

А.Ю. МІЩУКВолинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: anton.mi.ju@gmail.com.**А.М. ШУТОВСЬКИЙ**Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: sh93ar@gmail.com.**ПРО ОПТИМІЗАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНИХ
ІНТЕГРАЛІВ ЧЕБИШЕВА–ПУАССОНА**

Анотація. Застосовано многочлени Чебишева першого роду з метою побудови узагальненого інтеграла Чебишева–Пуассона. Розв'язано задачу оптимізації для узагальненого оператора Чебишева–Пуассона як функціонала функції, визначеної на відрізку, та проаналізовано його апроксимативні властивості на класах Гельдера H^1 . Отримано точну рівність для відхилення функцій класу Гельдера від узагальненого інтеграла Чебишева–Пуассона.

Ключові слова: многочлени Чебишева, узагальнений інтеграл Чебишева–Пуассона, клас функцій Гельдера, задача оптимізації.

ВСТУП

У будь-якій галузі науки та техніки використовують математичний апарат певного типу. Наприклад, класична механіка є теорією звичайних диференціальних рівнянь, квантова механіка — це теорія лінійних операторів. Що стосується теорії ігрових задач динаміки [1–3], то ця галузь науки вже являє теорію диференціальних рівнянь у частинних похідних. Диференціальне рівняння у частинних похідних, яке є математичною моделлю в теорії ігрових задач динаміки та теорії динамічних систем, для багатьох випадків має розв'язок у вигляді функціонала деякої функції $f(x)$ з певною областю визначення. Якщо функція $f(x)$ визначена на всій числовій осі $(-\infty < x < +\infty)$, то така ситуація є однією із найпоширеніших на практиці. До спектра відповідних диференціальних рівнянь у частинних похідних належать рівняння теплопровідності, полігармонійні рівняння [4–7] тощо. До того ж самі полігармонійні рівняння можуть бути визначені як у декартових (верхня півплощина), так і в полярних координатах [8–12] (одиничний круг).

Серед полігармонійних рівнянь особливе місце посідають гармонійне [13–16] та бігармонійне [17–20] рівняння. Оскільки розв'язки визначених вище двох рівнянь у частинних похідних є додатними операторами, то їх можна трактувати як найбільш оптимальні розв'язки рівнянь і, як наслідок, застосовувати в теорії оптимальних рішень.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Якщо задача теорії ігрових задач динаміки [21, 22] моделюється за допомогою диференціального рівняння у частинних похідних, яке визначене на відрізку, то і сама функція $f(x)$ буде визначена на відрізку. Якщо відрізок задається нерівністю $-1 \leq x \leq 1$, то функцію $f(x)$ можна представити у вигляді розкладу:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(k \arccos x) \quad (1)$$

за многочленами Чебишева першого роду, де

© А.Ю. Міщук, А.М. Шутовський, 2024

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}} \quad (2)$$

та

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(y) \cos(k \arccos y)}{\sqrt{1-y^2}} dy. \quad (3)$$

З метою застосування многочленів Чебишева до теорії оптимальних рішень потрібно сконструювати на основі розкладу (1) саме додатні оператори [23–25], які є найбільш оптимальними. Такими можуть бути оператори

$$P(\rho; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k a_k \cos(k \arccos x) \quad (4)$$

та

$$B(\rho; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k \left[1 + \frac{k}{2} (1 - \rho^2) \right] a_k \cos(k \arccos x), \quad (5)$$

які називають відповідно гармонійним та бігармонійним операторами. Зазначимо, що по чергове застосування формул (2) та (3) до операторів (4) та (5) перетворює їх на інтеграли з додатними інтегральними ядрами [26] (ядра інтеграла Абеля–Пуассона та бігармонійного інтеграла Пуассона).

У роботі [27] оператор відіграє роль наближувального агрегату для випадку функції $f(x)$ з класу Гельдера H^1 , визначеної на відрізку $-1 \leq x \leq 1$. Клас Гельдера H^1 широко застосовується в теорії оптимальних рішень, наприклад для оптимального проектування [28].

