

1. *Ричард Кларк*. Третья мировая война: какой она будет? / Кларк Р., Нейк Р. – СПб.: Питер, 2011. – 336 с.: ил.
2. *Системы обработки информации*. Разработка систем. Термины и определения: ДСТУ 2941—94. – (Действительный с 01.01.1996). – К.: Госстандарт Украины. – 1995. – 20 с.
3. *Поспелов Д.А.* Многоагентные системы – настоящее и будущее / Д. А. Поспелов // Информационные технологии и вычислительные системы, № 1, 1998, с.14-21.
4. *Евгениев Г.Б.* Мультиагентные системы компьютерной инженерной деятельности / Г. Б. Евгениев // Информационные технологии, № 4, 2000, с.2-7.
5. *Чекинов С.Г.* Интеллектуальные программные исполнительные устройства (агенты) в системах связи / С. Г. Чекинов // Информационные технологии, № 4, 2001, с.6-11.
6. *Epstein J. V.* Remarks on the foundations of agent-based generative social science / J. V. Epstein // SFI (Santa Fe Institute) Working Paper. DOI:SFI-WP 05-06-024, SFI Working Papers, 2005.
7. *Дадонов А.Г.* Живучесть информационных систем / А.Г. Дадонов, Д.В. Ланде. – К.: Наукова думка, 2011. – 255 с.
8. *Барабаш О.В.* Построение функционально устойчивых распределенных информационных систем / О.В. Барабаш. – К.: НАОУ, 2004. – 226 с.
9. *Стекольников Ю.И.* Живучесть систем / Ю.И. Стекольников. – СПб.: Политехника, 2002. – 155 с.
10. *Черкесов Г.Н.* Методы и модели оценки живучести сложных систем / Г.Н. Черкесов. – М.: Знание, 1987. – 32 с.
11. *Новиков Д.А.* Сетевые структуры и организационные системы / Новиков Д.А. – М.: ИПУ РАН (научное издание). 2003. – 102 с.

Поступила 21.02.2013р.

УДК 519.6

Ю.В. Кравченко, М. Ю. Ракушев, Київ

А-СТІЙКА СХЕМА ЧИСЛОВОГО ІНТЕГРУВАННЯ НА ОСНОВІ ЗМІЩЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Abstract. The implicit computing circuit of Cauchy problem solving for ordinary differential equation on the basis of the shifted differential transformations with using the power functions is offered. The developed circuit possesses the optimum order of accuracy and it is A-stable, which allows applying it for the solving of strict differential equations.

Актуальність

У багатьох практичних задачах виникає необхідність розв'язання задачі Коші для жорсткого диференціального рівняння. Рішення такої задачі проводиться одним з методів числового інтегрування звичайних

диференціальних рівнянь шляхом розробки відповідної неявної обчислювальної схеми інтегрування [1, 2, 3]. Можливим варіантом розв'язання жорсткої задачі Коші є використання операційного методу диференціального перетворення [4].

Питання розробки неявних обчислювальних схем на основі диференціально-тейлорівських перетворень (далі Т-схеми) розглянуті в [4, 5, 6, 7, 8]. У роботах [7, 8] показано, що введення апроксимаційних поправок (для схеми [6]) або проведення взаємного врахування основного і зміщеного Т-спектрів (для схем [4, 8]) приводить до збільшення точності та значного розширення області стійкості таких схем. При цьому найкращі характеристики: зі стійкості – А-стійкість – у неявної (зміщеної) Т-схеми [8], а з точності – у неявної (апроксимаційної) Т-схеми [6].

Постановка задачі

Порядок точності неявної (зміщеної) Т-схеми дорівнює номеру старшої врахованої у ній Т-дискрети – якщо вона парна, або на одиницю більший номера старшої врахованої у ній Т-дискрети – якщо вона непарна [8]. При цьому порядок точності такої схеми у два рази менший за загальну кількість врахованих у ній (у основному та зміщеному Т-спектрах) Т-дискрет. Можливим шляхом підвищення порядку точності при збереженні характеристик зі стійкості неявної (зміщеної) Т-схеми є врахування в ній додаткових (апроксимаційних) умов.

