УДК 618.51:519.2

Н. Б. Марченко, Л. М. Щербак, Київ

АДАПТИВНІ ВАГОВІ ВІКНА ПРИ СПЕКТРАЛЬНОМУ АНАЛІЗІ ПОЛІГАРМОНІЧНИХ СИГНАЛІВ В УМОВАХ ДІЇ ЗАВАД

Abstract. In this paper the problem of the method of calculation adapted weighting function, allowing for the use of relatively simple algorithms to eliminate or minimize methodological error of estimation of frequency and amplitude of the signal to background noise

Вступ. Типовим завданнями при цифровій обробці сигналів (ЦОС) є завдання оцінки частоти апріорно періодичного сигналу, при дії завад. Для оцінки частоти сигналу при дії завад зазвичай використовують різноманітні методи: класичні методи спектрального аналізу на основі перетворення Фур'є (ПФ); методи, засновані на лінійних моделях; методи компенсації завад, обробка із застосуванням віконних функцій та ін.

Суттєвим обмеженням класичних методів спектрального аналізу є те, що ці методи не враховують апріорну інформацію про досліджуваний процес. У таких випадках недоліки класичних методів спектрального оцінювання компенсуються використанням параметричних методів, що припускають наявність деякої математичної моделі аналізованого процесу. Спектральний аналіз зводиться в даному випадку до розв’язання задачі оптимізації, тобто, пошуку таких параметрів моделі, при яких вона близька до реального сигналу, що спостерігається [1].

Вважається, що з розвитком методів параметричного спектрального аналізу, класичні методи втрачають своє значення. Основні недоліки класичних методів спектрального аналізу обумовлені низькою роздільною здатністю і розмиванням відліків бічних спектральних компонент. Однак класичні методи спектрального оцінювання відносяться до числа найбільш стійких (робастних) методів спектрального оцінювання. Вони застосовні майже до всіх класів сигналів і шумів, тоді як альтернативні їм методи високої роздільної здатності виявляються робастними тільки у випадку обмеженого класу стаціонарних сигналів [2].

Ефективними способами зниження методичної похибки оцінок при використанні спектральних методів оцінювання є застосування згладжувальних вагових функцій (ВФ). Похибка оцінювання, що виникає в ідеальних умовах отримання та обробки сигналу, притаманна кожному методу, називається методичною. Відповідно з цим визначенням методичними будуть похибки визначення частоти полігармонічного сигналу, викликані розмиваючим впливом бічних спектральних компонент.

При знаходженні ВФ критеріями оптимальності є: мінімум рівня бічних спектральних компонент, мінімум ширини основної спектральної компоненти, мінімум похибки оцінювання спектральної щільності потужності та ін. У той же час зазначимо, що «оптимальної вагової функції», яка може бути застосована у всіх випадках не існує [2,3]. Вибір вагової функції і масштабного множника істотно залежить від обсягу вибірки, від передбачуваного ступеня гладкості функції і від деяких інших апріорних даних.

Обробка даних за допомогою ВФ дозволяє послабити вплив бічних спектральних компонент, але лише за рахунок погіршення роздільної здатності. Вважається, що при використанні класичного спектрального аналізу похибка оцінки частоти сигналу, представленого відрізком полігармонічного сигналу з відносно широким спектром, не може бути низькою [4]. У цьому зв'язку залишається актуальним завдання знаходження коефіцієнтів в класичних ВФ і створення нових ВФ і алгоритмів на їх основі, які при мінімальному зниженні спектральної роздільної здатності дозволяють виключити або мінімізувати методичну складову похибки оцінки частоти.

Зазначимо, що вагова обробка застосовується для зменшення похибки оцінки частоти при обробці сигналу у часовій області. В роботі, чисельними методами отримані параметри трьох сімейств ВФ, що забезпечують мінімум середньоквадратичної похибки оцінювання частоти полігармонічного сигналу, усередненої на заданому скінченному інтервалі частот.