Спектр застосування многочленів Чебишева в межах теорії оптимальних рішень можна дещо розширити, якщо замість операторів (4) та (5) розглядати так званий узагальнений оператор Чебишева–Пуассона, а саме

$$P_{s,q}(\rho; f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] a_k \cos(k \arccos x), \quad (6)$$

де $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ та $q \geq 1$.

Ця робота пов'язана з вивченням апроксимативних властивостей оператора (6) на класах функцій Гельдера H^1 .

ДЕЯКІ АПРОКСИМАТИВНІ ОСОБЛИВОСТІ УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРАЛА ЧЕБИШЕВА–ПУАССОНА

Якщо функція $f(x)$ визначена на відрізку $-1 \leq x \leq 1$, то для неї можна побудувати розклад (1) за многочленами Чебишева. За розкладом (1) запроваджується абсолютно збіжний ряд (6), який з використанням формул (2) та (3) перетворюється на узагальнений інтеграл Чебишева–Пуассона

$$P_{s,q}(\rho; f; x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x - \arccos y) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x + \arccos y) \right\} \frac{f(y) dy}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (7)$$

Тоді в наведених вище позначеннях для функцій класу Гельдера H^1 , які задовольняють умову

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y| \quad (-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1), \quad (8)$$

має місце твердження.

Теорема 1. Для кожного $-1 \leq x \leq 1$ та $0 < \rho < 1$ має місце точна рівність

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(\rho; x)) &= \sup_{f \in H^1} |f(x) - P_{s,q}(\rho; f; x)| = \\ &= \{1 - 2s(1 - \rho)^{q-1}\} \left\{ \frac{x}{\pi} (1 - \rho) (\pi - 2 \arccos x) + \frac{x}{\pi \rho} (1 - \rho)^2 \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1 + \rho - 2\rho x^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi \rho} (1 - \rho^2) \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1 - \rho} \right\} + 2s(1 - \rho)^{q-1} \left\{ \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} (1 - \rho^2) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{2\pi} (2 + \rho) (1 - \rho)^2 (\pi - 2 \arccos x) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi \rho} (1 - \rho^2)^2 \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1 - \rho} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{2\pi \rho} (1 - \rho)^2 [2 - (1 + \rho)^2] \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1 + \rho - 2\rho x^2} \right\}. \quad (9) \end{aligned}$$

Доведення. Використовуючи методи з робіт [29–31], відповідно до формули (7) отримуємо інтегральне представлення

$$\begin{aligned} f(x) - P_{s,q}(\rho; f; x) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x - \arccos y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x + \arccos y) \right\} \frac{\{f(x) - f(y)\} dy}{\sqrt{1 - y^2}} \quad (10) \end{aligned}$$

для величини $f(x) - P_{s,q}(\rho; f; x)$. Оскільки для функцій класу Гельдера H^1 виконується умова (8), то аналогічно до [32] з інтегрального представлення (10) випливає оцінка

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(\rho; x)) &= \sup_{f \in H^1} |f(x) - P_{s,q}(\rho; f; x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x - \arccos y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x + \arccos y) \right\} \frac{|x - y| dy}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad (11) \end{aligned}$$

Оскільки в класі H^1 існує функція $f(y) = |y|$, для якої нерівність (11) перетворюється в рівність, то

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(\rho; x)) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left\{ 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x - \arccos y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1 + \rho)(1 - \rho)^q] \cos k(\arccos x + \arccos y) \right\} \frac{|x - y| dy}{\sqrt{1 - y^2}}. \quad (12) \end{aligned}$$

Якщо взяти до уваги суму

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \rho^k [1 + sk(1+\rho)(1-\rho)^q] \cos(kt) &= \frac{(1-\rho^2)\{1-2s(1-\rho)^{q-1}\}}{2(1-2\rho \cos t + \rho^2)} + \\ &+ 2s(1-\rho)^{q-1} \frac{(1-\rho^2)^2}{4} \left\{ \frac{1}{1-2\rho \cos t + \rho^2} + \frac{1-\rho^2}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (13)$$