Виходячи з викладеного вище, *метою статті* є розробка А-стійкої з оптимальним (непокрощувальним) порядком точності неявної обчислювальної схеми розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння на основі зміщених диференціальних перетворень.

Вирішення задачі

Задача Коші для звичайного диференціального рівняння має вигляд:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad t > 0, \quad u(t=0) = u_0, \quad (1)$$

де $u = u(t)$ – шукана функція; t – незалежна змінна; u_0 – початкова умова;

$f(t, u)$ – задана функція, безперервно диференційована за t та u .

Диференціальними перетвореннями називають перетворення виду [4]:

$$Z(k) = \frac{H^k}{k!} \left[\frac{d^k z(t)}{dt^k} \right]_{t_*} = \frac{H^k}{k!} z^{(k)}(t_*), \quad z(t) = \varphi(t), \quad (2)$$

де t – аргумент, за яким проводиться перетворення; t_* – значення аргументу, при якому проводиться перетворення; H – відрізок аргументу, на якому розглядається функція $z(t)$; k – цілочисловий аргумент $k = 0, 1$; $Z(k)$ – дискретна функція за аргументом k ; $\varphi(t)$ – відновлююча функція, яка у найпростішому випадку є відрізком ряду Тейлора.

Вирази (2) визначають пряме і обернене диференціальні перетворення. Множину значень $Z(k)$ називають Т-спектром, а значення функції $Z(k)$ при конкретних значеннях аргументу k – дискретами Т-спектру.

Неявна (зміщена) Т-схема числового розв'язання задачі (1) на основі (2) – це обчислювальна схема, в якій значення функції у точці $n+1$ розраховується так, щоб k_{\max} -на часткова сума ряду Тейлора, обчисленого в ній (сума дискрет зміщеного Т-спектру), дорівнювала на середині інтервалу $[t_n, t_{n+1}]$ k_{\max} -ній частковій сумі дискрет ряду Тейлора, обчисленого у попередній точці n – сумі дискрет основного Т-спектру [8]:

$$\begin{cases} Y_0(k=0) = u_0, & H_n = t_{n+1} - t_n \\ Y_n(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F_n(k), & Y_{n+1}(k+1) = \frac{H_n}{k+1} F_{n+1}(k) \end{cases} \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(-\frac{1}{2}\right)^k Y_{n+1}(k) = \sum_{k=0}^{k_{\max}} \left(\frac{1}{2}\right)^k Y_n(k), \quad (4)$$

де $Y_n(k), Y_{n+1}(k), F_n(k), F_{n+1}(k)$ – Т-спектри розв'язку задачі (1) та правої частини диференціального рівняння (1) у відповідних точках обчислювальної сітки $\omega_n = \{t_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ (точка n – основний, $n+1$ – зміщений Т-спектри); k_{\max} – максимальний номер врахованої при відновленні Т-дискрети.

Залежності (3), (4) дозволяють послідовно (починаючи з $n=0$) знайти розв'язок (1) – визначити на ω_n значення сіткової функції $y_n = Y_n(0)$, яке приймається за наближення шуканої функцій $u(t_n) \approx y_n$.

Введемо в операцію відновлення (4) Т-схеми (3), (4) апроксимаційні коефіцієнти, з врахуванням яких отримаємо неявну схему числового інтегрування на основі зміщених диференціальних перетворень [4] з використанням степеневих функції

$$\sum_{k=0}^m a_k Y_{n+1}(k) = \sum_{k=0}^r b_k Y_n(k), \quad (5)$$

де a_k, b_k – апроксимаційні коефіцієнти; m, r – максимальні номери Т-дискрет, що враховуються при відновленні в основному і зміщеному Т-спектрах відповідно.

