

Теория экстремального поля и ее практические приложения

Установлено, что для любых двух точек поверхностного поля отношение его значений в этих точках имеет объективные пределы, не зависящие от свойств источника поля. На основании данной закономерности предложена так называемая теория экстремального поля. Приведены примеры ее практического применения в виде методик экстремального прогноза, определения погрешности картограмм и выбора объема измерений полей излучений поверхностного типа.

Материалы статьи могут служить развитию методологической основы дозиметрии и быть полезными при решении вопросов нормирования и стандартизации в области радиационной защиты.

Ключевые слова: предельный закон; экстремальное поле; пространственный прогноз; картограмма; объем измерений.

І. Б. Снісар

Теорія екстремального поля та її практичне застосування

Встановлено, що для будь-яких двох точок поверхневого поля відношення його значень у цих точках має об'єктивні границі, які не залежать від властивостей джерела поля. На підставі цієї закономірності запропоновано так звану теорію екстремального поля. Наведено приклади практичного застосування запропонованої теорії у вигляді методик екстремального прогнозу, визначення похибки картограм і вибору обсягу вимірювань полів випромінювань поверхневого типу.

Матеріали статті можуть служити розвитку методологічної основи дозиметрії та бути корисними у вирішенні питань нормування та стандартизації у сфері радіаційного захисту.

Ключові слова: граничний закон; екстремальне поле; просторовий прогноз; картограма; обсяг вимірювань.

В статье [1] указывалось на необходимость исследования полей излучений поверхностного типа, возникающих в пространстве над материальной поверхностью с распределенными на ней радиоактивными веществами (излучающей поверхностью), поскольку такие поля являются одним из наиболее распространенных факторов радиационной опасности для человека в условиях современных технологий. В той же статье было высказано предположение о возможности разработки различных методик в области радиационной безопасности и дозиметрии, которые могут быть основаны на факте существования объективных пределов пространственной неоднородности этих полей, обнаруженном в результате исследования их математической модели и выраженном соотношением (предельным законом)

$$-k \leq K \leq k, \quad (1)$$

где $K = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \left(= \frac{\partial \ln \phi}{\partial \lambda} \right)$ — линейный коэффициент неоднородности поля излучения ϕ по любому направлению λ , па-

раллельному излучающей поверхности; $k = \frac{1}{H} \left(1 + \frac{\mu H}{\sqrt{2}} \right)$ —

предел значений $|K|$ на расстоянии H от излучающей поверхности в разреженной (в частности, воздушной) среде, взаимодействие которой с излучением характеризуется линейным коэффициентом ослабления.

В настоящей статье предпринимается попытка определить основные положения теории экстремального поля и показать ее возможные практические приложения.

Интегральная форма предельного закона. Воспользовавшись пространственной инвариантностью предельного закона, запишем представляющее его неравенство (1) для неоднородности поверхностного поля вдоль некоторой

прямой линии l на плоскости $z = H$ (при этом неоднородность выражается по формуле $K = \frac{\partial \ln \phi}{\partial \lambda_l}$, где λ_l направ-

ление прямой l в данной ее точке). Затем проинтегрируем неравенство по этой линии, основываясь на теореме об интегрировании неравенств [2] и используя соотношение $K dl = \frac{\partial \ln \phi}{\partial \lambda_l} dl = d(\ln \phi)$, где dl — элемент длины линии интегрирования.

В результате интегрирования и последующего экспоненцирования неравенства получим

$$e^{-k|CM|} \leq \frac{\phi(M)}{\phi(C)} \leq e^{k|CM|}, \quad (2)$$

где C и M — начальная и конечная точки интегрирования.

Полученное неравенство (2) показывает, что для любых двух точек поверхностного поля отношение его значений в этих точках объективно ограничено, причем пределы данного ограничения не зависят от свойств источника поля. Из неравенства (2) вытекает важное следствие: если в некоторой точке C поверхностное поле имеет известное значение $\phi(C)$, то для значения поля в любой другой точке M справедлива оценка

$$\phi(C) e^{-k|CM|} \leq \phi(M) \leq \phi(C) e^{k|CM|}. \quad (3)$$

Так как неравенство (3) получено интегрированием предельного закона (1), оно представляет собой этот же закон в интегральной форме.