то замість формули (12) матимемо таку рівність:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; P_{s,q}(\rho; x)) &= \{1-2s(1-\rho)^{q-1}\} \frac{1-\rho^2}{2\pi} \{I_1(\rho, x) + I_2(\rho, x)\} + \\ &+ 2s(1-\rho)^{q-1} \frac{(1-\rho^2)^2}{4\pi} \{I_1(\rho, x) + I_2(\rho, x) + (1-\rho^2)[I_3(\rho, x) + I_4(\rho, x)]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

До того ж формула (14) містить позначення для таких інтегралів:

$$I_1(\rho, x) = \int_{-1}^1 \frac{|x-y|}{1-2\rho \cos(\arccos x - \arccos y) + \rho^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (15)$$

$$I_2(\rho, x) = \int_{-1}^1 \frac{|x-y|}{1-2\rho \cos(\arccos x + \arccos y) + \rho^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (16)$$

$$I_3(\rho, x) = \int_{-1}^1 \frac{|x-y|}{\{1-2\rho \cos(\arccos x - \arccos y) + \rho^2\}^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (17)$$

$$I_4(\rho, x) = \int_{-1}^1 \frac{|x-y|}{\{1-2\rho \cos(\arccos x + \arccos y) + \rho^2\}^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (18)$$

Вочевидь, інтеграл (15) можна записати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} I_1(\rho, x) &= \int_x^1 \frac{y-x}{1-2\rho \cos(\arccos x - \arccos y) + \rho^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \\ &+ \int_{-1}^x \frac{x-y}{1-2\rho \cos(\arccos x - \arccos y) + \rho^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Перший та другий інтеграли в правій частині (19) можна трансформувати заміною $t = \arccos x - \arccos y$ та $t = \arccos y - \arccos x$ відповідно. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} I_1(\rho, x) &= \int_0^{\arccos x} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t - x(1-\cos t) \right\} dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} + \\ &+ \int_0^{\arccos(-x)} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t + x(1-\cos t) \right\} dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Інтеграл (16) можна зобразити так:

$$\begin{aligned} I_2(\rho, x) &= \int_x^1 \frac{y-x}{1-2\rho \cos(\arccos x + \arccos y) + \rho^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \\ &+ \int_{-1}^x \frac{x-y}{1-2\rho \cos(\arccos x + \arccos y) + \rho^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Перший та другий інтеграли у правій частині (21) перетворимо заміною $t = \arccos x + \arccos y$ та $t = 2\pi - \arccos x - \arccos y$ відповідно. Тоді матимемо

$$I_2(\rho, x) = \int_{\arccos x}^{2\arccos x} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t - x(1-\cos t) \right\} dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} + \\ + \int_{\arccos(-x)}^{2\arccos(-x)} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t + x(1-\cos t) \right\} dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2}. \quad (22)$$

Аналогічно перетворюємо інтеграли (17) та (18), внаслідок чого отримуємо

$$I_3(\rho, x) = \int_0^{\arccos x} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t - x(1-\cos t) \right\} dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} + \\ + \int_0^{\arccos(-x)} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t + x(1-\cos t) \right\} dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} \quad (23)$$

та

$$I_4(\rho, x) = \int_{\arccos x}^{2\arccos x} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t - x(1-\cos t) \right\} dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} + \\ + \int_{\arccos(-x)}^{2\arccos(-x)} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t + x(1-\cos t) \right\} dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}. \quad (24)$$

Сума інтегралів (20) та (22) дає змогу дійти результату

$$I_1(\rho, x) + I_2(\rho, x) = \int_0^{2\arccos x} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t - x(1-\cos t) \right\} dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} + \\ + \int_0^{2\arccos(-x)} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t + x(1-\cos t) \right\} dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2}. \quad (25)$$

Для подальших обрахунків задіємо інтеграли

$$\int_0^{2\arccos x} \frac{\rho \sin(t) dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} = \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1-\rho} \quad (26)$$

