

І. БОРАЧОК

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: ihor.borachok@lnu.edu.ua.

О. ПАЛЯНИЦЯ

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: oksana.palanytsia@lnu.edu.ua.

Р. ХАПКО

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: roman.chapko@lnu.edu.ua.

**МЕТОД РАДІАЛЬНИХ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ
ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО
РІВНЯННЯ ДИФУЗІЇ З НЕЛОКАЛЬНИМИ ЕФЕКТАМИ**

Анотація. Розглянуто метод радіальних функцій для наближеного розв'язання інтегро-диференціального рівняння з частинними похідними. Для апроксимації точного розв'язку використано лінійну комбінацію радіальних базисних функцій у певних центральних точках та лінійну комбінацію поліноміальних базисних функцій. Запропоновано розташування центральних точок як для дво-, так і для тривимірних областей. Колокація в центральних вузлах дає напівдискретну схему з інтегральними коефіцієнтами, для обчислення яких використано квадратурні формули Гаусса–Лежандра та трапецій. Для визначення параметра форми застосовано генетичний алгоритм. Наведено чисельні розрахунки для дво- та тривимірних областей, що підтверджують ефективність запропонованого алгоритму.

Ключові слова: еліптичне інтегро-диференціальне рівняння з частинними похідними, радіальні базисні функції, поліноміальний базис, генетичний алгоритм.

ВСТУП

Інтегро-диференціальні рівняння з частинними похідними (ІДРЧП) є потужним інструментом для моделювання широкого класу складних явищ у різних наукових та інженерних галузях. Їхня здатність урахувати складні взаємодії між диференціальною та інтегральною поведінкою робить їх особливо придатними для опису процесів, що включають ефекти пам'яті, дисперсію та нелокальні взаємодії. У цій статті застосовано метод радіальних базисних функцій (РБФ) у поєднанні з методом колокації та квадратурними формулами для чисельного розв'язування ІДРЧП.

Процеси дифузії дуже поширені у природі, оскільки вони пов'язані з розповсюдженням речовини, енергії та інформації в різноманітних системах. Традиційними математичними моделями дифузії є крайові задачі для диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП). Цей підхід забезпечує ефективну основу для розуміння локальної взаємодії та переносу. Однак багато процесів у реальному світі відбуваються в матеріалах і системах, де частинки взаємодіють за межами їхньої безпосередньої близькості, що призводить до явищ нелокальної дифузії. Розширення математичних моделей з урахуванням ефектів нелокальної дифузії не можна адекватно описати класичними ДРЧП. У цих випадках включення інтегральних доданків в ІДРЧП дає змогу врахувати вплив віддалених частинок на рух окремих елементів у середовищі. Конкретними прикладами застосування нелокальної дифузії є транспорт у пористих середовищах (як модель, що враховує рух частинок через взаємопов'язані пори у взаємодії з віддаленими порами [1]), біологічні системи (як модель поширення молекул, іонів та інших речовин у біологічних тканинах, де взаємодія відбувається на більшій відстані [2]), фінансові ринки та ціноутворення [3, 4] тощо.

© І. Борачок, О. Паляниця, Р. Хапко, 2024

Розглянемо крайову задачу для ІДРЧП з нелокальною дифузією. Нехай $D \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, — область з межею Γ . Потрібно знайти функцію $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє ІДРЧП

$$-\Delta u(\mathbf{x}) + \int_D k(\mathbf{x}, \mathbf{z}) u(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in D, \quad (1)$$

та крайову умову Діріхле

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2)$$

де $k: D \times D \rightarrow \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ та $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ — задані функції.

Геометрія області D , інтегральне ядро k , функція джерела f та межева функція g залежать від природи взаємодії у досліджуваній фізичній системі. Припустимо, що область D обмежена, а функції k , f та g достатньо гладкі, так що задача (1), (2) є коректно поставленою [5].

Для наближеного розв'язання крайової задачі (1), (2) можна застосувати метод скінченних елементів (МСЕ) [1, 6, 7]. Однак у цьому випадку відповідне слабке формулювання містить кратні інтеграли по області $D \times D$, що призводить до значних обчислювальних витрат. Аналогічні проблеми виникають і у разі застосування методу інтегральних рівнянь. Крім того, у цьому випадку з'являються додаткові труднощі, пов'язані з обчисленням сингулярних або майже сингулярних інтегралів (див. [5]). У тривимірних областях обчислення ще складніші (див., напр., у [8] застосування методу інтегральних рівнянь для розв'язування крайових задач для рівняння Лапласа). Інші чисельні алгоритми ґрунтуються на методі скінченних різниць (див., напр., у [9] застосування багатосіткової техніки, а також нещодавно запропонований ієрархічно-матричний метод [10] для дво- та тривимірних областей). Ці методи придатні переважно для регулярних областей.

У цій роботі розглянуто безсітковий метод, який можна легко застосувати для багатовимірних областей або областей зі складною геометрією. Задачу (1), (2) дискретизовано за допомогою методу РБФ та квадратурних формул. У підході на основі РБФ невідому функцію апроксимовано за допомогою лінійної комбінації радіальних функцій у центральних точках з наступним застосуванням методу колокації для визначення невідомих коефіцієнтів цієї РБФ-апроксимації. Використано класичний метод Канси (Kansa's method [11]), у якому центральні точки збігаються з вузлами колокації. Одержана система містить інтегральні коефіцієнти, які наближено обчислено за допомогою квадратурних формул Гаусса–Лежандра та трапецій [12]. РБФ-апроксимація містить параметр форми, вибір якого є дуже важливим для точності методу. Загалом параметр вибирають методом спроб і помилок або з використанням більш досконалої техніки перехресної перевірки [13, 14]. У цій роботі досліджено застосування генетичного алгоритму [15, 16] для стохастичного пошуку параметра форми.

Стаття має таку структуру. У розд. 1 побудовано РБФ-метод для розв'язування задачі (1), (2) та описано розташування центральних точок для дво- та тривимірних областей. У розд. 2 застосовано квадратурні формули для обчислення інтегральних коефіцієнтів. Техніку вибору параметра форми, що ґрунтується на генетичному алгоритмі, запропоновано в розд. 3. Чисельні розрахунки для дво- та тривимірних областей наведено в розд. 4; одержані результати підтверджують застосовність розглянутого підходу. Висновки та коментарі наведено в розділі «Висновки».

1. РБФ-МЕТОД ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ІДРЧП

1.1. Застосування РБФ-методу. Нехай $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — радіальна функція, тобто функція, значення якої в кожній точці залежить від відстані між цією точкою

та деякою фіксованою точкою — центральною точкою. Відомо багато типів радіальних функцій (див., напр., [17]), які використовують для побудови базисних функцій у проєкційних методах. Найбільш поширеними є такі:

$$\varphi(r) = \begin{cases} e^{-(\varepsilon r)^2} & (\text{Гаусова}), \\ \sqrt{1 + (\varepsilon r)^2} & (\text{мультиквадратична}), \\ r^\beta, \beta = 1, 3, 5, \dots & (\text{радіальних степенів}), \end{cases} \quad (3)$$

де $\varepsilon > 0$ — параметр форми. Як зазначено вище, вибір цього параметра істотно впливає на точність. Малі значення параметра часто дають кращі результати, однак призводять до погано обумовлених матриць. Обговорення вибору параметра наведено в наступному розділі.