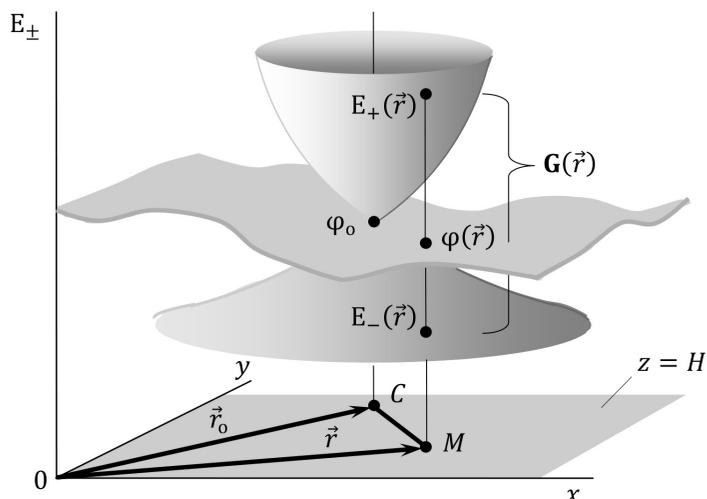


Рис. 1. К понятию экстремального поля

Экстремальное поле. Если неравенство (3) записать в полярной системе координат (на плоскости $z = H$), его крайние части могут быть представлены в виде

$$E_{\pm}(\vec{r}) = \varphi_0 e^{\pm k|\vec{r} - \vec{r}_0|}, \quad (4)$$

где \vec{r}_0 и \vec{r} — полярные радиусы-векторы узловой точки C и точки наблюдения M соответственно; $\varphi_0 \equiv \varphi(C)$ — значение поля в узловой точке. Учитывая, что величина $E_{\pm}(\vec{r})$ определена в одной из областей пространства (на плоскости), ее можно рассматривать как поле [2], а поскольку в неравенстве (3) эта величина соответствует предельным («экстремальным») значениям полей, ее можно называть *экстремальным* полем. Составляющая экстремального поля (4), описываемая функцией $E_+(\vec{r})$, соответствует так называемому максимальному полю, а составляющая, описываемая функцией $E_-(\vec{r})$, — минимальному полю.

Графически экстремальное поле представляет собой поверхность в виде двух экспоненциальных конусов, описываемых функциями $E_-(\vec{r})$ и $E_+(\vec{r})$. Внешняя область конусов образует область разрешенных значений всех поверхностных полей излучений $\varphi(\vec{r})$, имеющих в узловой точке C значение φ_0 . Расстоянием между конусами для заданной точки наблюдения $M(\vec{r})$ определяется интервал разрешенных значений (ИРЗ) поля в этой точке $\mathbf{G}(\vec{r}) = [E_-(\vec{r}); E_+(\vec{r})]$ (рис. 1).

Понятие экстремального поля может быть распространено на случай множества узловых точек. Если известны значения поля φ_i в некоторых n точках $C_i(\vec{r}_i)$, то с каждой из них можно связать свое экстремальное поле $E_{\pm}^{(i)}(\vec{r}) = \varphi_i e^{\pm k|\vec{r} - \vec{r}_i|}$ и соответствующий ИРЗ $\mathbf{G}_i(\vec{r}) = [E_-^{(i)}(\vec{r}); E_+^{(i)}(\vec{r})]$ для любой точки наблюдения $M(\vec{r})$. Таким образом, поле $\varphi(\vec{r})$ в каждой точке оказывается ограниченным n интервалами $\mathbf{G}_i(\vec{r})$, пересечением которых определяется результирующий ИРЗ $\tilde{\mathbf{G}}(\vec{r}) = \bigcap_{i=1}^n \mathbf{G}_i(\vec{r})$. Границы результирующего ИРЗ, в свою очередь, соответствуют значениям так называемого многоузлового экстремального поля

$$\tilde{E}_{\pm}(\vec{r}) = \max_{\min} \left(\bigcap_{i=1}^n \mathbf{G}_i(\vec{r}) \right). \quad (5)$$

