

ПРО ДЕЯКІ УЗАГАЛЬНЕННЯ БІПОРЯДКОВОЇ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ ХІЛЬФЕРА

Анотація. Розглянуто узагальнення поняття біпорядкової дробової похідної Хільфера, раніше запровадженої в роботі автора. Зокрема, введено поняття біпорядкової дробової похідної Хільфера функції щодо іншої функції та пропорційної біпорядкової похідної Хільфера функції щодо іншої функції. Наведено основні композиційні властивості для операторів біпорядкових дробових похідних та інтегралів. Отримано формулу перетворення Лапласа пропорційної біпорядкової похідної Хільфера, побудовано замкнені розв'язки задач типу Коші для лінійних рівнянь із зазначеними узагальненими біпорядковими дробовими похідними Хільфера.

Ключові слова: дробова похідна Хільфера, біпорядкова дробова похідна Хільфера, біпорядкова дробова похідна Хільфера функції щодо іншої функції, пропорційна біпорядкова дробова похідна Хільфера, композиційні властивості, перетворення Лапласа, задачі типу Коші, замкнені розв'язки.

ВСТУП

Одним з ефективних методів математичного моделювання динаміки процесів переносу з урахуванням нелокальних просторово-часових властивостей є підхід, пов'язаний з використанням апарату інтегро-диференціювання дробового порядку [1–3]. Особливо ефективними методи дробово-диференційного аналізу виявились під час дослідження динаміки різноманітних процесів з урахуванням ефектів пам'яті у таких галузях, як фізика, механіка, геогідро-механіка та інших галузях природознавства [4–7]. Зокрема, в підземній гідродинаміці важливу роль відіграють аномальні геоміграційні процеси, адекватне дослідження яких можливе на підставі дробово-диференційного узагальнення основних законів переносу [8–12]. Причому значний обсяг сучасних досліджень виконано в межах моделей з використанням різноманітних узагальнень дробових похідних Капуто, Рімана–Ліувілля, Хільфера та ін. Так, в [13] запропоновано нові математичні моделі для опису дробово-диференційної динаміки деяких неізотермічних фільтраційно-консолідаційних процесів у насичених сольовими розчинами геопористих середовищах за умов часової нелокальності, а в роботі [14] побудовано дробово-диференційні математичні моделі стосовно динаміки геофільтраційних процесів за умов урахування явища релаксації тиску. Зазначені моделі базуються на поняттях узагальнених похідних типу Капуто функції щодо іншої функції [13, 15] та дробової похідної Хільфера функції щодо іншої функції [13, 16–18]. Це дає змогу розширити область моделювання нелокальних процесів геоміграції та визначити можливості контролю процесу моделювання.

Зазначимо, що визначена Хільфером [19] дробова похідна слугує сполучною ланкою поміж похідними в сенсі Капуто та похідними в сенсі Рімана–Ліувілля. Вона поєднує в єдиному дробовому операторі низку дробових похідних, чим пояснюється особлива увага до неї та поширення щодо застосувань в різноманітних галузях природознавства. Слід зазначити також, що фундаментальні властивості дробових інтегралів та похідних (зокрема, для випадку інтегралів від функції щодо іншої функції) докладно висвітлено у відомій монографії [2]. Низку ваго-

мих результатів у галузі дослідження властивостей похідних Хільфера та їхніх застосувань представлено в працях [20–25].

Поняття біпорядкової дробової похідної Хільфера (яке узагальнює загальноприйняту [19] похідну Хільфера заданого порядку певного типу) запроваджено в роботі [26]. У цій роботі здобута формула перетворення Лапласа зазначеної похідної, наведено розв’язок задачі типу Коші для лінійного рівняння з біпорядковою дробовою похідною Хільфера. Зауважимо, що біпорядкова похідна Хільфера (на відміну від класичної похідної Хільфера) є інтерполянтом стосовно похідних Капуто та Рімана–Ліувілля різних порядків. Це сприяє моделюванню динаміки більш широкого класу аномальних процесів переносу, ніж на основі загальноприйнятого означення однопорядкової похідної Хільфера. З використанням поняття біпорядкової дробової похідної Хільфера наразі одержано низку цікавих результатів, зокрема в [27–29].

У цій роботі запроваджено нові узагальнення біпорядкової дробової похідної Хільфера, а саме: біпорядкової дробової похідної Хільфера функції щодо іншої функції та пропорційної біпорядкової похідної Хільфера функції щодо іншої функції. Визначено основні композиційні властивості операторів біпорядкових дробових похідних та інтегралів, одержано замкнені розв’язки задач типу Коші для лінійних рівнянь з біпорядковою похідною Хільфера функції щодо іншої функції та пропорційною біпорядковою похідною Хільфера функції щодо іншої функції.

ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ: ПОХІДНА ХІЛЬФЕРА ТА БІПОРЯДКОВА ПОХІДНА ХІЛЬФЕРА

Якщо $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in [0, 1]$, $u(t) \in C^1[0, T]$, $\gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta$, то дробова похідна Хільфера порядку α типу β функції $u(t)$ визначається у такий спосіб [19]:

$${}^H D_{0+}^{\alpha, \beta} u(t) = I_{0+}^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I_{0+}^{1-\gamma} u(t) = I_{0+}^{\beta(1-\alpha)} D_{0+}^{\gamma} u(t) \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1)$$

Тут $D_{0+}^{\gamma} u(t)$ — дробова похідна Рімана–Ліувілля порядку γ від функції $u(t)$, $I_{0+}^{\nu} u(t)$ — дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля порядку $\nu > 0$ від функції $u(t) \in C^1[0, T]$, який визначається співвідношенням [2]

$$I_{0+}^{\nu} u(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{u(\tau)}{(t-\tau)^{1-\nu}} d\tau, \quad t > 0,$$

де $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція Ейлера [30].

З урахуванням співвідношень ${}^H D_{0+}^{\alpha, 0} = D_{0+}^{\alpha}$, ${}^H D_{0+}^{\alpha, 1} = D_{0+}^{\alpha}$ доходимо висновку, що дробова похідна Хільфера може подаватись, як інтерполянт за параметром $\beta \in [0, 1]$ щодо похідних Капуто та Рімана–Ліувілля одного порядку [3, 16–19, 22, 31–33].

Біпорядкова похідна Хільфера узагальнює поняття стандартної похідної Хільфера на основі інтерполяційної концепції, зумовленої використанням похідних Капуто і Рімана–Ліувілля різних порядків і визначається таким співвідношенням [26]:

$${}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) = I_{0+}^{\beta(1-\alpha_1)} \frac{d}{dt} I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} u(t), \quad (2)$$

де $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\beta \in [0, 1]$, $u(t) \in L^1(0, T)$, $T > 0$.

У разі якщо для порядків похідної виконуються нерівності $n-1 < \alpha_1$, $\alpha_2 < n$ ($n \in \mathbb{N}$, $\beta \in [0,1]$), то біпорядкова похідна Хільфера визначається згідно з таким співвідношенням [28]:

$${}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) = I_{0+}^{\beta(n-\alpha_1)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n I_{0+}^{(1-\beta)(n-\alpha_2)} u(t).$$

Зазначимо, що оскільки з рівності (2) випливає співвідношення

$${}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} = \begin{cases} D_{0+}^{\alpha_2}, & \beta = 0, \\ {}^C D_{0+}^{\alpha_1}, & \beta = 1, \end{cases}$$

то оператор біпорядкової похідної Хільфера може трактуватись, як інтерполянт між операторами похідних різних порядків: Капуто порядку α_1 та Рімана–Ліувілля порядку α_2 (загалом $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Вочевидь, що в окремому випадку (для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$) з (2) отримуємо співвідношення (1) і біпорядкова похідна Хільфера перетворюється в звичайну однопорядкову похідну Хільфера. Зауважимо, що для біпорядкової похідної Хільфера відомо [26] перетворення Лапласа $\mathcal{L}$ (p – параметр перетворення, $u(t) \in L(0, +\infty)$):

$$\mathcal{L}({}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t)) = p^{\alpha_2 + \beta(\alpha_1 - \alpha_2)} \mathcal{L}(u(t)) - p^{\beta(\alpha_1 - 1)} I_{0+}^{(1-\alpha_2)(1-\beta)} u(0+)$$

та розв’язок лінійної задачі типу Коші

$$\begin{aligned} {}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) + \lambda u(t) &= f(t), \\ I_{0+}^{(1-\alpha_2)(1-\beta)} u(0+) &= \xi_0 \end{aligned}$$

($\xi_0 = \text{const}$, $\lambda > 0$, $u, f \in C^1([0, T], \mathbb{R})$), який запишемо у вигляді [26]

$$\begin{aligned} u(t) &= \xi_0 t^{(1-\alpha_2)(\beta-1)} E_{\gamma, \gamma + \beta(1-\alpha_1)}(-\lambda t^\gamma) + \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda(t-\tau)^\gamma) f(\tau) d\tau \\ (\gamma &= \alpha_2 + \beta(\alpha_1 - \alpha_2)), \end{aligned}$$

де $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ – двопараметрична функція Міттаг-Леффлера [1, 2, 32].