Згідно з [11, 18] розв'язок u задачі (1), (2) апроксимовано лінійною комбінацією РБФ та поліноміальними базисними функціями:

$$u(\mathbf{x}) \approx u_n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|) + \sum_{l=1}^q \beta_l p_l(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{D}, \quad (4)$$

де $n, q \in \mathbb{N}$, $n \gg q$, $|\cdot|$ — евклідова відстань, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$, та $\beta_l \in \mathbb{R}$, $l = 1, 2, \dots, q$, — невідомі коефіцієнти. Поліноми p_l , $l = 1, 2, \dots, q$, є одночленими базисними функціями в $\mathbb{R}^d$:

$$\{1, x_1, x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2, \dots\} \text{ для } d=2, \mathbf{x} = (x_1, x_2), \quad (5)$$

$$\{1, x_1, x_2, x_3, x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3, x_1^2 x_2, x_1^2 x_3, x_2^2 x_3, \dots\} \text{ для } d=3, \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Згідно з традиційним методом Канси [11, 19] центральні точки $\mathbf{x}_j$, $j = 1, 2, \dots, n$, належить вибирати всередині області: $\mathbf{x}_j \in D$, $j = 1, 2, \dots, \tilde{n}$, $\tilde{n} \in \mathbb{N}$, $\tilde{n} < n$, та на її межі: $\mathbf{x}_j \in \Gamma$, $j = \tilde{n} + 1, \dots, n$. Обговорення розташування центральних точок наведено в підрозд. 1.2.

Апроксимація (4) повинна задовольняти ІДРЧП (1) у точках колокації в області D та крайову умову (2) у точках колокації на межі Γ . Точки колокації збігаються з центральними точками. Тоді невідомі коефіцієнти α_j , $j = 1, 2, \dots, n$, та β_l , $l = 1, 2, \dots, q$, є розв'язками такої напівдискретної системи:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \alpha_j (F_{i,j}^{(1)} + K_{i,j}^{(1)}) + \sum_{l=1}^q \beta_l (F_{i,l}^{(2)} + K_{i,l}^{(2)}) = f(\mathbf{x}_i), & i = 1, \dots, \tilde{n}, \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) + \sum_{l=1}^q \beta_l p_l(\mathbf{x}_i) = g(\mathbf{x}_i), & i = \tilde{n} + 1, \dots, n, \\ \sum_{j=1}^{\tilde{n}} \alpha_j (F_{j,l}^{(2)} + K_{j,l}^{(2)}) + \sum_{j=\tilde{n}+1}^n \alpha_j p_l(\mathbf{x}_i) = 0, & l = 1, \dots, q, \end{cases} \quad (6)$$

з коефіцієнтами

$$F_{i,j}^{(1)} = -\Delta \varphi_{\mathbf{x}}(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$F_{i,l}^{(2)} = -\Delta p_{l,\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_i}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad l = 1, \dots, q,$$

та

$$\begin{aligned} K_{i,j}^{(1)} &= \int_D k(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) \varphi(|\mathbf{z} - \mathbf{x}_j|) d\mathbf{z}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad j = 1, \dots, n, \\ K_{i,l}^{(2)} &= \int_D k(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}) p_l(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad l = 1, \dots, q. \end{aligned} \quad (7)$$

Останній набір рівнянь у системі (6) є умовою однозначної поліноміальної інтерполяції [18, 20]. Наближене обчислення коефіцієнтів $K_{i,j}^{(\ell)}$ за допомогою відповідних квадратурних формул розглянуто в підрозд. 2.1.

1.2. Розташування центральних точок.

1.2.1. Двовимірний випадок. Не обмежуючи загальності, припустимо, що межа крива Γ має таку параметризацію:

$$\Gamma = \{\gamma(s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s)), s \in [0, 2\pi]\}. \quad (8)$$

Центральні точки на кривій Γ розташовані рівномірно за правилом

$$\mathbf{x}_j^b = \gamma(s_j), \quad s_j = \frac{2\pi}{m} j, \quad j = 1, \dots, m \quad (m \in \mathbb{N}). \quad (9)$$

Для розташування центральних точок усередині області D згенеруємо $M \in \mathbb{N}$ кривих

$$\tilde{\Gamma}_\ell = \{\tilde{\eta}_\ell \gamma(s), s \in [0, 2\pi]\}, \quad \ell = 1, \dots, L \quad (L \in \mathbb{N}),$$

де $\tilde{\eta}_\ell = \frac{1}{L+1} \ell$, $\ell = 1, \dots, L$, — параметри зменшення.

Центральні точки всередині області D рівномірно розташовані на зменшених кривих $\tilde{\Gamma}_\ell$ за правилом

$$\mathbf{x}_{\ell,j}^d = \tilde{\eta}_\ell \gamma(s_j), \quad s_j = \frac{2\pi}{\tilde{m}_\ell} j, \quad \ell = 1, \dots, L, \quad j = 1, \dots, \tilde{m}_\ell, \quad (10)$$

де $\tilde{m}_\ell = [\tilde{\eta}_\ell m]$ — кількість центральних точок на кривій $\tilde{\Gamma}_\ell$, $[\xi]$ — ціла частина числа ξ .

Остаточно одержуємо таку множину центральних точок:

$$\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n = \{\mathbf{x}_{\ell,j}^d\}_{\ell=1, j=1}^{L, \tilde{m}_\ell} \cup \{\mathbf{x}_j^b\}_{j=1}^m, \quad (11)$$

де $\tilde{n} = \sum_{\ell=1}^L \tilde{m}_\ell$ — кількість центральних точок усередині області D , а $n = \tilde{n} + m$ — загальна кількість центральних точок.

1.2.2. Тривимірний випадок. Припустимо, що межа поверхня Γ параметризована так:

$$\Gamma = \{\gamma(\theta, \varphi) = (\gamma_1(\theta, \varphi), \gamma_2(\theta, \varphi), \gamma_3(\theta, \varphi)), \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]\}. \quad (12)$$

Центральні точки на поверхні Γ рівномірно розташовані за правилом

$$\mathbf{x}_{j_1, j_2}^b = \gamma(\theta_{j_1}, \varphi_{j_2}), \quad \theta_{j_1} = \frac{\pi}{m_1 + 1} j_1, \quad \varphi_{j_2} = \frac{2\pi}{m_2} j_2, \quad j_1 = 1, \dots, m_1, \quad j_2 = 1, \dots, m_2, \quad (13)$$

де $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, а $m = m_1 m_2$ — загальна кількість центральних точок на межі.