Розпишемо (5) з урахуванням прямого перетворення з (2)

$$\sum_{k=0}^m a_k \frac{H_n^k}{k!} y_{n+1}^{(k)} = \sum_{k=0}^r b_k \frac{H_n^k}{k!} y_n^{(k)}, \quad (6)$$

Приведемо (5) до канонічного вигляду обчислювальної схеми числового інтегрування, прийнятої для кінцево-різницевого методів [1] (додатково, для спрощення подальших викладок, введемо заміну $h = H_n$)

$$\frac{a_0 y_{n+1} - b_0 y_n}{h} = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=1}^r b_k \frac{h^k}{k!} y_n^{(k)} - \sum_{k=1}^m a_k \frac{h^k}{k!} y_{n+1}^{(k)} \right). \quad (7)$$

Визначимо погрішність апроксимації ψ_n отриманої схеми (3), (7). Для цього підставимо у (7) замість числового (наближеного) рішення y_n точний розв'язок задачі (1) – $u = u(t)$ у вигляді розкладу у точці $t = t_n$ за формулою Тейлора [1]

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sum_{s=0}^p \frac{h^s}{s!} u_n^{(s)} + O(h^{p+1}), \quad u_{n+1}^{(k)} = \sum_{d=k}^p \frac{h^{d-k}}{(d-k)!} u_n^{(d)} + O(h^{p-k+1}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_n &= \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^r b_k \frac{h^k}{k!} u_n^{(k)} - \sum_{k=0}^m \frac{a_k}{k!} \left(\sum_{d=k}^p \frac{h^d}{(d-k)!} u_n^{(d)} \right) \right) + O(h^p). \end{aligned} \quad (8)$$

Покладемо $p > \max(m, r)$, з врахуванням цього (8) можна перетворити до вигляду

$$\psi_n = \frac{1}{h} \left(\sum_{k=0}^r b_k \frac{h^k}{k!} u_n^{(k)} - \sum_{d=0}^p h^d u_n^{(d)} \left[\sum_{k=0}^{\min(d, m)} \frac{a_k}{k!} \frac{1}{(d-k)!} \right] \right) + O(h^p),$$

та змінимо індекс у першій сумі з k на d

$$\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{h} \left(\sum_{d=0}^r b_d \frac{h^d}{d!} u_n^{(d)} - \sum_{d=0}^p h^d u_n^{(d)} \left[\sum_{k=0}^{\min(d, m)} \frac{a_k}{k!} \frac{1}{(d-k)!} \right] \right) + O(h^p) \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi_n &= \frac{1}{h} \left(\sum_{d=0}^r h^d u_n^{(d)} \left[\frac{b_d}{d!} - \sum_{k=0}^{\min(d, m)} \frac{a_k}{k!} \frac{1}{(d-k)!} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{d=r+1}^p h^d u_n^{(d)} \sum_{k=0}^{\min(d, m)} \frac{a_k}{k!} \frac{1}{(d-k)!} \right) + O(h^p). \end{aligned} \quad (9)$$

З (9) видно, що похибка апроксимації схеми, яка розглядається, має порядок p , якщо виконані умови

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\min(d, m)} a_k \frac{d!}{k!(d-k)!} = b_d, \text{ нпу } d = 0, \dots, r \\ \sum_{k=0}^{\min(d, m)} a_k \frac{d!}{k!(d-k)!} = 0, \text{ нпу } d = r+1, \dots, p \end{cases}. \quad (10)$$

У системі (10) при $d = 0$ отримаємо $a_0 = b_0$, тобто (10) має нескінченну кількість розв'язків, тому для усунення даної невизначеності покладемо $a_0 = 1$. Щоб система (10) не була перевизначена, накладемо вимогу

$$p = m + r. \quad (11)$$

Введемо в (10) заміну

$$a_k^* = \frac{a_k}{k!}, \quad b_d^* = \frac{b_d}{d!}, \quad (12)$$

з урахуванням якої запишемо

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{\min(d,m)} a_k^* \frac{1}{(d-k)!} = b_d^*, \text{ нпу } d = 0, \dots, r \\ \sum_{k=0}^{\min(d,m)} a_k^* \frac{1}{(d-k)!} = 0, \text{ нпу } d = r+1, \dots, r+m \end{cases}. \quad (13)$$