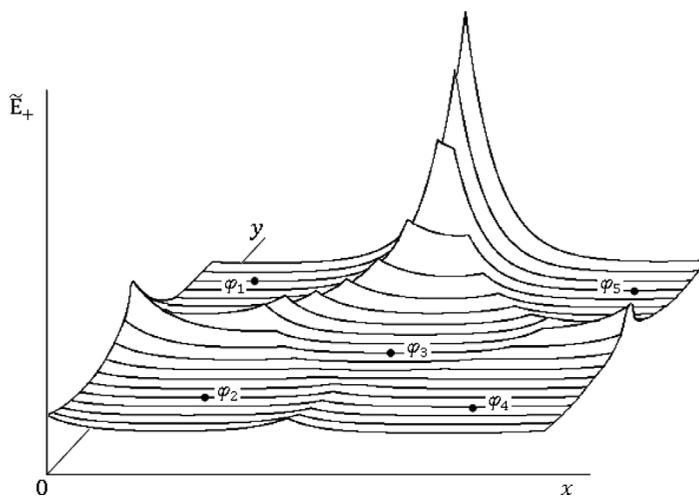


Рис. 2. Пример диаграммы 5-узлового максимального поля

На рис. 2 показан пример диаграммы многоузлового максимального поля $\tilde{E}_{\pm}(\vec{r}) = \max \left(\bigcap_{i=1}^5 \mathbf{G}_i(\vec{r}) \right)$, определяемого известными значениями φ_i в пяти узловых точках ($i = 1...5$). В отличие от диаграммы, изображенной на рис. 2, диаграмма соответствующего минимального поля $\tilde{E}_{-}(\vec{r}) = \min \left(\bigcap_{i=1}^5 \mathbf{G}_i(\vec{r}) \right)$ ограничена сверху, при этом ее пиковые значения совпадают с узловыми значениями φ_i .

С физической точки зрения экстремальное поле можно интерпретировать как предельно возможную конфигурацию всех полей излучений поверхностного типа с фиксированными значениями в одних и тех же узловых точках.

Экстремальный прогноз поверхностных полей излучений. Определение ИРЗ поверхностного поля для некоторой точки наблюдения представляет собой пространственный прогноз поля в этой точке. Поскольку прогноз касается именно предельных значений поля, то, по существу, он является экстремальным. Исходными данными для такого прогноза служат известные, например по результатам измерений, значения поверхностного поля в отдельных точках (узловые значения).

Наиболее простой экстремальный прогноз основывается на знании величины поля в его единственной точке. В этом случае удобно использовать кратность экстремального (максимального или минимального) поля

$$\theta = \left(\frac{E_{\pm}}{\varphi_0} \right)^{\pm 1} = e^{k\rho}, \quad (6)$$

которая показывает, в какое максимальное число раз значение поля на расстоянии $\rho = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ от заданной (узловой) точки C может быть больше («+») или меньше («-»), чем его значение φ_0 в этой точке. Результаты расчета величины θ по формуле (6) для различных значений ρ и σ приведены в табл. 1.

Данные табл. 1 показывают, что по мере удаления от заданной точки максимально (минимально) возможное значение поля быстро увеличивается (уменьшается). Например, если поле рассматривается на высоте $H = 1$ м над излучающей поверхностью и характеризуется при этом $\sigma = 0,6$,

Таблица 1. Кратность экстремального поля θ на расстоянии ρ , м, от узловой точки при различных значениях параметра $\sigma = \mu H$