Як і у двовимірному випадку, центральні точки всередині області рівномірно розташовані на зменшених штучних поверхнях за правилом

$$\mathbf{x}_{\ell, j_1, j_2}^d = \tilde{\eta}_\ell \gamma(\theta_{j_1}, \varphi_{j_2}), \quad \ell = 1, \dots, L, \quad j_1 = 1, \dots, \tilde{m}_{\ell, 1}, \quad j_2 = 1, \dots, \tilde{m}_{\ell, 2}, \quad (14)$$

де $\tilde{\eta}_\ell = \frac{1}{L+1} \ell$, $\theta_{j_1} = \frac{\pi}{\tilde{m}_{\ell, 1} + 1} j_1$, $\varphi_{j_2} = \frac{2\pi}{\tilde{m}_{\ell, 2}} j_2$; $L \in \mathbb{N}$ — кількість зменшених

штучних поверхонь, $\tilde{m}_{\ell, 1} = [\tilde{\eta}_\ell m_1]$, $\tilde{m}_{\ell, 2} = [\tilde{\eta}_\ell m_2]$, а $\tilde{n} = \sum_{\ell=1}^L \tilde{m}_{\ell, 1} \tilde{m}_{\ell, 2}$ — загальна кількість центральних точок в області.

Отже, у тривимірному випадку множина центральних точок має вигляд

$$\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n = \{\mathbf{x}_{\ell,j_1,j_2}^d\}_{\ell=1,j_1=1,j_2=1}^{L,\tilde{m}_{\ell,1},\tilde{m}_{\ell,2}} \cup \{\mathbf{x}_{j_1,j_2}^b\}_{j_1=1,j_2=1}^{m_1,m_2}, \quad (15)$$

де $n = \tilde{n} + m$ — загальна кількість центральних точок.

Є також інші способи розташування центральних точок. Один із них ґрунтується на так званому підході фіктивних центрів та демонструє дуже точні результати [13, 14].

2. ПОВНА ДИСКРЕТИЗАЦІЯ

Система (6) містить інтегральні коефіцієнти $K_{i,j}^{(1)}$ і $K_{i,j}^{(2)}$, що мають бути обчислені наближено. Нижче розглянуто параметризацію кратних інтегралів та застосування належних квадратурних формул.

2.1. Дискретизація кратних інтегралів.

2.1.1. Двовимірний випадок. Припустимо, що межева крива Γ параметризована як у (8) і для області D існує взаємно однозначне відображення

$$\tilde{\rho}(\rho, t) = \rho\gamma(t): \Pi \rightarrow D, \quad \Pi = [0, 1) \times [0, 2\pi).$$

Тоді кратні інтеграли в (7) можна записати в параметричній формі

$$K_{i,j}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} k(\mathbf{x}_i, \rho\gamma(t)) \varphi(|\rho\gamma(t) - \mathbf{x}_j|) J(\rho, t) dt d\rho, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$K_{i,l}^{(2)} = \int_0^1 \int_0^{2\pi} k(\mathbf{x}_i, \rho\gamma(t)) p_l(\rho\gamma(t)) J(\rho, t) dt d\rho, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad l = 1, \dots, q,$$

$$J(\rho, t) = |\rho(\gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma_1'(t))|.$$

Для наближеного обчислення параметризованих кратних інтегралів розглянемо квадратурну формулу

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\rho, t) dt d\rho \approx \frac{\pi}{2M} \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=0}^{2M-1} \omega_{i'} \tilde{f}(\rho_{i'}, t_{j'}), \quad (16)$$

де $N, M \in \mathbb{N}$, $\rho_{i'} = \frac{1}{2}(\tilde{\rho}_{i'} + 1)$, а $\tilde{\rho}_{i'}, \omega_{i'}, i' = 1, \dots, N$, — відповідно вузли та ваги квадратурної формули Гаусса–Лежандра для проміжку $[-1, 1]$, $t_{j'} = \frac{\pi j'}{M}$,

$j' = 0, \dots, 2M - 1$. Ця квадратура отримана шляхом застосування формули Гаусса–Лежандра за змінною ρ та формули трапецій за змінною t .

Тоді для інтегралів отримуємо апроксимацію

$$K_{i,j}^{(1)} \approx \tilde{K}_{i,j}^{(1)} = \frac{\pi}{2M} \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=0}^{2M-1} \omega_{i'} k(\mathbf{x}_i, \rho_{i'}\gamma(t_{j'})) \varphi(|\rho_{i'}\gamma(t_{j'}) - \mathbf{x}_j|) J(\rho_{i'}, t_{j'}), \quad (17)$$

$$i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$K_{i,l}^{(2)} \approx \tilde{K}_{i,l}^{(2)} = \frac{\pi}{2M} \sum_{i'=1}^N \sum_{j'=0}^{2M-1} \omega_{i'} k(\mathbf{x}_i, \rho_{i'}\gamma(t_{j'})) p_l(\rho_{i'}\gamma(t_{j'})) J(\rho_{i'}, t_{j'}), \quad (18)$$

$$i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad l = 1, \dots, q.$$

2.1.2. Тривимірний випадок. Припустимо, що межа поверхня Γ параметризована як у (12) і для області D існує взаємно однозначне відображення

$$\tilde{\mathbf{p}}(\rho, \theta, \varphi) = \rho \boldsymbol{\gamma}(\theta, \varphi): \Pi \rightarrow D, \quad \Pi = [0, 1) \times [0, \pi) \times [0, 2\pi).$$

Тоді кратні інтеграли в (7) можна записати в параметричній формі

$$K_{i,j}^{(1)} = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k(\mathbf{x}_i, \rho \boldsymbol{\gamma}(\theta, \varphi)) \varphi(|\rho \boldsymbol{\gamma}(\theta, \varphi) - \mathbf{x}_j|) J(\rho, \theta, \varphi) d\varphi d\theta d\rho, \\ i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad j = 1, \dots, n,$$

$$K_{i,l}^{(2)} = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} k(\mathbf{x}_i, \rho \boldsymbol{\gamma}(\theta, \varphi)) p_l(\rho \boldsymbol{\gamma}(\theta, \varphi)) J(\rho, \theta, \varphi) d\varphi d\theta d\rho, \quad i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad l = 1, \dots, q,$$

$$J(\rho, \theta, \varphi) = |\det \tilde{\mathbf{J}}(\rho, \theta, \varphi)|, \quad \text{де}$$

$$\tilde{\mathbf{J}}(\rho, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \gamma_1(\theta, \varphi) & \rho \gamma'_{1,\theta}(\theta, \varphi) & \rho \gamma'_{1,\varphi}(\theta, \varphi) \\ \gamma_2(\theta, \varphi) & \rho \gamma'_{2,\theta}(\theta, \varphi) & \rho \gamma'_{2,\varphi}(\theta, \varphi) \\ \gamma_3(\theta, \varphi) & \rho \gamma'_{3,\theta}(\theta, \varphi) & \rho \gamma'_{3,\varphi}(\theta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Для наближеного обчислення параметризованих кратних інтегралів розглянемо квадратурну формулу

$$\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\rho, \theta, \varphi) d\varphi d\theta d\rho \approx \frac{\pi^2}{4M} \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{l'=1}^{N_2} \sum_{j'=0}^{2M-1} \omega_{i'} \tilde{\omega}_{l'} \tilde{f}(\rho_{i'}, \theta_{l'}, \varphi_{j'}), \quad (19)$$

де $N_1, N_2, M \in \mathbb{N}$, $\rho_{i'} = (\tilde{\rho}_{i'} + 1) / 2$, $\theta_{l'} = \pi(\tilde{\theta}_{l'} + 1) / 2$, а $\tilde{\rho}_{i'}, \omega_{i'}, i' = 1, \dots, N_1$, $\tilde{\theta}_{l'}, \tilde{\omega}_{l'}, l' = 1, \dots, N_2$, — вузли та ваги квадратурної формули Гаусса–Лежандра для проміжку $[-1, 1]$ з N_1 та N_2 вузлами відповідно, $\varphi_{j'} = \frac{\pi j'}{M}$, $j' = 0, \dots, 2M - 1$.