та

$$\int_0^{2\arccos x} \frac{2\rho(1-\cos t) dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} = 2\arccos x - \int_0^{2\arccos x} \frac{(1-\rho)^2 dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2}. \quad (27)$$

Оскільки

$$\frac{1-\rho^2}{1-2\rho \cos t + \rho^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(t + 2\arctg \frac{\rho \sin t}{1-\rho \cos t} \right), \quad (28)$$

то

$$\int_0^{2 \arccos x} \frac{(1-\rho^2) dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} = 2 \arccos x + 2 \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2}. \quad (29)$$

Підставляючи результат (29) у формулу (27), матимемо

$$\int_0^{2 \arccos x} \frac{(1-\cos t) dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2} = \frac{2 \arccos x}{1+\rho} - \frac{1-\rho}{\rho(1+\rho)} \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2}. \quad (30)$$

За наявності інтегралів (26) та (30) можна обчислити перший інтеграл у правій частині (25). Другий інтеграл у правій частині (25) отримується з першого інтеграла, замінюючи x на $-x$. Тоді маємо

$$\begin{aligned} I_1(\rho, x) + I_2(\rho, x) &= \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\rho} \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}}{1-\rho} + \\ &+ \frac{2x}{1+\rho} \left\{ \pi - 2 \arccos x + \left(\frac{1}{\rho} - 1 \right) \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Сума інтегралів (23) та (24) дає змогу дійти результату

$$\begin{aligned} I_3(\rho, x) + I_4(\rho, x) &= \int_0^{2 \arccos x} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t - x(1-\cos t) \right\} dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} + \\ &+ \int_0^{2 \arccos(-x)} \frac{\left\{ \sqrt{1-x^2} \sin t + x(1-\cos t) \right\} dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Для подальших обрахунків задіємо інтеграли

$$\int_0^{2 \arccos x} \frac{2\rho \sin(t) dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} = \frac{1}{(1-\rho)^2} - \frac{1}{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2} \quad (33)$$

та

$$\int_0^{2 \arccos x} \frac{(1+\rho)^2 (1-\cos t) dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} = -\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2} + \int_0^{2 \arccos x} \frac{dt}{1-2\rho \cos t + \rho^2}. \quad (34)$$

Підставляючи результат (29) у формулу (34), матимемо

$$\begin{aligned} \int_0^{2 \arccos x} \frac{(1+\rho)^2 (1-\cos t) dt}{(1-2\rho \cos t + \rho^2)^2} &= \frac{2}{1-\rho^2} \left(\arccos x + \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2} \right) - \\ &- \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{(1+\rho)^2 - 4\rho x^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

За наявності інтегралів (33) та (35) вже можна обчислити перший інтеграл у правій частині (32). Другий інтеграл у правій частині (32) отримуємо з першого інтеграла, замінюючи x на $-x$. Тоді маємо

$$I_3(\rho, x) + I_4(\rho, x) = \frac{4\sqrt{1-x^2}}{(1-\rho^2)^2} + \frac{2x}{(1-\rho)(1+\rho)^3} \left(\pi - 2 \arccos x - 2 \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2} \right). \quad (36)$$

Далі підставляємо величини (31) та (36) у праву частину тотожності (14), внаслідок чого ми повертаємося до результату (9). Теорему доведено.

Наслідок 1. Якщо $s=0$, то формула (9) перетворюється на результат

$$\mathcal{E}(H^1; P(\rho; x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi\rho} (1-\rho^2) \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho x^2}}{1-\rho} + \frac{x}{\pi} (1-\rho)(\pi-2\arccos x) + \frac{x}{\pi\rho} (1-\rho)^2 \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2}, \quad (37)$$

який був отриманий в роботі [27] для гармонійного інтеграла Чебишева–Пуассона.