σ	ρ , м									
	0	0,2H	0,4H	0,6H	0,8H	H	2H	3H	4H	5H
0	1	1,22	1,49	1,82	2,23	2,72	7,39	20,1	54,6	148
0,1	1	1,24	1,53	1,90	2,36	2,92	8,52	24,9	72,6	212
0,2	1	1,26	1,58	1,98	2,49	3,13	9,80	30,7	96,1	301
0,3	1	1,28	1,63	2,08	2,65	3,38	11,4	38,6	130	440
0,4	1	1,29	1,68	2,17	2,81	3,64	13,3	48,3	176	640
0,5	1	1,31	1,73	2,27	2,99	3,93	15,4	60,6	238	934
0,6	1	1,33	1,78	2,38	3,18	4,24	18,0	76,2	323	1371
0,7	1	1,36	1,84	2,49	3,38	4,58	21,0	96,2	441	2020
0,8	1	1,38	1,90	2,61	3,60	4,96	24,6	122	604	2992
0,9	1	1,40	1,96	2,74	3,83	5,37	28,8	154	829	4448
1	1	1,42	2,02	2,88	4,09	5,81	33,8	196	1142	6640

можно ожидать, что на расстоянии $\rho = 2$ м (2H) от заданной точки, на той же высоте, значение мощности дозы поля увеличится (уменьшится) в 18 раз (но не более того).

Погрешность картограмм полей излучений. Наряду с описанным выше экстремальным прогнозом поверхностных полей излучений, другим примером практического применения теории экстремального поля является методика определения погрешности точечных картограмм поверхностных полей излучений.

Построение картограмм полей излучений (радиационной обстановки) — одна из основных задач, решаемых в дозиметрической практике. В широком смысле под картограммой понимается схематическая карта, на которой показывается средняя интенсивность какого-либо явления в пределах выделенных территориальных участков (подчеркнем, что картограммы отображают именно средние величины, поэтому идеальна та картограмма, которая показывает истинные средние значения рассматриваемой величины). В случае полей излучений, на картограмме отображаются значения поля, усредненные в пределах ячеек выбранной сетки измерений. Истинные средние значения поля $\langle \varphi \rangle_i$ для каждой i -й ячейки обычно не известны, поэтому в качестве оценки этих значений используются результаты точечных измерений φ_{oi} в центре ячеек. Поскольку между значениями $\langle \varphi \rangle_i$ и φ_{oi} существует лишь приближенное равенство, возникает погрешность отображения поля излучения на картограмме, которая (погрешность) для одной ячейки равна $\delta_i = (\langle \varphi \rangle_i - \varphi_{oi}) / \varphi_{oi}$.

Согласно теории экстремального поля, для значения φ_i в любой точке i -й ячейки справедлив предельный закон (3), который в принятых выше обозначениях можно записать в виде неравенства $E_-^{(i)} \leq \varphi_i \leq E_+^{(i)}$, где $E_{\pm}^{(i)}$ — функция одноузлового экстремального поля с узловым значением φ_{oi} . Путем интегрирования этого неравенства по площади ячейки (в соответствии с теоремой об интегрировании неравенств [2]) можно перейти к неравенству «средних» $\langle E_- \rangle_i \leq \langle \varphi \rangle_i \leq \langle E_+ \rangle_i$. Тогда, выполнив два эквивалентных

Таблица 2. Максимальная погрешность картограмм поверхностных полей ионизирующих излучений δ_{\pm} , %, в зависимости от шага сетки измерений l , м, и параметра $\sigma \leq \mu H$

l	σ					
	0*	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,1H	+3,8 -3,7	+4,4 -4,2	+5,0 -4,7	+5,6 -5,3	+6,2 -5,8	+6,9 -6,4
0,5H	+21 -17	+24 -19	+28 -21	+32 -23	+36 -26	+40 -28
H	+47 -31	+55 -34	+65 -38	+75 -41	+87 -44	+99 -47
1,5H	+79 -42	+95 -46	+114 -50	+135 -54	+159 -57	+186 -60
2H	+119 -51	+147 -56	+179 -60	+217 -64	+262 -67	+315 -70
2,5H	+170 -59	+213 -63	+267 -67	+331 -71	+411 -74	+508 -77
3H	+233 -65	+300 -69	+384 -73	+491 -77	+627 -79	+800 -82
3,5H	+311 -70	+411 -74	+542 -78	+714 -81	+940 -84	+1241 -86
4H	+411 -74	+557 -78	+756 -81	+1027 -84	+1399 -87	+1913 -89
4,5H	+536 -78	+748 -81	+1046 -84	+1468 -87	+2072 -89	+2941 -91
5H	+694 -81	+997 -84	+1440 -87	+2092 -89	+3062 -91	+4520 -92