Тоді для інтегралів отримуємо апроксимацію

$$K_{i,j}^{(1)} \approx \tilde{K}_{i,j}^{(1)} = \frac{\pi^2}{4M} \times \\ \times \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{l'=1}^{N_2} \sum_{j'=0}^{2M-1} \omega_{i'} \tilde{\omega}_{l'} k(\mathbf{x}_i, \rho_{i'} \boldsymbol{\gamma}(\theta_{l'}, \varphi_{j'})) \varphi(|\rho_{i'} \boldsymbol{\gamma}(\theta_{l'}, \varphi_{j'}) - \mathbf{x}_j|) J(\rho_{i'}, \theta_{l'}, \varphi_{j'}), \quad (20) \\ i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad j = 1, \dots, n;$$

$$K_{i,l}^{(2)} \approx \tilde{K}_{i,l}^{(2)} = \frac{\pi^2}{4M} \times \\ \times \sum_{i'=1}^{N_1} \sum_{l'=1}^{N_2} \sum_{j'=0}^{2M-1} \omega_{i'} \tilde{\omega}_{l'} k(\mathbf{x}_i, \rho_{i'} \boldsymbol{\gamma}(\theta_{l'}, \varphi_{j'})) p_l(\rho_{i'} \boldsymbol{\gamma}(\theta_{l'}, \varphi_{j'})) J(\rho_{i'}, \theta_{l'}, \varphi_{j'}), \quad (21) \\ i = 1, \dots, \tilde{n}, \quad l = 1, \dots, q.$$

2.2. Дискретна система. Отримавши для інтегральних коефіцієнтів формули (17), (18) та (20), (21), дістанемо з (6) повністю дискретизовану $(n + q) \times (n + q)$ систему лінійних рівнянь, яка в матричній формі має вигляд

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_d & \mathbf{P}_d \\ \mathbf{A}_b & \mathbf{P}_b \\ \mathbf{P}_d^T & \mathbf{P}_b^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

де $\boldsymbol{\alpha}_j = \alpha_j$, $j = 1, \dots, n$, $\boldsymbol{\beta}_j = \beta_j$, $j = 1, \dots, q$; $\mathbf{f}_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, \tilde{n}$, $\mathbf{g}_i = g(x_{\tilde{n}+i})$, $i = 1, \dots, m$, а $\mathbf{0}$ — q -координатний нуль-вектор. Елементи підматриць задані формулами

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_d)_{i,j} &= F_{i,j}^{(1)} + \tilde{K}_{i,j}^{(1)}, \quad i=1, \dots, \tilde{n}, \quad j=1, \dots, n, \\
(\mathbf{A}_b)_{i,j} &= \varphi(|\mathbf{x}_{\tilde{n}+i} - \mathbf{x}_j|), \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, n, \\
(\mathbf{P}_d)_{i,j} &= F_{i,j}^{(2)} + \tilde{K}_{i,j}^{(2)}, \quad i=1, \dots, \tilde{n}, \quad j=1, \dots, q, \\
(\mathbf{P}_b)_{i,j} &= p_j(\mathbf{x}_{\tilde{n}+i}), \quad i=1, \dots, m, \quad j=1, \dots, q.
\end{aligned}$$

Знайшовши коефіцієнти α_j і β_l із системи (22) методом Гаусса, одержимо наближений розв'язок задачі (1), (2) за формулою (4).

3. ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРА ФОРМИ ЗА ДОПОМОГОЮ ГЕНЕТИЧНОГО АЛГОРИТМУ

Вибір параметра форми РБФ є важливим для досягнення оптимального результату. Для здійснення цього вибору було запропоновано декілька алгоритмів [13, 14]. Для визначення параметра форми у цьому розділі розглянуто дійснозначний генетичний алгоритм. Як відомо, генетичний алгоритм [15, 16] — це метод стохастичної оптимізації, який керує популяцією індивідів, представлених у вигляді дійсних чисел. Щоб порівняти індивіди, потрібно визначити функцію допасованості (вартості), яка пов'язує з кожним індивідом певне додатне число. Мета генетичного алгоритму — знайти індивіда з найменшим значенням допасованості.

Генетичний алгоритм — це ітераційний метод, який починається з випадково згенерованої популяції індивідів і застосовує генетичні оператори для створення нової популяції на основі наявної. Індивідів, які дають нащадків для нової популяції, відбирають методом рулетки. Потомство створюється шляхом застосування оператора схрещування та нерівномірної мутації до вибраних батьківських індивідів (див. [16]). Крім того, використовується модель елітарності для просування найкращих індивідів до наступної популяції. Процес зупиняється у разі досягнення максимальної кількості ітерацій або відсутності покращення в межах попередньо визначеної кількості ітерацій.

Індивід, закодований дійсним числом, представляє шуканий параметр форми ε , після цього розглядається функція допасованості вигляду

$$\Xi(\hat{\varepsilon}) = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in \Gamma} |u_{\hat{n}, \hat{q}, \hat{\varepsilon}}(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})|^2}{\sum_{\mathbf{x} \in \Gamma} |g(\mathbf{x})|^2}, \quad (23)$$

де $u_{\hat{n}, \hat{q}, \hat{\varepsilon}}$ — наближений розв'язок задачі (1), (2), знайдений за формулою (4), коли невідомі коефіцієнти є розв'язками системи (22) для $\hat{n}$ центральних точок, поліноміального базису порядку $\hat{q}$ та параметра форми $\hat{\varepsilon}$. Параметри $\hat{n}$ і $\hat{q}$ є фіксованими та є параметрами генетичного алгоритму. Для обчислення похибки (23) генеруються тестові точки, рівномірно розташовані на межі Γ . Конфігурацію параметрів генетичного алгоритму наведено в розд. 4.

4. ЧИСЕЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ

Проілюструємо застосування запропонованого методу чотирма прикладами. У перших двох прикладах наведено результати для двовимірних областей, у наступних прикладах — для тривимірних. Крім того, у прикладі 1 продемонстровано переваги застосування поліноміального базису, а також хороші результати для вибраного за генетичним алгоритмом параметра форми. В усіх прикладах використано мультіквадратичні РБФ (3). Кількість вузлів квадратурних формул Гаусса–Лежандра та трапецій у (16) і (19) дорівнює $N = N_1 = N_2 = 8$ та $M = 32$ відповідно. Оцінку точності знайдено за формулою для

відносної похибки

$$E_n = \frac{\sum_{\mathbf{x} \in D} |u_n(\mathbf{x}) - u_{ex}(\mathbf{x})|^2}{\sum_{\mathbf{x} \in D} |u_{ex}(\mathbf{x})|^2}, \quad (24)$$

де u_n — наближений розв'язок, знайдений за формулою (4), а u_{ex} — точний розв'язок. Для обчислення похибки (24) згенеровано близько 3000 тестових вузлів, рівномірно розташованих в області D .

Для генетичного алгоритму використано такі параметри: розмір популяції — 20; максимальна кількість ітерацій — 50; максимальна кількість ітерацій без змін — 10; ймовірність схрещення — 80 %; ймовірність мутації — 10%; максимальний порядок поліноміального базису — $\hat{q} = 3$; кількість елітарних індивідів — 10 %; кількість центральних точок $\hat{n} = 55$ ($m = 14$, $L = 6$) для двовимірних областей і $\hat{n} = 66$ ($m_1 = m_2 = 6$, $L = 4$) для тривимірних областей; допустимий діапазон для параметра ε — $[0.1, 1.5]$.

Приклад 1. Межа плоскої області D (рис 1, *a*) є одиничним колом з такою параметризацією: $\Gamma = \{\gamma(s) = (\cos s, \sin s), s \in [0, 2\pi]\}$.

Розглянемо ядро $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$. Нехай функція

$$u_{ex}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - 1, \quad \mathbf{x} \in D,$$

є точним розв'язком. Тоді для межевої функції g маємо $g(\mathbf{x}) = u_{ex}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, а функцію джерела f одержуємо підстановкою точного розв'язку в рівняння (1) (подвійний інтеграл знайдено точно): $f(\mathbf{x}) = -\frac{\pi}{6}(3|\mathbf{x}|^2 + 1) - 4$, $\mathbf{x} \in D$.

Центральні вузли розташовані за правилом (11) і для $n = 54$ ($m = 16$, $L = 5$) зображені на рис. 1, *a*. Відносні похибки, обчислені за формулою (24) для різних степенів поліномів q та параметра $\varepsilon = 0.79$, наведено на рис. 2, *a*.

У разі $q = 0$ поліноміальний базис в апроксимації (4) не використовується. Проведені розрахунки свідчать про те, що для $q > 0$ результати є кращими та, до того ж, майже однаковими для $q = 3$ та $q = 5$. Тому в наступних прикладах для двовимірних областей використано поліноміальний базис степеня $q = 3$. На рис. 2, *б* наведено відносні похибки для різних значень параметра форми ε , якщо $q = 3$. Для малого значення $\varepsilon = 0.5$ та невеликого числа центральних точок n одержано хороші результати, однак зі збільшенням n результати є менш точними внаслідок поганої обумовленості системи (22). У разі $\varepsilon = 1.5$ збіжність

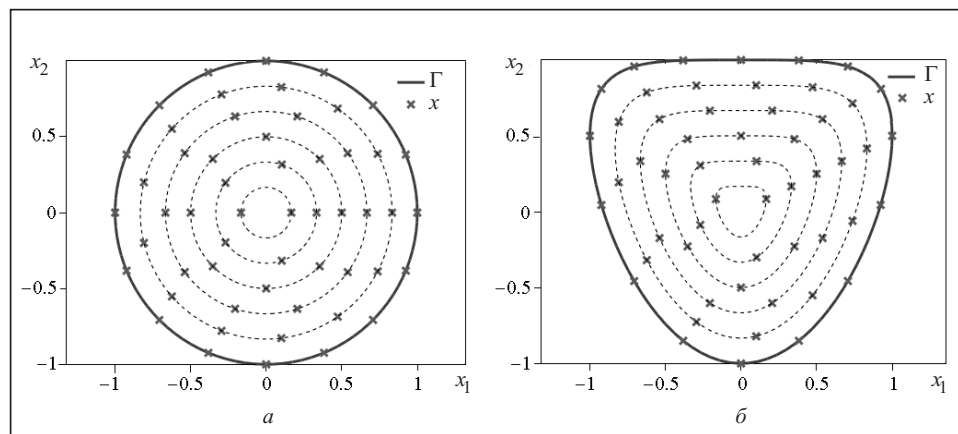


Рис. 1. Область D та розташування центральних вузлів: приклад 1 (*a*); приклад 2 (*б*)

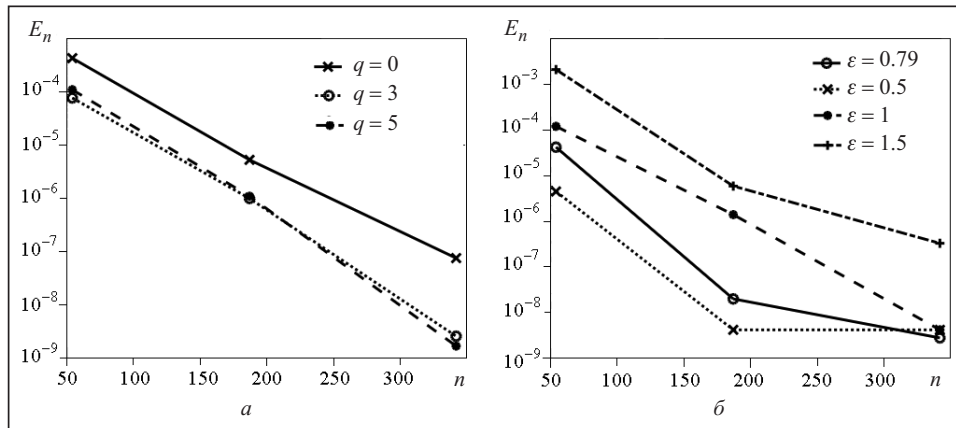


Рис. 2. Відносні похибки для різних q та ϵ у прикладі 1: залежність похибки від q (а); залежність похибки від ϵ (б)