Наслідок 2. Якщо $s=\frac{1}{2}$ та $q=1$, то з використанням формули (9) можна отримати формулу

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(H^1; B(\rho; x)) &= \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} (1-\rho^2) + \\ &+ \frac{x}{2\pi\rho} (1-\rho)^2 [2-(1+\rho)^2] \operatorname{arctg} \frac{2\rho x \sqrt{1-x^2}}{1+\rho-2\rho x^2} + \\ &+ \frac{\sqrt{1-x^2}}{2\pi\rho} (1-\rho^2)^2 \ln \frac{\sqrt{(1+\rho)^2-4\rho x^2}}{1-\rho} + \\ &+ \frac{x}{2\pi} (2+\rho)(1-\rho)^2 (\pi-2\arccos x), \end{aligned} \quad (38)$$

яка є узагальненням результатів для бігармонійного інтеграла Чебишева–Пуассона.

ВИСНОВКИ

Унаслідок гармонійного поєднання методів теорії наближень [33] і теорії оптимальних рішень у роботі розглянуто задачу оптимізаційного характеру для узагальненого оператора Чебишева–Пуассона на класах функцій Гельдера H^1 . Оскільки розглянутий у дослідженні оператор (7) має дельтаподібне ядро [34, 35], то він може широко застосовуватися для розв’язування багатьох задач варіаційного числення, задач теорії керування, ігрових задач динаміки [36, 37] тощо.

Знайдено не асимптотичну, а точну рівність для відхилення функцій класу Гельдера H^1 від узагальненого інтеграла Чебишева–Пуассона. Причому наближувальний агрегат (7) є додатним оператором, функціоналом визначеної на відрізку $[-1; 1]$ функції $f(x)$, що свідчить про можливість їхнього застосування в теорії оптимальних рішень. А це, в свою чергу, є підтвердженням актуальності багатьох уже розв’язаних прикладних задач [38–43], які можна використувати в майбутніх наукових дослідженнях.

1. Chikrii A.A., Matychyn I.I., Chikrii K.A. Differential games with impulse control. *Annals of the International Society of Dynamic Games*. 2007. Vol. 9. P. 37–55. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4553-3_2.
2. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Computers & Mathematics with Applications*. 2002. Vol. 44, Iss. 7. P. 835–851. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(02\)00197-9](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(02)00197-9).
3. Chikrii A.A., Belousov A.A. On linear differential games with integral constraints. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 269, Suppl. 1. P. 69–80. <https://doi.org/10.1134/S0081543810060076>.
4. Bushev D.N., Kharkevich Yu.I. Finding solution subspaces of the Laplace and Heat equations isometric to spaces of real functions, and some of their applications. *Mathematical Notes*. 2018. Vol. 103, N 5–6. P. 869–880. <https://doi.org/10.1134/S0001434618050231>.
5. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Some asymptotic properties of the solutions of Laplace equations in a unit disk. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 3. P. 449–456. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00579-x>.
6. Abdullayev F.G., Bushev D.M., Imashkyzy M., Kharkevych Yu.I. Isometry of the subspaces of solutions of systems of differential equations to the spaces of real functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2020. Vol. 71, N 8. P. 1153–1172. <https://doi.org/10.1007/s11253-019-01705-9>.
7. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of continuous functions given on the real axis by three-harmonic Poisson operators. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2023. Vol. 274, N 3. P. 327–339. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06603-x>.
8. Kal'chuk I., Kharkevych Yu. Approximation properties of the generalized Abel–Poisson integrals on the Weyl–Nagy classes. *Axioms*. 2022. Vol. 11, Iss. 4. P. 161. <https://doi.org/10.3390/axioms11040161>.
9. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. On approximation of functions from the class $L_{\beta,1}^{\psi}$ by the Abel–Poisson integrals in the integral metric. *Carpathian Mathematical Publications*. 2022. Vol. 14, Iss. 1. P. 223–229. <https://doi.org/10.15330/cmp.14.1.223-229>.
10. Kal'chuk I.V., Kharkevych Yu.I. Approximation of the classes $W_{\beta,\infty}^R$ by generalized Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2022. Vol. 74, N 4. P. 575–585. <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02084-4>.
11. Shutovskiy A.M., Sakhnyuk V.Ye. Representation of Weierstrass integral via Poisson integrals. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2021. Vol. 259, N 1. P. 97–103. <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05602-0>.
12. Hrabova U.Z., Kal'chuk I.V. Approximation of classes $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by three-harmonic Poisson integrals in uniform metric (low smoothness). *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2022. Vol. 268, N 2. P. 178–191. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06190-3>.
13. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Complete asymptotics of the deviation of a class of differentiable functions from the set of their harmonic Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2002. Vol. 54, N 1. P. 51–63. <https://doi.org/10.1023/A:1019789402502>.
14. Kharkevych Yu.I. Exact values of the approximations of differentiable functions by Poisson–Type integrals. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 2. P. 274–282. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00561-7>.
15. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of (ψ, β) – differentiable functions defined on the real axis by Abel–Poisson operators. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2005. Vol. 57, N 8. P. 1297–1315. <https://doi.org/10.1007/s11253-005-0262-z>.