Система (13) визначає коефіцієнти апроксимації Паде для функції [9]

$$\exp(x) = \frac{\sum_{d=0}^r b_d^* x^d}{1 + \sum_{k=1}^m a_k^* x^k} + O(x^{r+m+1}), \quad \exp(x) = \frac{\sum_{d=0}^r b_d^* x^d}{1 + \sum_{k=1}^m a_k^* x^k} + O(x^{r+m+1}) \quad (14)$$

в якій

$$\begin{aligned} a_k^* &= \frac{(-1)^k}{k!} \frac{(r+m-k)!}{(r+m)!} \frac{m!}{(m-k)!}, \text{ нпу } k = 1, \dots, m, \\ b_d^* &= \frac{1}{d!} \frac{(r+m-d)!}{(r+m)!} \frac{r!}{(r-d)!}, \text{ нпу } d = 0, \dots, r. \end{aligned} \quad (15)$$

З врахуванням (12), (15) розв'язок системи (10) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} a_k &= (-1)^k \frac{(r+m-k)!}{(r+m)!} \frac{m!}{(m-k)!}, \text{ нпу } k = 0, \dots, m, \\ b_d &= \frac{(r+m-d)!}{(r+m)!} \frac{r!}{(r-d)!}, \text{ нпу } d = 0, \dots, r. \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, якщо коефіцієнти обчислювальної схеми (3), (5) розраховані у відповідності з (16), то порядок її апроксимації буде рівний сумі максимальних номерів врахованих у ній Т-дискрет основного та зміщеного Т-спектрів (11), з головним членом асимптотичного розкладу похибки апроксимації [2, 3] у відповідності з (9), (10)

$$\Psi_n = O(h^{m+r}) \approx E_{m,r} \frac{h^{m+r}}{(m+r+1)!} u_n^{(m+r+1)}, \quad (17)$$

де $E_{m,r} = -\sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{(m+r+1)}{(m+r+1-k)} \frac{m!}{(m-k)! k!}$ – коефіцієнт, що характеризує похибку апроксимації обчислювальної схеми.

Дослідимо стійкість отриманої схеми (3), (5), (16). Для цього розглянемо модельне рівняння [1, 2]

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad (18)$$

де λ – довільне комплексне число.

Застосування (3), (5), (16) до (18) дасть різницеве рівняння у вигляді

$$Y_{n+1}(0) = \left(\sum_{k=0}^r b_k \frac{(\lambda h)^k}{k!} / \sum_{k=0}^m a_k \frac{(\lambda h)^k}{k!} \right) Y_n(0) \Rightarrow y_{n+1} = R(\mu) y_n \quad (19)$$

де $\mu = \lambda h$ – комплексний параметр; $R(\mu) = \left(\sum_{k=0}^r b_k \frac{(\lambda h)^k}{k!} \right) / \left(\sum_{k=0}^m a_k \frac{(\lambda h)^k}{k!} \right)$ – функція стійкості отриманої обчислювальної схеми [2].

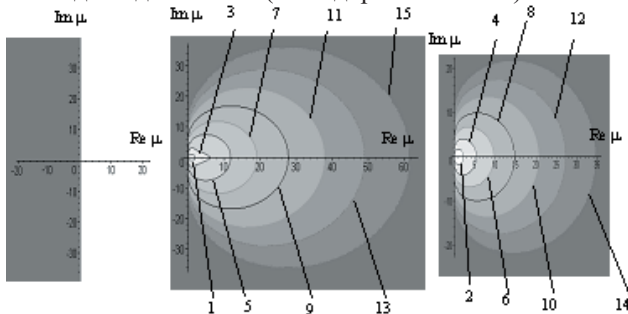
У відповідності з (14), (15), (16) функція стійкості розробленої схеми $R(\mu)$ є апроксимацією Паде експоненціальної функції. Відомо, що методи, функція стійкості яких є елементом діагоналі або однією з двох головних піддіагоналей таблиці Паде експоненціальної функції, є А-стійкими [2]. Таким чином, усі обчислювальні схеми виду (3), (5), (16) для $m = r$, $m = r + 1$ та $m = r + 2$ є А-стійкими. При цьому для (19), при $m = r + 1$ або $m = r + 2$, виконується умова L-стійкості

$$\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} |R(\mu)| = 0, \text{ при } m = r + 1 \text{ або } m = r + 2,$$

яка є найбільш бажаною для жорстких задач [2].