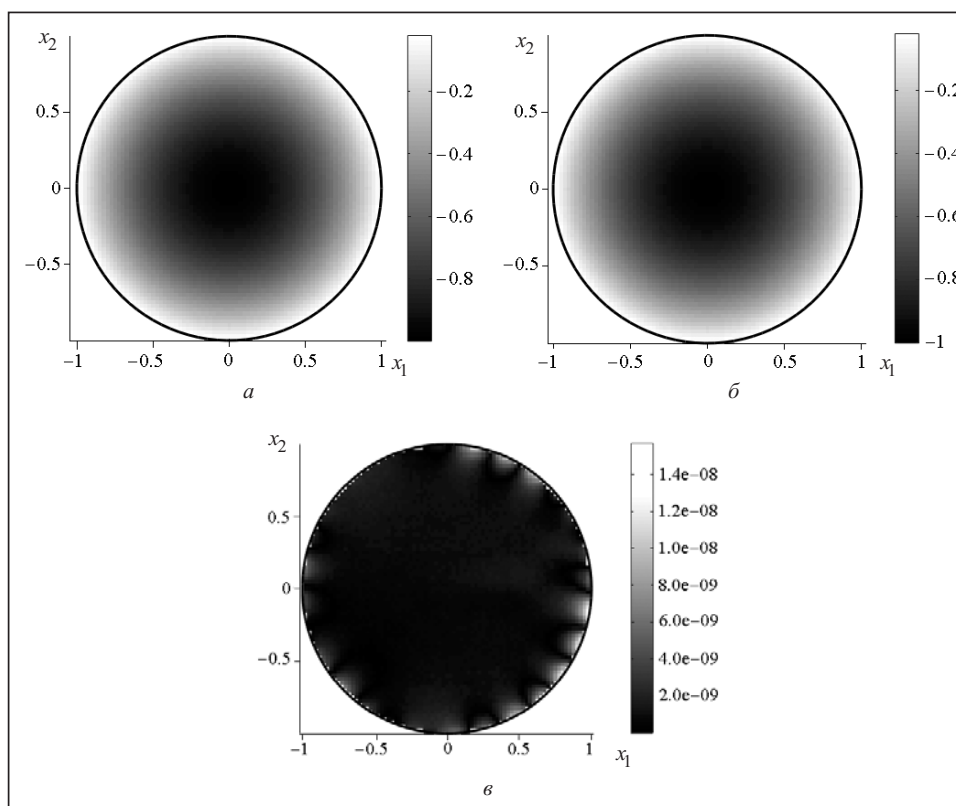


Рис. 3. Розв'язки в області D для $n=342$ у прикладі 1: наближений розв'язок u_n (а); точний розв'язок u_{ex} (б); абсолютні похибки (в)

повільна. Для параметра $\epsilon=0.79$, одержаного за допомогою генетичного алгоритму, точність хороша як для малих, так і для великих значень n .

На рис. 3 наведено точний розв'язок u_{ex} , наближений розв'язок u_n та абсолютні похибки в області D для $n=342$ ($m=32, L=20$), $q=3$ та $\epsilon=0.79$.

Відносні похибки в області D , обчислені за формулою (24) для різних значень центральних точок n , наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Відносні похибки, обчислені за формулою (24) (приклади 1 і 2)

m	L	$\tilde{n}$	n	E_n	
				приклад 1	приклад 2
16	5	38	54	4.2e-05	1.4e-02
32	10	155	187	2.0e-08	8.8e-05
32	20	310	342	2.8e-09	1.4e-05

Приклад 2. Розглянемо тепер область D складнішої конфігурації (див. рис. 1, б) з межею

$$\Gamma = \{\gamma(s) = (\cos s, \sin s - 0.5 \sin^2 s + 0.5), s \in [0, 2\pi]\}.$$

Нехай інтегральне ядро $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 + y_1$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, і точний розв'язок

$$u_{ex}(\mathbf{x}) = x_1^5 + x_2^4, \mathbf{x} \in D.$$

Тоді межева функція g і функція джерела f матимуть вигляд

$$g(\mathbf{x}) = u_{ex}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma, f(\mathbf{x}) = -20x_1^3 + \frac{311}{2048}\pi x_1 - 12x_2^2 + \frac{5}{64}\pi, \mathbf{x} \in D.$$

Центральні точки розташовані за правилом (11) і для $n = 54$ ($m = 16, L = 5$) зображені на рис. 1, б. Параметр $\varepsilon = 0.75$ вибрано за генетичним алгоритмом; порядок поліноміального базису $q = 3$.

На рис. 4 зображено точний розв'язок u_{ex} , наближений розв'язок u_n та абсолютні похибки в області D для $n = 342$ ($m = 32, L = 20$).

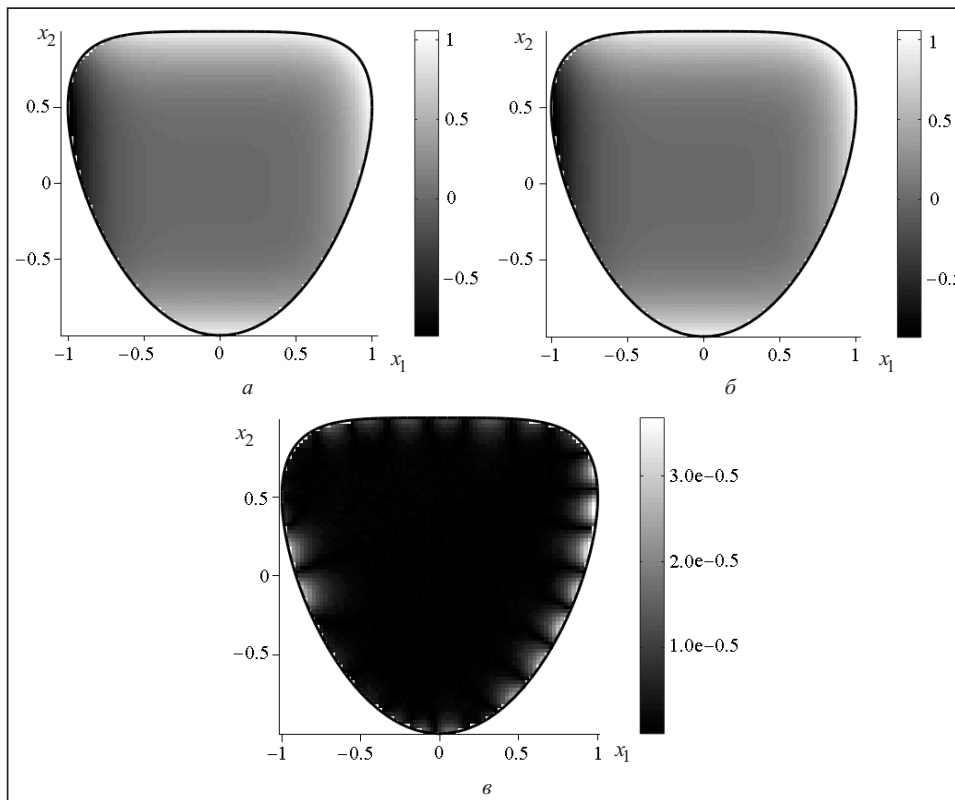


Рис. 4. Розв'язки в області D для $n = 342$ у прикладі 2: наближений розв'язок u_n (а); точний розв'язок u_{ex} (б); абсолютні похибки (в)

Відносні похибки в області D , обчислені за формулою (24) для різних значень центральних точок n , представлено в табл. 1.

Приклад 3. Розглянемо тепер тривимірний випадок. Межею області D є одинична сфера (рис. 5, а):

$$\Gamma = \{\gamma(\theta, \varphi) = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\}.$$

Нехай інтегральне ядро $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, і точний розв'язок

$$u_{ex}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^2 - 1, \mathbf{x} \in D.$$

Тоді межева функція g і функція джерела f матимуть вигляд

$$g(\mathbf{x}) = u_{ex}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Gamma, f(\mathbf{x}) = -\frac{8}{15}\pi|\mathbf{x}|^2 - \frac{8}{35}\pi - 6, \mathbf{x} \in D.$$

Центральні точки розташовані за правилом (15) і для $n=62$ ($m_1 = m_2 = 8$, $L=4$) зображені на рис. 5, а. Параметр $\varepsilon=0.8$ вибрано за генетичним алгоритмом; порядок поліноміального базису $q=4$.

