявляється незначною і нею можна знехтувати.

Використовуючи формулу (3.15) та роблячи в (3.28) заміну змінних $1-u^2 = t^2$, центральну частину амплітуди пружного розсіювання у другому БН представимо у вигляді

$$f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{i}{k} \left(\frac{2mU_0 R}{\hbar^2 q} \right)^2 \times \left[J_2(qR) - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{1-t^2} J_2(qRt) \right]. \quad (3.30)$$

Наявність циліндричних функцій Бесселя у формулі (3.30) є наслідком того, що у наближенні $q_z = 0$ виникає аксіальна симетрія. У такому підході функції Бесселя відповідають за осциляції амплітуди $f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ при збільшенні кута розсіювання.

Формула для амплітуди (3.30) отримана для потенціалу з різкою границею поглинання. Врахування розмиття ядерної поверхні при використанні потенціалу у формі Вудса - Саксона призводить до появи в амплітуді розсіювання в першому БН фактора згаснення $F_0(q)$ (2.7). У хорошому наближенні ефект розмиття ядерної поверхні в другому БН можна врахувати, помноживши амплітуду (3.30) на фактор згаснення $F_0(q)$ [8].

Відзначимо, що амплітуда $f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ для Ермітового потенціалу є чисто уявною, в той час як амплітуда $f_c^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ є дійсною величиною.

Цей факт є суттєвим недоліком першого БН і несумісний з оптичною теоремою. Іншими словами, у цьому випадку область, у якій дійсний потенціал взаємодії суттєво відрізняється від нуля, діє як джерело частинок. Крім того, при цьому поляризація частинок зі спином $1/2$ у пружному розсіянні дорівнює нулю.

4. Поляризація нуклонів у другому БН

Радіальна залежність феноменологічного оптичного потенціалу подібна до радіальної залежності ядерної густини. Це означає, що величина оптичного потенціалу швидко змінюється в інтервалі

$$R - \frac{1}{d} < r < R + \frac{1}{d}, \quad (4.1)$$

де R і d – радіус і ширина розмиття ядерної поверхні.

Ця обставина є особливо важливою для опису поляризаційних спостережуваних частинок зі спінами, оскільки спін-орбітова взаємодія містить похідну від потенціалу, яка здебільшого не дорівнює нулю в області (4.1). Тому поведінка оптичного потенціалу в області (4.1) повністю відповідає за величини поляризаційних спостережуваних характеристик розсіювання.

Враховуючи те, що для більшості ядер (крім декількох найлегших) виконується нерівність $d \ll R$, можна зробити висновок, що поведінка поляризаційних спостережуваних характеристик розсіювання повністю визначається поведінкою оптичного потенціалу у вузькій поверхневій області ядра шириною d .

Потенціал взаємодії налітаючої частинки з урахуванням спін-орбітової взаємодії визначається формулою (2.11), в якій величини $U_c(r)$ і

$U_s(r)$ можна представити у вигляді

$$U_c(r) = -V_0 \left\{ g_v(r) + i\zeta g_w(r) - 4id_w \zeta_{0s} \frac{dg_w(r)}{dr} \right\}, \quad (4.2)$$

$$U_s(r) = \lambda_\pi^2 \frac{V_s(1+i\zeta_s)}{r} \frac{dg_s(r)}{dr}. \quad (4.3)$$

У наведених формулах $\zeta = W_0 / V_0$, $\zeta_{0s} = W_{0s} / V_0$, $\zeta_s = W_s / V_s$, а параметри V_0 , W_0 , W_{0s} , V_s , W_s визначають глибини дійсної та уявної частин оптичного потенціалу. Зазначимо, що як видно з формул (4.2), (4.3), у подальших розрахунках буде врахована відмінність у радіальній залежності центральної і спин-орбітової частин потенціалу $g_{j\{v,w\}}(r)$ і $g_s(r)$. Також підкреслимо, що останній доданок у формулі (4.2) введено для коригування поведінки потенціалу $U_c(r)$ у поверхневій області.