*Значение $\sigma = 0$ соответствует случаю крайне разреженных сред, близких к состоянию вакуума.

преобразования последнего неравенства — уменьшение и последующее деление каждой его части на φ_{oi} , — получим $\delta_-^{(i)} \leq \delta_i \leq \delta_+^{(i)}$, где $\delta_{\pm}^{(i)} = (\langle E_{\pm} \rangle_i - \varphi_{oi}) / \varphi_{oi}$ — предельные значения погрешности отображения поля i -й ячейкой картограммы.

Для любой отдельно взятой картограммы величина $\delta_{\pm}^{(i)}$ зависит только от размеров участка поля, отображаемого ячейкой. Поэтому при равномерной сетке измерений (с квадратными ячейками) она одинакова для всех ячеек ($\delta_{\pm} = \delta_{\pm}^{(i)}$) и служит метрологической характеристикой картограммы в целом, имея при этом смысл максимальной погрешности, с которой данная картограмма отображает исследуемое поверхностное поле. Погрешность картограммы можно рассчитать по формуле, полученной в результате описанных математических преобразований:

$$\delta_{\pm} = \frac{2\pi}{(kl)^2} \left(1 + \left(\pm \frac{kl}{\sqrt{\pi}} - 1 \right) e^{\pm k l / \sqrt{\pi}} \right) - 1, \quad (7)$$

где l — шаг сетки измерений, используемой при снятии картограммы поля.

Результаты расчета δ_{\pm} по формуле (7) приведены в табл. 2.

В связи с многообразием целей, для которых могут строиться картограммы полей излучений (например,

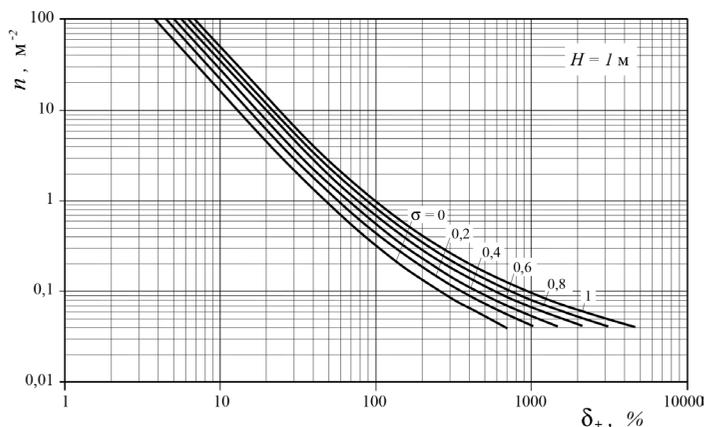


Рис. 3. Плотность точечных измерений n поверхностных полей излучений, обеспечивающая построение картограмм с погрешностью δ_+ .

планирование мероприятий по экранированию полей и дезактивации, оценка объемов радиоактивных отходов и дозовых нагрузок персонала и т. д.), погрешность картограмм может характеризоваться самыми различными значениями. Считается, что приемлемые в дозиметрии погрешности ограничены коэффициентом 3 (т. е. удовлетворяют условию $\delta \leq 300 \%$, если погрешность выражается в процентах) [3]), поэтому, согласно табл. 2, практический интерес представляют собой, прежде всего, те сетки измерений, которые отвечают правилу $l \leq 3H$, так как для них сохраняется объективная возможность выполнения упомянутого условия приемлемой погрешности ($\delta \leq 300 \%$). Такие сетки измерений соответствуют незатемненным ячейкам табл. 2.