На рис. 6 зображено точний розв'язок u_{ex} , наближений розв'язок u_n та абсолютні похибки в області D для фіксованого $x_3=0.5$ та $n=844$ ($m_1 = m_2 = 16$, $L=8$).

Відносні похибки в області D , обчислені за формулою (24) для різних значень центральних точок n , наведено в табл. 2.

Приклад 4. Розглянемо складнішу тривимірну область D (див. рис. 5, б) з межею

$$\Gamma = \{\gamma(\theta, \varphi) = \rho(\theta, \varphi)(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

де $\rho(\theta, \varphi) = 0.2(0.6 + \sqrt{4.25 + 2 \cos(3\theta)})$.

Нехай інтегральне ядро $k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$, межева функція $g(\mathbf{x}) = x_1$, $\mathbf{x} \in \Gamma$, та функція джерела $f(\mathbf{x}) = 2|\mathbf{x}|^2$, $\mathbf{x} \in D$. Точний розв'язок u_{ex} невідомий.

Центральні точки розташовані за правилом (15) і для $n=62$ ($m_1 = m_2 = 8$, $L=4$) зображені на рис. 5, б. Параметр $\varepsilon=0.9$ вибрано за генетичним алгоритмом; порядок поліноміального базису $q=4$.

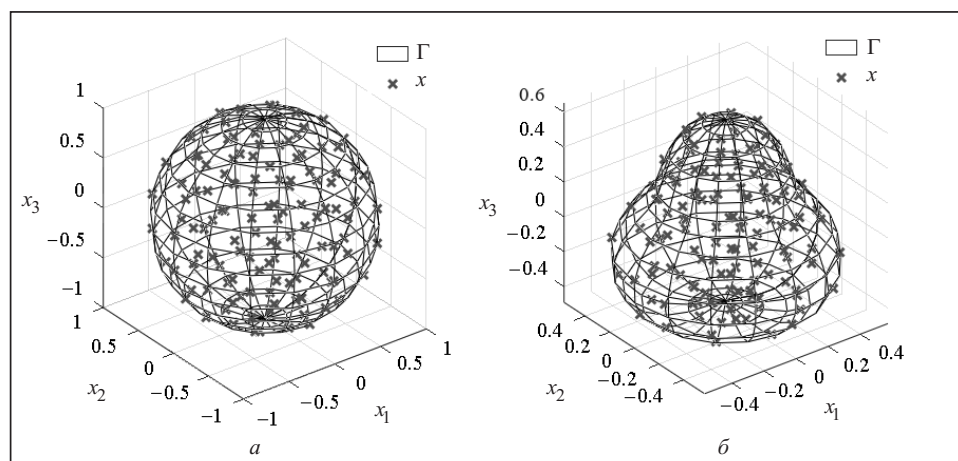


Рис. 5. Область D та розташування центральних вузлів $\mathbf{x}_j$: приклад 3 (а); приклад 4 (б)

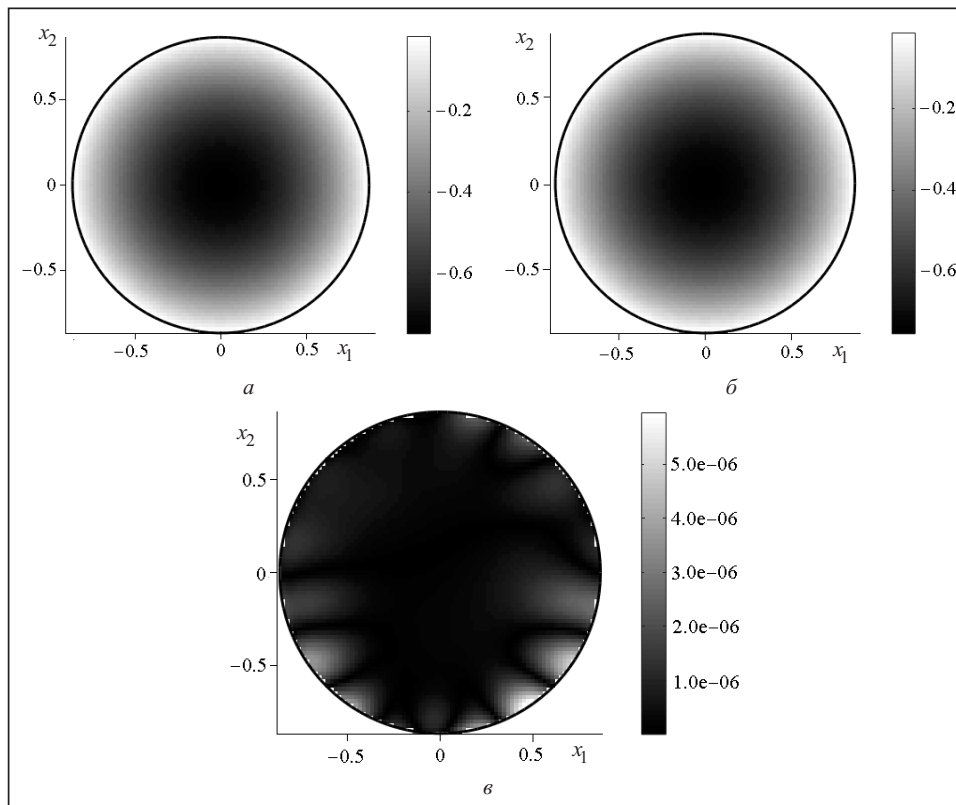


Рис. 6. Розв'язки в області D для $n = 844$ у прикладі 3: наближений розв'язок $u_n((\cdot, \cdot, 0.5)^T)$ (а); точний розв'язок $u_{ex}((\cdot, \cdot, 0.5)^T)$ (б); абсолютні похибки (в)

Таблиця 2. Відносні похибки, обчислені за формулою (24) (приклад 3)

$m_1 = m_2$	L	$\tilde{n}$	n	E_n
4	2	5	21	1.0e-01
8	4	62	126	5.4e-03
12	5	220	364	1.5e-05
16	8	588	844	2.4e-06
20	10	1185	1585	2.2e-07

Таблиця 3. Наближений розв'язок u_n у тестових точках (приклад 4)

$m_1 = m_2$	L	$\tilde{n}$	n	$u_n(\mathbf{z}^{(1)})$	$u_n(\mathbf{z}^{(2)})$
4	2	5	21	0.0075861	-0.096295
8	4	62	126	0.0061447	-0.097027
12	5	220	364	0.0064012	-0.097575
16	8	588	844	0.0065861	-0.097319
20	10	1185	1585	0.0065980	-0.097352

Оскільки точний розв'язок невідомий, то розглянуто дві тестові точки

$$\mathbf{z}^{(1)} = (0, 0.1, 0.1) \text{ і } \mathbf{z}^{(2)} = (-0.1, 0.2, 0.4)$$

та продемонстровано збіжність, коли зростає кількість центральних точок (табл. 3).