За оцінку частоти при спектральному аналізі приймають:

- частоту f_{cp}, відповідну максимуму спектра сигналу [5]

$$\left|\dot{S}\left(f_{cp}\right)\right| = \max_{f}\left\{\left|\dot{S}\left(f\right)\right|\right\} , \tag{1}$$

де $\dot{S}\left(f\right)$ - спектр або спектральна щільністьсигналу;

- частоту, відповідну точці симетрії спектру сигналу [4]

$$\int_{f_1}^{f_{cp}} \left|\dot{S}\left(f\right)\right| df = \int_{f_{cp}}^{f_2} \left|\dot{S}\left(f\right)\right| df , \tag{2}$$

де f_1 та f_2 - граничні частоти діапазону частот, обрані виходячи з апріорних відомостей про сигнал (наприклад, $f_1 = 0$ та $f_2 = \infty$ при повній апріорної невизначеності);

- середньозважене значення частоти спектра сигналу [5]

$$f_{cp} = \int_{f_1}^{f_2} f\left|\dot{S}\left(f\right)\right|^2 df \bigg/ \int_{f_1}^{f_2}\left|\dot{S}\left(f\right)\right|^2 df . \tag{3}$$

Відповідно до визначення (1) для оцінки частоти сигналу необхідно розв’язати рівняння

$$\frac{d}{d\Omega}\left|\dot{S}(\Omega)\right|^2 = \frac{d}{d\Omega}\left|\sum_{i=1}^{N}\dot{S}_i(\Omega)\right|^2 = 0 , \tag{4}$$

де $\dot{S}_i(\Omega)$ - спектральна щільність i-ї компоненти зваженої вибірки сигналу $u(t)$, отриманого на симетричному часовому інтервалі; $w(t)$ - ВФ, симетрична відносно середини вибірки сигналу.

З урахуванням введених позначень представимо розгорнутий запис рівняння (4):

$$\frac{d}{dx}\left|S_1(x\_) + S_1(x_+) + \sum_{i=2}^{N} e^{j(\Phi_i - \Phi_1)} S_i(x\_) + \sum_{i=2}^{N} e^{-j(\Phi_i - \Phi_1)} S_i(x_+)\right|^2 = 0 \quad (5)$$

де $S(x\_)$ та $S(x_+)$ - модулі доданків спектральної щільності з від’ємної і додатньою областей частот, аргументами яких є, відповідно, частоти $(x + x_i),(x - x_i)$., U_i, Φ_i - амплітуда і фаза i - го компонента сигналу. Будемо вважати , що $S(x\_)$ відповідає сигналу, частоту якого потрібно визначити.

Отримати загальний розв’язок рівняння (5) не представляється можливим. Однак на практиці не потрібно знати точну залежність похибки оцінки частоти. Зазвичай найбільш важливими є оцінка максимальних і мінімальних значень цієї похибки і їх положень на шкалі частоти, тому що, саме ці величини визначають метрологічні характеристики досліджуваної системи, а також визначення умов зниження похибки. Отримаємо розв’язок для окремих випадків ВФ заданого виду, що допускають оптимізацію її параметрів.

Для визначення можливостей точного оцінювання параметрів ВФ, будемо розглядати ВФ, представимо тригонометричними рядами (тригонометричні ВФ) і алгебраїчними поліномами (алгебраїчні ВФ) виду [3, 8]:

$$w_{\sum}(t,b,N) = K_{\sum}^{-1}(b,N)\left[1 + \sum_{n=1}^{N} a_{n\sum}(b)\cos(\pi nt)\right], \quad (6)$$

$$w_s(t,b,N) = 1 + \sum_{n=1}^{N} a_{sn}(b)\cos(2\pi nt), \quad (7)$$

$$w_c(t,b,N) = K_c^{-1}(b,N)\sum_{n=1}^{N} a_{cn}(b)\cos[\pi(2n-1)t], \quad (8)$$

де b - нормована частота, на якій задаються спектральні властивості ВФ, зокрема задаються нулі спектру і, можливо, їх перші похідні, $K_{\sum}^{-1}(b,N)$, $K_c^{-1}(b,N)$ - нормуючі множники [2], $t = t_{пот} / T$ - нормований поточний час, $t_{пот}$ - поточний час.

Враховуючи, що спектральна щільність сигналу скінченної довжини неперервна і дифернційовна, можна посилити умову досягнення мінімуму похибки оцінок в околі заданої точки b. У цьому випадку мінімум похибки може бути отриманий, якщо в цій точці нулю дорівнює спектр і її N початкових похідних. Для цього використовуємо систему рівнянь [2, 6]:

$$\begin{cases} S[x, a_1(b) \ldots a_N(b)]\big|_{x=b} = 0, \\ \dfrac{d}{dx} S[x, a_1(b) \ldots a_N(b)]\Big|_{x=b} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{d^{(N-1)}}{dx^{(N-1)}} S[x, a_1(b) \ldots a_N(b)]\Big|_{x=b} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Шуканими параметрами для ВФ (6)-(8) і в системі (9) є коефіцієнти $a_n(b)$. Таким чином, при одній заданій частоті b загальне число варійованих коефіцієнтів ВФ $w_{\sum}(t,b,N)$, $w_s(t,b,N)$ дорівнює N.