Табл. 2 позволяет определить погрешность любой картограммы с равномерной сеткой точечных измерений. Например, если имеется картограмма поверхностного поля гамма-излучения, снятая на высоте $H=1 \text{ м}$ над излучающей поверхностью с шагом сетки $l=3 \text{ м}$ ($l=3H$) при условии $\sigma=0,2$, то по табл. 2 для $\sigma=0,2$ и $l=3H$ находим $\delta_+ = 300 \%$ и $\delta_- = 69 \%$. Полученный результат означает, что истинные средние значения исследуемого поля могут быть выше на 300 % и ниже на 69 % (но не более того), чем значения, показываемые картограммой.

Объем измерений при построении картограмм полей излучений. Данные табл. 2 также позволяют решать задачу выбора объема точечных измерений для корректного снятия картограмм поверхностных полей излучений. Действительно, задав погрешность картограммы δ_+ при известном параметре σ , по табл. 2 можно найти необходимый шаг сетки измерений l . Тогда отношение площади снятия картограммы S к площади одной ячейки l^2 покажет общее количество ячеек картограммы (т. е. точек измерения) $N=S/l^2$, обеспечивающее получение картограммы с заданной погрешностью. В целях табулирования данных целесообразно перейти к величине плотности измерений $n=N/S$, которая показывает количество точек измерения на единицу исследуемой площади. Значения этой величины, в зависимости от погрешности картограммы δ_+ при разных значениях параметра σ для измерений на высоте $H = 1 \text{ м}$, представлены на рис. 3.

Как следует из рис. 3, построение картограмм поверхностных полей излучений более высокой точности требует увеличения числа измерений, причем данная тенденция проявляется тем сильнее, чем меньше величина требуемой погрешности. Так, погрешность картограммы 50 % при $H = 1 \text{ м}$ и $\sigma = 0$ обеспечивается приблизительно при одном измерении на 1 м^2 , а погрешность 9 % — уже при 20 измерениях на той же площади.

Выводы

В статье определены основные положения теории экстремального поля, представленные предельным законом для полей экстремального типа в интегральной форме (2) и понятиями экстремального поля, узловой точки и области/интервала разрешенных значений. Показано, что упомянутая теория может служить основой различных методик в области радиационной безопасности и дозиметрии. В качестве примера предложены методики экстремального прогноза, определения погрешности картограмм и выбора объема измерений полей поверхностного типа. Важной особенностью этих методик является их полная индифферентность к свойствам источников исследуемых полей, а также их простота и практичность.

В целом материалы статьи служат развитию методологической основы дозиметрии и расширяют круг решаемых в ней задач. Также они могут оказаться полезными при решении вопросов нормирования и стандартизации в области радиационной безопасности и защиты.

Список использованной литературы

1. Снисар И. Б. Предел пространственной неоднородности поверхностных полей излучений / И. Б. Снисар // Ядерна та радіаційна безпека. — 2014. — № 2(62). — С. 26–28.
2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — М.: Наука, 1967. — С. 303, 422.
3. Радиационная безопасность. Рекомендации МКРЗ. Публикация 60 / Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1994. — С. 104.

References

1. Snisar, I. B. (2014), "Spatial Inhomogeneity Limit for Surface Radiation Fields" [Predel prostranstvennoi neodnorodnosti poverkhnostnykh polei izlucheni], Yaderna ta radiatsiina bezpeka (Nuclear and Radiation Safety), No. 2(62), pp. 26–28. (Ukr)
2. Bermant, A. F., Aramanovich, I. G. (1967), Brief Course of Mathematical Analysis [Kratkii kurs matematicheskogo analiza], Moscow, Nauka, pp. 303, 422 (Rus).
3. ICRP Recommendations. Radiation Safety, Publication 60, English translation, Energoatomizdat, Moscow (1994), 104 p. (Rus).

Получено 29.11.2014.