Амплітуда пружного розсіяння у другому БН визначається формулою (3.1). Спин-орбітову частину інтегралу, що входить у цю формулу, для

ядра з різкою границею поглинання можна представити у вигляді

$$I = \int d^3\eta d^3r \frac{\exp(i\mathbf{q}\mathbf{r} - i\mathbf{k}'\boldsymbol{\eta} + ik\eta)}{\eta} \frac{\delta(r-R)}{r} g(|\mathbf{r} + \boldsymbol{\eta}|), \quad (4.4)$$

Представимо вектор $\mathbf{r}$ у вигляді $\mathbf{r} = r\boldsymbol{\zeta}$ ($|\boldsymbol{\zeta}| = 1$), а координату ζ_z направимо вздовж вектора $\mathbf{q}$. Тоді отримуємо

$$I = R \int_0^\pi d\theta \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \exp(iR\mathbf{q}\boldsymbol{\zeta}) I_1, \quad (4.5)$$

$$I_1 = \int d^3\eta \frac{\exp(-i\mathbf{k}'\boldsymbol{\eta} + ik\eta)}{\eta} g(|R\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\eta}|). \quad (4.6)$$

Оберемо систему координат, в якій z -компонента вектора $\boldsymbol{\eta}$ направлена вздовж вектора $\boldsymbol{\zeta}$ ($\boldsymbol{\eta} = R\tau(\sin \Psi \cos \alpha, \sin \Psi \sin \alpha, \cos \Psi)$, $|\boldsymbol{\eta}| = R\tau$). Використовуючи співвідношення $|R\boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{\eta}|^2 = R^2$, знаходимо $\tau = -2 \cos \Psi$ ($0 \leq \tau \leq 1$).

У такому підході для величини I_1 отримуємо

$$\begin{aligned} I_1 &= R^2 \int_{\pi/2}^\pi d\Psi \sin \Psi \int_0^{-2R \cos \Psi} d\tau \tau \int_0^{2\pi} d\alpha \exp(-i\mathbf{k}'\boldsymbol{\eta} + ik\eta) = \\ &= R^2 \int_{\pi/2}^\pi d\Psi \sin \Psi \int_0^{-2R \cos \Psi} d\tau \tau e^{ikR\tau} \int_0^{2\pi} d\alpha \exp\{iR\tau(k_x \sin \Psi \cos \alpha + k_y \sin \Psi \sin \alpha + k_z \cos \Psi)\} = \\ &= R^2 \int_{\pi/2}^\pi d\Psi \sin \Psi \int_0^{-2R \cos \Psi} d\tau \tau \exp\{iR\tau(k + k_z \cos \Psi)\} I_2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\alpha \exp(ia \cos \alpha + ib \sin \alpha), \quad a = k_x \sin \Psi, \quad b = k_y \sin \Psi. \quad (4.8)$$

Інтеграл I_2 представимо у вигляді

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^\pi d\alpha \{ \exp(ia \cos \alpha + ib \sin \alpha) + \exp(-ia \cos \alpha - ib \sin \alpha) \} = \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(ib)^2}{n!} \int_0^\pi d\alpha e^{ia \cos \alpha} \sin^n \alpha + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-ib)^2}{n!} \int_0^\pi d\alpha e^{-ia \cos \alpha} \sin^n \alpha. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Тоді, скориставшись формулою Пуассона для гамма-функції $\Gamma(x)$, одержуємо

$$I_2 = \sqrt{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{(ib)^2}{n!} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(a/2)^{n/2}} J_{\frac{n}{2}}(a) + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-ib)^2}{n!} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{(-a/2)^{n/2}} J_{\frac{n}{2}}(-a) \right\}. \quad (4.10)$$

Використовуючи властивості функцій $\Gamma(x)$ і $J_{\frac{n}{2}}(z)$, представимо інтеграл I_2 у вигляді

$$I_2 = 2\pi J_0 \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sin \Psi \right). \quad (4.11)$$

При одержанні формули (4.11) враховано, що внутрішній інтеграл I_3 у виразі (4.5) дорівнює

$$I_3 = \int_0^{2\pi} d\varphi \exp(iR\mathbf{q}\zeta) = 2\pi (\exp iRq_z \cos \theta) J_0 \left(R\sqrt{q_x^2 + q_y^2} \sin \theta \right). \quad (4.12)$$