Спектральні щільності сигналу (6)–(8) після низки еквівалентних перетворень можуть бути представлені, відповідно, у вигляді [2, 4]:

$$S_{\sum}(x,b,N) = T\frac{\sin(\pi x)}{\pi x K_{\sum}(b,N)}\left(1 + \sum_{n=1}^{[N/2]} a_{n\sum}(b)\cos(n\pi)\frac{x^2}{x^2 - n^2}\right) +$$

$$+ T\frac{\cos(\pi x)}{\pi K_{\sum}(b,N)}\left(\sum_{n=1}^{[0,5+N/2]} a_{n\sum}(b)\cos(n\pi)\frac{n-0,5}{x^2-(n-0,5)^2}\right), \tag{10}$$

де [*] – ціла частина числа.

$$S_s(x,b,N) = T\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\left(1 + \sum_{n=1}^{N} a_{sn}(b)\cos(n\pi)\frac{x^2}{x^2-n^2}\right) \tag{11}$$

$$S_c(x,b,N) = T\frac{-\cos(\pi x)}{\pi K_c(b,N)}\left(\frac{0,5}{x^2-0,25} + \sum_{n=1}^{N} a_{cn}(b)\cos(n\pi)\frac{n+0,5}{x^2-(n+0,5)^2}\right). \tag{12}$$

Надалі опускаємо несуттєвий для аналізу постійний співмножник T, вважаючи інтервал аналізу одиничним.

Отримати загальний розв'язок системи рівнянь (4) для ВФ $w_{\sum}(t,b,N)$ не представляється можливим. Тому розв'язок для ВФ $w_{\sum}(t,b,N)$ та її подальший аналіз проведемо при обмеженому числі доданків.

Перші два варійовані коефіцієнти ВФ $w_{\sum}(t,b,2)$:

$$a_{1\sum}(b)=\frac{2b^2-0{,}5}{\pi b^2(b^2-1)}\frac{-2\sin^2\pi b}{1+\frac{\sin(2\pi b)}{2\pi b}\left(\frac{2b^2}{b^2-0.25}-\frac{b^2+1}{b^2-1}\right)},$$

$$a_{2\sum}(b)=\frac{b^2-1}{b^2}\frac{1+\frac{\sin(2\pi b)}{2\pi b}\frac{b^2+0.25}{b^2-0.25}}{1+\frac{\sin(2\pi b)}{2\pi b}\left(\frac{2b^2}{b^2-0.25}-\frac{b^2+1}{b^2-1}\right)}.$$

Для знаходження коефіцієнтів ВФ $w_s(t,b,N)$, $w_c(t,b,N)$ систему рівнянь (9) спрощуємо, враховуючи, що відповідні спектри (11), (12) представлені нескінченно диференційованим добутком співмножників, перший з яких $\sin(\pi x)/\pi x$ або $\cos(\pi x)/\pi K_c(b,N)$.

Так як ні ці співмножники, ні їх похідні не рівні нулю на довільній частоті x, для виконання умови рівності нулю в системі (9) повинні бути рівні нулю інші співмножники спектри $S_s(x,b,N)$, $S_c(x,b,N)$ разом із своїми похідними. Тоді система рівнянь (9) зводиться до системи рівнянь [2, 7]

$$\begin{cases}\sum_{n=1}^{N}a_{sn}(b)\cos(n\pi)\frac{x^2}{x^2-n^2}=-1,\\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}(b)\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\frac{x^2}{x^2-n^2}=0,\\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}(b)\cos(n\pi)\frac{d^2}{dx^2}\frac{x^2}{x^2-n^2}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \sum_{n=1}^{N}a_{sn}(b)\cos(n\pi)\frac{d^{(N-1)}}{dx^{(N-1)}}\frac{x^2}{x^2-n^2}=0.\end{cases}\qquad(13)$$

З (13) отримаємо:

$$a_{sn}(b)=A_{sn}\left(1-\frac{n^2}{b^2}\right)^N,\qquad(14)$$

Коефіцієнти A_{sn} для N від 2 до 10 наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Коефіцієнти A_{sn} для $N=5$