Усі чисельні розрахунки згенеровано в системі Octave та проведено на робочій станції на базі процесора Intel(R) Core(TM) i7 CPU з частотою 2.60 GHz. Обчислювальний час у двовимірному випадку для $n = 342$ становить 50 с, у тривимірному випадку для $n = 342 — 500$ с.

ВИСНОВКИ

Запропоновано метод РБФ для чисельного розв'язування задачі Діріхле для ІДРЧП. Невідому функцію апроксимовано лінійною комбінацією РБФ у вибраних центральних точках та лінійною комбінацією поліноміальних базисних функцій. Колокація в центральних точках зумовлює розв'язання напівдискретизованої системи для знаходження невідомих коефіцієнтів. Отриману систему повністю дискретизовано шляхом застосування до інтегральних коефіцієнтів квадратурних формул Гаусса–Лежандра та трапецій. Розподіл центральних точок запропоновано як у двовимірній, так і в тривимірній областях, а параметр форми вибрано за допомогою дійснозначного генетичного алгоритму. Чисельні приклади як у дво-, так і в тривимірних областях підтверджують застосовність і низьку обчислювальну вартість запропонованого методу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Ewing R.E., Lazarov R.D., Lin Y. Finite volume element approximations of nonlocal in time one-dimensional flows in porous media. *Computing*. 2000. Vol. 64, Iss. 2. P. 157–182. <https://doi.org/10.1007/s006070050007>.
2. Kot M., Medlock J. Spreading disease: integro-differential equations old and new. *Mathematical Biosciences*. 2003. Vol. 184, Iss. 2. P. 201–222. [https://doi.org/10.1016/S0025-5564\(03\)00041-5](https://doi.org/10.1016/S0025-5564(03)00041-5).
3. Amadori A.L. Nonlinear integro-differential evolution problems arising in option pricing: A viscosity solutions approach. *Differential Integral Equations*. 2003. Vol. 7. P. 787–811. <http://dx.doi.org/10.57262/die/1356060597>.
4. Briani M., La Chioma C., Natalini R. Convergence of numerical schemes for viscosity solutions to integro-differential degenerate parabolic problems arising in financial theory. *Numer. Math.* 2004. Vol. 98, Iss. 4. P. 607–646. <https://doi.org/10.1007/s00211-004-0530-0>.
5. Chapko R., Palianytsia O. On the boundary-domain integrals approach for a partial integro-differential equation. *Visn. Lviv. un-tu. Ser. prykl. matem. ta inf.* 2022. Vol. 22. P. 38–44. <http://dx.doi.org/10.30970/vam.2022.30.11432>.
6. Brunner H., Yan N. Finite element methods for optimal control problems governed by integral equations and integro-differential equations. *Numer. Math.* 2005. Vol. 101, Iss. 1. P. 1–27. <https://doi.org/10.1007/s00211-005-0608-3>.
7. Shakeri F., Dehghan M. A high order finite volume element method for solving elliptic partial integro-differential equations. *Applied Numerical Mathematics*. 2013. Vol. 65. P. 105–118. <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2012.10.002>.
8. Borachok I., Chapko R., Johansson B.T. Numerical solution of a Cauchy problem for Laplace equation in 3-dimensional domains by integral equations. *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2016. Vol. 24, Iss. 9. P. 1550–1568. <https://doi.org/10.1080/17415977.2015.1130042>.
9. Gathungu D.K., Borzi A. Multigrid solution of an elliptic Fredholm partial integro-differential equation with a Hilbert–Schmidt integral operator. *Applied Mathematics*. 2017. Vol. 8, N 7. P. 967–986. <https://doi.org/10.4236/am.2017.87076>.
10. Gathungu D., Bebendorf M., Borzi A. Hierarchical-matrix method for a class of diffusion-dominated partial integro-differential equations. *Numer Linear Algebra Appl.* 2022. Vol. 29, Iss. 2. <https://doi.org/10.1002/nla.2410>.

11. Kansa E.J. Multiquadrics — A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics — II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*. 1990. Vol. 19, Iss. 8–9. P. 147–161. [https://doi.org/10.1016/0898-1221\(90\)90271-K](https://doi.org/10.1016/0898-1221(90)90271-K).
12. Kress R. Numerical integration. In: Numerical analysis. Graduate texts in mathematics. Vol. 181. New York: Springer, 1998. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0599-9_9.
13. Chen C.S., Dou F., Karageorghis A. A novel RBF collocation method using fictitious centres. *Applied Mathematics Letters*. 2020. Vol. 101. Article number 106069. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.106069>.
14. Fasshauer G.E., Zhang J.G. On choosing “optimal” shape parameters for RBF approximation. *Numerical Algorithms*. 2007. Vol. 45, Iss. 1–4. P. 345–368. <https://doi.org/10.1007/s11075-007-9072-8>.
15. Holland J.H. Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. MIT Press, 1992. <https://doi.org/10.7551/mitpress/1090.001.0001>.
16. Michalewicz Z. Genetic algorithms + data structures = evolution programs. 3rd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996. 387 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-03315-9>.
17. Larsson E., Fornberg B. A numerical study of some radial basis function based solution for elliptic PDEs. *Comput. Math. Appl.* 2003. Vol. 46, Iss. 5–6. P. 891–902. [https://doi.org/10.1016/S0898-1221\(03\)90151-9](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(03)90151-9).
18. Ma Z., Li X., Chen C.S. Ghost point method using RBFs and polynomial basis functions. *Applied Mathematics Letters*. 2021. Vol. 111. Article number 106618. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2020.106618>.
19. Koushki M., Jabbari E., Ahmadiania M. Evaluating RBF methods for solving PDEs using Padua points distribution. *Alexandria Engineering Journal*. 2020. Vol. 59, Iss. 5. P. 2999–3018. <https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.04.047>.
20. Jankowska M.A., Karageorghis A., Chen C.S. Improved Kansa RBF for the solution of nonlinear boundary value problems. *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2018. Vol. 87. P. 173–183. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2017.11.012>.

I. Borachok, O. Palianytsia, R. Chapko

METHOD OF RADIAL BASIS FUNCTIONS FOR A PARTIAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF DIFFUSION WITH NON-LOCAL EFFECTS

Abstract. The method of radial basis functions for the numerical solution of the partial integro-differential equation in multi-dimensional domains is considered. A linear combination of radial basis functions at specific center points and a linear combination of polynomial basis functions are employed to approximate the problem's solution. The distribution of the center points is proposed for both two and three-dimensional domains. Collocating at the center points leads to the semi-discretized system that contains integral coefficients. Integral coefficients are calculated numerically using the Gauss-Legendre and trapezoidal quadrature rules. A shape parameter is determined by a real-coded genetic algorithm. Numerical results both in two- and three-dimensional domains confirm the applicability of the proposed approach.

Keywords: elliptic partial integro-differential equation, radial basis functions, polynomial basis, genetic algorithm.

Надійшла до редакції 24.01.2024