Підставляючи (4.11) і (4.12) у формулу (4.7), отримуємо

$$I = (2\pi)^2 R^3 \int_{\pi/2}^{\pi} d\Psi \sin \Psi J_0 \left(\sqrt{k_x^2 + k_y^2} \sin \Psi \right) \int_0^{-2R \cos \Psi} d\tau \tau \exp\{iR\tau(k + k_z \cos \Psi)\} \times \\ \times \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta (\exp iRq_z \cos \theta) J_0 \left(R\sqrt{q_x^2 + q_y^2} \sin \theta \right). \quad (4.13)$$

Виконуючи інтегрування у формулі (4.13), маємо

$$I = (2\pi)^{5/2} \frac{R^2}{q} J_{\frac{1}{2}}(qR) = \frac{2(2\pi)^2 R^3}{\sqrt{qR}} j_0(qR). \quad (4.14)$$

Остаточно з урахуванням відмінностей у радіальній залежності центральної і спин-орбітової частин потенціалу $g_{j\{v,w\}}(r)$ і $g_s(r)$ для амплітуди $\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ (2.1) отримуємо

$$\hat{F}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \{f_c^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\} + \{f_s^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') + f_s^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')\}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}), \quad (4.15)$$

$$f_c^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{2mV_0}{\hbar^2} \left\{ F_{d_v}(q) R_v^3 \frac{j_1(qR_v)}{qR_v} + i\zeta F_{d_w}(q) R_w^3 \frac{j_1(qR_w)}{qR_w} - 4id_w \zeta_{0s} F_{d_w}(q) R_w^2 j_0(qR_w) \right\}, \quad (4.16)$$

$$f_s^{(1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = i\lambda_{\pi}^2 F_{d_s}(q) \frac{2mR_s^3 V_s}{\hbar^2} (1 + i\zeta_s) k^2 \sin \theta \frac{j_1(qR_s)}{qR_s}, \quad (4.17)$$

$$f_c^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = \frac{i}{k} \left(\frac{2mV_0}{\hbar^2 q} \right)^2 \left\{ F_{d_v}(q) R_v^2 I_v + \frac{i}{2} \zeta F_{d_{vw}}(q) R_{vw}^2 I_{vw} - \zeta^2 F_{d_w}(q) R_w^2 I_w \right\}, \quad (4.17)$$

$$I_j = \left[J_2(qR_j) - \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dt}{1-t^2} J_2(qR_j t) \right], \quad j = v, vw, w; \quad R_{vw} = \frac{1}{2}(R_v + R_w), \quad d_{vw} = \sqrt{d_v d_w}, \quad (4.18)$$

$$f_s^{(2)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -4iF_{d_s}(q) R_s \lambda_{\pi}^2 \frac{m^2}{q\hbar^4} k \sin \theta V_s (1 + i\zeta_s) \left(F_{d_v}(q) R_v^2 j_1(qR_v) + i\zeta F_{d_w}(q) R_w^2 j_1(qR_w) \right), \quad (4.19)$$

де фактор згаснення $F_{d_j}(q)$ визначається формулою (2.7).

5. Висновки

На основі БН розроблено підхід, що дає змогу вивчати процеси взаємодії частинок з ядрами в області проміжних енергій. На відміну від підходу, представленому в роботах [1, 2], де аналітичні вирази для розрахунків поляризаційних

спостережуваних пружного розсіяння протонів ядрами було отримано з використанням розкладу потенціалу взаємодії за малими доданками, в даному підході розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не використовувався.

При отриманні аналітичних виразів для амплітуд пружного розсіяння протонів ядрами використовувалося друге БН з потенціалом у формі Вудса - Саксона, а також з потенціалом взаємодії для ядра з різкою границею поглинання ($d = 0$), який коригувався для врахування розмиття ядерної поверхні.

Використання другого БН зумовлене тим, що поляризація нуклонів при їхньому розсіянні ядрами, розрахована у першому БН з Ермітовим потенціалом, дорівнює нулю [1, 2]. Зазначимо, що в даних роботах представлено детальне порівняння розрахунків, виконаних на основі першого та другого БН і доведено, що використання другого БН помітно впливає на поведінку поляризаційних спостережуваних розсіяння.