N	A_{s1}	A_{s2}	A_{s3}	A_{s4}	A_{s5}
2	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0
3	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$	0	0
4	$\frac{8}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{1}{35}$	0
5	$\frac{5}{3}$	$\frac{20}{21}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{63}$	$\frac{1}{126}$

Для ВФ $w_c(t,b,N)$ з спектральною щільністю $S_c(x,b,N)$ система (9) записується як

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{N} a_{cn}(b)\cos(n\pi)\frac{(n-0,5)^2}{x^2-(n-0,5)} = -1, \\ \sum_{n=1}^{N} a_{cn}(b)\cos(n\pi)\frac{d}{dx}\frac{(n-0,5)^2}{x^2-(n-0,5)^2} = 0, \\ \sum_{n=1}^{N} a_{cn}(b)\cos(n\pi)\frac{d^2}{dx^2}\frac{(n-0,5)^2}{x^2-(n-0,5)^2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ . \\ \sum_{n=1}^{N} a_{cn}(b)\cos(n\pi)\frac{d^{(N-1)}}{dx^{(N-1)}}\frac{(n-0,5)^2}{x^2-(n-0,5)^2} = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Таблиця 2

Коефіцієнти A_{cn}, для $N=5$

N	A_{c1}	A_{c2}	A_{c3}	A_{c4}	A_{c5}
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	0
3	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{35}$	0	0
4	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{126}$	0
5	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{462}$

З (15) отримаємо:

$$a_{cn}(b) = A_{cn}\left(\frac{b^2-(n+0,5)^2}{b^2-0,25}\right)^N .$$

Коефіцієнти A_{cn} , для N від 2 до 10 наведені в таблиці 2.

Висновки

Виконано аналіз спектральних властивостей адаптованих ВФ, показані найбільш раціональні області застосування різних сімейств адаптованих ВФ та ВФ з оптимізованими параметрами, отриманими на основі адаптованих ВФ. Аналіз властивостей отриманих сімейств адаптованих ВФ для обробки неперервних сигналів показав, що для оптимального застосування спектральних властивостей найбільш зручні адаптованих ВФ сімейств, представлених тригонометричними рядами, періоди яких кратні тривалості аналізованої вибірки.

Запропонована методика розрахунку і отриманий клас адаптованих ВФ з трьох сімейств для обробки неперервних сигналів, які дозволяють одночасно зменшити методичну похибку оцінок частот доданків полігармонічного сигналу, притаманну спектральним методам. Форма ВФ задається змінними параметрами таким чином, щоб на частоті кожного з доданків сигналу бічні спектральні компоненти інших доданків були рівні нулю разом з заданою кількістю їх похідних. Звідси слідує, що адаптованих ВФ дозволяють отримувати ВФ з граничними співвідношеннями ширини головної спектральної компоненти і швидкості зменшення рівня бічних спектральних компонент.

1. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. - М.: Мир, 1990. – 584с.
2. *Давыдочкин В.М., Давыдочкина С.В.* Новый метод расчёта эффективных весовых функций для спектрального анализа. // Доклады XII Междунар. НТК "Радиолокация, навигация, связь". Воронеж, 2006. – Том. 3. – С. 1662-1668.
3. *Хэррис Ф. Дж.* Использование окон при гармоническом анализе методом дискретного преобразования Фурье.// ТИИЭР. 1978. – Т. 66. – №1. – с. 60-96.
4. *Ezerskii V.V., Davydochkin V.M.* Optimization of the spectral processing of the signal of a precision distance sensor based on a frequency rangefinder. // Measurement techniques, 2005. – Vol. 48. – № 2. – P. 133-140.
5. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. В трёх книгах. Книга первая. Изд. 2-е, перераб. - М.: Сов. Радио, 1974. - 552 с.
6. *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов.- М.: Мир, 1978. - 523с.
7. *Ярхо Т.А.* Определение положения пика спектральной компоненты при быстром преобразовании Фурье. // Радиотехника. Республиканский межведомственный научно-технический сборник. Харьков. Издательство при харьковском государственном университете. 1989. Выпуск 90. С. 6 - 11.
8. *Хемминг Р.В.* Цифровые фильтры: Пер. с англ./ под ред. А.Хойнен. Измерение матрицы рассеяния цели // ТИИЭР, 1965, вып. 53, № 8. С. 1074.

Поступила 19.02.2014р.