Запропонована схема числового інтегрування є однокроковою, стійкою та апроксимує вихідне диференціальне рівняння і тому вона збігається при $h \rightarrow 0$ до точного розв'язку диференціального рівняння, причому порядок точності схеми співпадає з її порядком апроксимації (11) [2].

Використовуючи функцію стійкості $R(\mu)$, можна побудувати області стійкості для розробленої обчислювальної схеми [2]. Зазначені області стійкості для різних m і r наведено на рис. 1, де числа $-1 \dots 15$ позначають порядок точності відповідної схеми (який дорівнює $m + r$).



а) для $m = r$ б) для $m = r + 1$ в) для $m = r + 2$

Рис. 1. Области стійкості запропонованої обчислювальної схеми

Запропонована схема (3), (5), (16) є неявною. Це означає, що для нелінійного диференціального рівняння (1) вона на кожному кроці обчислювальної сітки ω_n зводиться до нелінійного рівняння відносно y_{n+1} , розв'язати яке можна, наприклад, методом Ньютона:

$$(y_{n+1(i+1)} - y_{n+1(i)}) \sum_{k=0}^{m_1} a_k \delta Y_{n+1(i)}(k) = \sum_{k=0}^r b_k Y_n(k) - \sum_{k=0}^m a_k Y_{n+1(i)}(k), \quad (20)$$

де i – номер ітерації за методом Ньютона; $\delta Y_{n+1(i)}(k)$ – Т-спектр матриці Якобі; m_1 – максимальний номер Т-дискрети врахованої в $\delta Y_{n+1(i)}(k)$.

Початкове наближення для $i=0$ при реалізації (20) можна отримати, використовуючи явну Т-схему [4]. Т-спектр матриці Якобі визначається, використовуючи підхід, викладений у [10], або методом кінцевих різниць. Виходячи зі збіжності ітераційного процесу, для зменшення результуючої обчислювальної складності в (20) допускається задавати $m_1 < m$. Наприклад, при $m_1=0$ отримуємо метод простої ітерації [1], оскільки $\delta Y_{n+1(i)}(0) = I$ – одинична матриця [10].

У табл. 1 наведено значення коефіцієнтів (16), (17) для різних варіантів запропонованої обчислювальної схеми, де γ – порядок точності, $E_{m,r}$ – коефіцієнт головного члену асимптотичного розкладу похибки апроксимації.

Висновки

Розроблена схема числового інтегрування (3), (5), (16), (20) має, у деякій мірі, універсальний вигляд, оскільки включає багато з відомих Т-схем. Так, при $m=0$, $b_k=1$ маємо (найпростішу) явну Т-схему [4], при $r=0$, $a_k=1$ – неявну Т-схему [5], а при $r=m$, $(-1)^k a_k = b_k = 2^{-k}$ – неявну (зміщену) Т-схему (3), (4).

Порядок точності розробленої схеми (3), (5), (16), (20) рівний сумі максимальних номерів Т-дискрет основного і зміщеного Т-спектрів, що беруть участь в операції відновлення. Або, іншими словами, кожен врахований член ряду Тейлора (кожна Т-дискрета) точного розв'язку диференціального рівняння підвищує порядок точності схеми на одиницю. Таким чином, розроблена схема має непоказаний (оптимальний) для схем виду (3), (5) порядок точності. При цьому вид похибки апроксимації розробленої обчислювальної схеми (17) подібний до виду такої похибки для лінійних багатокрокових методів, а її значення для розробленої схеми (значення коефіцієнта $E_{m,r}$) менше такого значення для лінійних багатокрокових методів [3].