Також зазначимо, що БН є основою для побудови загально прийнятої оптичної моделі, не є її альтернативою і вони можуть використовуватися незалежно, але перевага використаного в даній роботі підходу полягає у можливості викорис-

тання отриманих аналітичних виразів для амплітуд та спостережуваних характеристик пружного розсіяння частинок ядрами, які неможливо отримати в оптичній моделі.

Основним результатом представленої роботи є отримання аналітичних виразів для розрахунків представлених амплітуд пружного розсіяння високоенергетичних сильно взаємодіючих частинок з ядрами, в яких розклад потенціалу взаємодії за малими доданками не використовувався.

Друге БН у даний час зазвичай застосовується для вивчення взаємодії електронів з ядрами. Представлений у даній роботі підхід для вивчення взаємодії високоенергетичних сильно взаємодіючих частинок з ядрами раніше не використовувався.

Зазначимо, що застосування результатів представлених розрахунків, а також порівняння їх з існуючими розрахунками та наявними експериментальними даними буде наведено в наших наступних публікаціях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. Yu.A. Berezhnoy, V.P. Mikhailyuk. Polarization of protons in the optical model. *Chinese Phys. C* 41(2) (2017) 024102.
2. A.V. Babak, Yu.A. Berezhnoy, V.P. Mikhailyuk. Born approximation for polarization observables at the scattering of protons by ^{40}Ca nuclei. *Ukr. J. Phys.* 65(5) (2020) 369.
3. P.E. Hodgson. *Nuclear Reactions and Nuclear Structure*. (The International series of monographs on physics) (Oxford, Clarendon Press, 1971) 661 p.
4. P.E. Hodgson. *The Nucleon Optical Model* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 1994) 432 p.
5. H. Feshbach. A unified theory of nuclear reactions, II. *Ann. Phys.* 281 (2000) 519.
6. A.I. Akhiezer, Yu.A. Berezhnoy, V.V. Pilipenko. *Nuclear Diffraction*. I.M. Khalatnikov (Ed.) Ser. Phys. Rev. 18(3) (1997) 147 p.
7. Ю.А. Бережной, В.П. Михайлюк, В.В. Пилипенко. *Дифракционные ядерные процессы* (Киев: Наук. думка, 2014) 258 с. / Yu.A. Berezhnoi, V.P. Mikhailyuk, V.V. Pilipenko. *Diffraction Nuclear Processes* (Kyiv: Naukova Dumka, 2014) 258 p. (Rus)
8. W.E. Frahn. Wave mechanics of heavy ion collisions. In: *Heavy-Ion, High Spin States and Nuclear Structure*. Vol. 1. Proc. of the Int. Extended Seminar, Trieste, Italy, 17 Sep. - 21 Dec. 1973 (Vienna: International Atomic Energy Agency, 1975) p. 157.

Yu. A. Berezhnoy¹, V. A. Zolotarev², V. P. Mikhailyuk^{3,*}

¹ V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine

² National Scientific Center "Kharkiv Institute of Physics and Technology", National Academy of Sciences of Ukraine, Kharkiv, Ukraine

³ Institute for Nuclear Research, National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

*Corresponding author: mikhailyuk@kinr.kiev.ua

INTERACTION OF PROTONS WITH NUCLEI IN THE BORN APPROXIMATION (I)

Based on the Born approximation an approach that allows studying the processes of particle-nucleus interaction in the intermediate energy region has been developed. In contrast to the approach, presented in our previous papers, where analytical expressions for polarization observables for elastic proton scattering by nuclei were obtained using the expansion of the potential into the series up to the first significant terms, in this approach, the decomposition of such potential was not used. When obtaining analytical expressions for the amplitudes for elastic scattering of protons by nuclei, the second Born approximation with a potential in the Woods - Saxon form, as well as with the potential with a sharp absorption boundary, which was corrected to take into account the blurring of the nuclear surface, are used.

Keywords: Born approximation, polarization observables.

Надійшла / Received 17.02.2025