16. Shutovskiy A.M. Some applied aspects of the Dirac delta function. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2023. Vol. 276, N 5. P. 685–694. <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06790-7>.
17. Kharkevych Yu.I. On some asymptotic properties of solutions to biharmonic equations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 2. P. 251–258. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00457-y>.
18. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of (ψ, β) -differentiable functions of low smoothness by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2012. Vol. 63, N 12. P. 1820–1844. <https://doi.org/10.1007/s11253-012-0616-2>.
19. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Approximating properties of biharmonic Poisson operators in the classes $\tilde{L}_{\beta,1}^{\psi}$. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2017. Vol. 69, N 5. P. 757–765. <https://doi.org/10.1007/s11253-017-1393-8>.
20. Shutovskiy A.M., Sakhnyuk V.Ye. Taylor series of biharmonic Poisson integral for upper half-plane. *Journal of Mathematical Sciences (United States)*. 2022. Vol. 268, N 2. P. 239–246. <https://doi.org/10.1007/s10958-022-06195-y>.
21. Pilipenko Yu.V., Chikrij A.A. The oscillation processes of conflict control. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1993. Vol. 57, Iss. 3. P. 3–14.
22. Vlasenko L.A., Rutkas A.G., Semenets V.V., Chikrii A.A. On the optimal impulse control in descriptor systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 5. P. 1–15. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i5.10>.
23. Kharkevych Yu.I. Asymptotic expansions of upper bounds of deviations of functions of class W^r from their generalized Poisson integrals. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, N 8. P. 38–49. <https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v50.i8.40>.
24. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo T.V. Approximation of functions from the class $\hat{C}_{\beta,\infty}^{\psi}$ by Poisson biharmonic operators in the uniform metric. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2008. Vol. 60, N 5. P. 769–798. <https://doi.org/10.1007/s11253-008-0093-9>.
25. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of functions from the classes $C_{\beta,\infty}^{\psi}$ by biharmonic Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2011. Vol. 63, N 7. P. 1083–1107. <https://doi.org/10.1007/s11253-011-0565-1>.
26. Kharkevych Yu.I., Zhyhallo, T.V. Approximation of functions defined on the real axis by operators generated by λ -methods of summation of their Fourier integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2004. Vol. 56, N 9. P. 1509–1525. <https://doi.org/10.1007/s11253-005-0130-x>.
27. Русецкий Ю.И. О приближении непрерывных на отрезке функций суммами Абеля — Пуассона. *Сибирский математический журнал*. 1968. Т. 9, № 1. С. 136–144.
28. Батищев Д.И. Методы оптимального проектирования. Москва: Радио и связь, 1984. 248 с.
29. Kharkevych Yu.I. Approximative properties of the generalized Poisson integrals on the classes of functions determined by a modulus of continuity. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, Iss. 4. P. 43–54. <https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i4.40>.
30. Zhyhallo K.M., Kharkevych Yu.I. Approximation of conjugate differentiable functions by their Abel–Poisson integrals. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2009. Vol. 61, N 1. P. 86–98. <https://doi.org/10.1007/s11253-009-0196-y>.
31. Kharkevych Yu., Stepaniuk T. Approximate properties of Abel–Poisson integrals on classes of differentiable functions defined by moduli of continuity. *Carpathian Mathematical Publications*. 2023. Vol. 15, Iss. 1. P. 286–294. <https://doi.org/10.15330/cmp.15.1.286-294>.
32. Kharkevych Yu.I., Khanin O.G. Asymptotic properties of the solutions of higher-order differential equations on generalized Hölder classes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 4. P. 633–639. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00598-8>.