Коефіцієнти розробленої обчислювальної схеми

Варіант	$\gamma = r + m$	Коефіцієнт	k						$E_{m,r}$	
			0	1	2	3	4	5		
$m = r$	2	a_k	1	-1/2	-	-	-	-	1/2	
		b_k	1	1/2	-	-	-	-		
	6	a_k	1	-1/2	1/5	-1/20	-	-	1/20	
		b_k	1	1/2	1/5	1/20	-	-		
	8	a_k	1	-1/2	3/14	-1/14	1/70	-	-1/70	
		b_k	1	1/2	3/14	1/14	1/70	-		
	10	a_k	1	-1/2	2/9	-1/12	1/42	-1/252	1/252	
		b_k	1	1/2	2/9	1/12	1/42	1/252		
	$m = r + 1$	3	a_k	1	-2/3	1/3	-	-	-	5/3
			b_k	1	1/3	-	-	-	-	
7		a_k	1	-4/7	2/7	-4/35	1/35	-	69/35	
		b_k	1	3/7	1/7	1/35	-	-		
9		a_k	1	-5/9	5/18	-5/42	5/126	-1/126	-251/126	
		b_k	1	4/9	1/6	1/21	1/126	-		
$m = r + 2$	2	a_k	1	-1	1	-	-	-	-1	
		b_k	1	-	-	-	-	-		
	6	a_k	1	-2/3	2/5	-1/5	1/15	-	-71/15	
		b_k	1	1/3	1/15	-	-	-		
	8	a_k	1	-5/8	5/14	-5/28	1/14	-1/56	379/56	
		b_k	1	3/8	3/28	1/56	-	-		

Розроблена схема для $m = r \in A$ -стійкою, а для $m = r + 1$, $m = r + 2 \in L$ -стійкою. При цьому вид її області абсолютної стійкості повністю співпадає з видом такої області для методів Рунге-Кутта оптимального порядку [2], оскільки розроблена схема має однакові з ними функції стійкості, які є апроксимаціями Паде для експоненціальної функції.

Зі сказаного вище випливає, що в статті розроблена A -стійка з оптимальним порядком точності неявна обчислювальна схема розв'язання задачі Коші для звичайного диференціального рівняння на основі зміщених диференціальних перетворень з використанням степеневих функцій. Характеристики точності та стійкості запропонованої схеми дозволяють ефективно застосовувати її для розв'язання жорстких диференціальних рівнянь.

1. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы: Учеб. пособие для вузов.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 432 с.
2. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 321 с.
3. Хемминг Р.В. Численные методы для научных работников и инженеров. – М., 1972. 400 с.
4. Пухов Г.Е. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – К.: Наук. думка, 1980. – 420 с.
5. Ронто Н.И. О неявных схемах интегрирования, основанных на дифференциальных преобразованиях // Электронное моделирование. – 1986. – т. 8, № 4. – С. 44-50.
6. Степанов А.В. Аппроксимационный вариант неявной Т-схемы численного интегрирования // Теоретическая электротехника. – 1985. – Вып. 39. – С.123-126.
7. Коваль Н.В., Семагина Э.П. Об устойчивости алгоритмов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом дифференциального преобразования // Теоретическая электротехника. – 1985. – Вып. 39. – С. 108–118.
8. Ракушев М.Ю. Апроксимація та стійкість методу змішених диференціально-тейлорівських перетворень для рішення задачі Коші// Вісник ЖДТУ. – Житомир: ЖДТУ, 2007. – 42 № 3. – С. 128–132.
9. Бейкер Дж, мл., Грейвс-Моррис П. Аппроксимации Паде. Пер. с англ.– М.: Мир, 1886.– 502с.
10. Ковбасюк С.В., Ракушев М.Ю. Метод решения вариационного уравнения для задачи Коши на основе дифференциальных преобразований // Электронное моделирование. – 2008. – т. 30, № 6. – С. 59-70.

Поступила 14.02.2013р.

УДК 517.977.57:621.74.08

М.А. Духанина, магистр, Е.Ю. Лебедева, аспирант, П.С. Швец, специалист,
Одесс. нац. политехн. ун-т, г. Одесса
Л.А.Одукалец, м.н.с., ДУ "Інститут геохімії навколишнього середовища НАН
України", г.Київ

ЭВОЛЮЦИОННАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЛАБОСВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

The version of the complex genetic algorithm, allowing to optimize objects with poorly connected subsystems is offered. Observance of "soft" connectivity is provided by adaptive control of crossing operation for receiving the descendants which aren't breaking restrictions on connectivity.