33. Kharkevych Yu.I. Approximation theory and related applications. *Axioms*. 2022. Vol. 11, Iss. 12. P. 736–738. <https://doi.org/10.3390/axioms11120736>.
34. Bushev D.M., Kharkevych Yu.I. Conditions of convergence almost everywhere for the convolution of a function with Delta–Shaped kernel to this function. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2016. Vol. 68, N 11. P. 1643–1661. <https://doi.org/10.1007/s11253-016-1180-y>.
35. Bushev D., Abdullayev F., Kal'chuk I., Imashkyzy M. The use of the isometry of function spaces with different numbers of variables in the theory of approximation of functions. *Carpathian Mathematical Publications*. 2021. Vol. 13, Iss. 3. P. 805–817. <https://doi.org/10.15330/cmp.13.3.805-817>.
36. Chikrii A.A., Prokopovich P.V. Simple pursuit of one evader by a group. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1992. Vol. 28, N 3. P. 438–444. <https://doi.org/10.1007/BF01125424>.
37. Chikrij A.A., Bezmagorychnyj V.V. Method of resolving functions in linear differential games with integral restrictions. *Soviet Automatic Control*. 1993. Iss. 4. P. 26–36.
38. Zhyhallo T.V., Kharkevych Yu.I. Fourier transform of the summatory Abel–Poisson function. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 6. P. 957–965. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00530-0>.
39. Serdyuk A.S., Hrabova U.Z. Order estimates of the uniform approximations by Zygmund sums on the classes of convolutions of periodic functions. *Carpathian Mathematical Publications*. 2021. Vol. 13, Iss. 1. P. 68–80. <https://doi.org/10.15330/cmp.13.1.68-80>.
40. Zajac J., Korenkov M.E., Kharkevych Yu.I. On the asymptotics of some Weierstrass functions. *Ukrainian Mathematical Journal*. 2015. Vol. 67, N 1. P. 154–158. <https://doi.org/10.1007/s11253-015-1070-8>.
41. Chikrii A.A., Rappoport I.S., Chikrii K.A. Multivalued mappings and their selectors in the theory of conflict-controlled processes. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, N 5. P. 719–730. <https://doi.org/10.1007/s10559-007-0097-8>.
42. Prokopovich P.V., Chikrii A.A. A linear evasion problem for interacting groups of objects. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1994. Vol. 58, Iss. 4. P. 583–591. [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(94\)90135-X](https://doi.org/10.1016/0021-8928(94)90135-X).
43. Chikrij A.A., Dzyubenko K.G. Bilinear Markovian processes of search for moving objects. *Problemy Upravleniya i Informatiki (Avtomatika)*. 1997. N 1. P. 92–106.

A.Yu. Mishchuk, A.M. Shutovskiy

ON THE OPTIMIZATION PROPERTIES OF GENERALIZED CHEBYSHEV–POISSON INTEGRALS

Abstract. Chebyshev polynomials of the first kind are used to construct the generalized Chebyshev–Poisson integral. The optimization problem for the generalized Chebyshev–Poisson operator as a functional of a function defined on a segment is solved, and its approximate properties on Hölder classes H^1 are analyzed. An exact equality is obtained for the deviation of Hölder class functions from the generalized Chebyshev–Poisson integral.

Keywords: Chebyshev polynomials, generalized Chebyshev–Poisson integral, class of Hölder functions, optimization problem.

Надійшла до редакції 22.01.2024