Узагальненням поняття похідної Хільфера є також дробова похідна Хільфера функції щодо іншої функції. Похідну Хільфера порядку α типу β функції $u(t)$ щодо іншої функції $g(t)$ визначимо таким чином [13, 16–18, 20–24]:

$${}^H D_{0+; g}^{\alpha, \beta} u(t) = I_{0+; g}^{\beta(1-\alpha)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right) I_{0+; g}^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t) \quad (3)$$

$$(\alpha \in (0,1), \beta \in [0,1], u, g \in C^1([0, T], \mathbb{R}), g'(t) > 0 \ (\forall t \in [0, T])),$$

де $I_{0+; g}^\nu u(t)$ — дробовий інтеграл Рімана–Ліувілля порядку ν від функції u щодо функції g , який визначається таким чином [2]:

$$I_{0+; g}^\nu u(t) := \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t \frac{u(\tau) g'(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^{1-\nu}} d\tau. \quad (4)$$

Зазначимо, що дробова похідна Хільфера функції $u(t)$ щодо іншої функції $\psi(t)$ зазвичай називається ψ -Хільфер похідною [16, 17] і знаходиться в ме-

жах окремого напрямку дробового числення, отримавши неформальну назву « ψ -дробове числення» [22–25].

З урахуванням співвідношень ${}^H D_{0+;g}^{\alpha,0} = D_{0+;g}^{\alpha}$, ${}^H D_{0+;g}^{\alpha,1} = {}^C D_{0+;g}^{\alpha}$ доходимо висновку, що оператор дробової похідної Хільфера (3) функції щодо іншої функції може подаватись як інтерполянт між такими операторами дробових похідних одного порядку функції щодо іншої функції: Капуто ${}^C D_{0+;g}^{\alpha}$ та Рімана–Ліувілля $D_{0+;g}^{\alpha}$. Зазначимо, що різноманітні задачі, пов'язані з похідною Хільфера (3) функції щодо іншої функції, розв'язувались в багатьох працях, зокрема в [13, 14, 16–18, 20–25]. Узагальнюючи поняття похідної Хільфера функції щодо іншої функції на ситуації, які дають змогу ефективно моделювати динаміку процесів у разі застосування інтерполяційної концепції стосовно похідних Капуто та Рімана–Ліувілля функції щодо іншої функції не лише одного порядку α , але й різних порядків α_1, α_2 ($\alpha_1 \neq \alpha_2$), дійдемо поняття біпорядкової дробової похідної Хільфера функції щодо іншої функції, яку визначимо співвідношенням

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) := I_{0+;g}^{\beta(1-\alpha_1)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right) I_{0+;g}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} u(t), \quad (5)$$

де $u, g \in C^1([0, T], \mathbb{R})$, $g'(t) > 0$ ($\forall t \in [0, T]$); $I_{0+;g}^{\nu}$ — оператор дробового інтегрування порядку ν від функції щодо іншої функції, який визначений згідно з (4); α_1, α_2 — порядки похідної; β — тип похідної ($0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\beta \in [0, 1]$).

Дробову похідну функції $u(t)$, визначену згідно з (5), надалі (з метою скорочення запису) називатимемо біпорядковою g -Хільфер похідною. При цьому виконується співвідношення

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} = \begin{cases} D_{0+;g}^{\alpha_2}, & \beta = 0, \\ {}^C D_{0+;g}^{\alpha_1}, & \beta = 1, \end{cases}$$

і оператор біпорядкової g -Хільфер похідної можна розглядати як інтерполянт щодо операторів похідних різних порядків: дробової похідної Капуто порядку α_1 функції щодо іншої функції та похідної Рімана–Ліувілля порядку α_2 функції щодо іншої функції (загалом $\alpha_1 \neq \alpha_2$). Вочевидь, для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ згідно з (5) одержуємо співвідношення (3). Отже, загальноприйнята однопорядкова дробова похідна Хільфера функції щодо іншої функції є окремим випадком біпорядкової дробової похідної Хільфера, визначеної згідно з (5). Звідси можна дійти висновку, що на основі поняття біпорядкової дробової похідної Хільфера функції щодо іншої функції можливе моделювання динаміки ширшого класу еволюційних процесів порівняно з моделюванням на основі поняття однопорядкової дробової g -Хільфер похідної. Зазначимо також, що варіюючи «пробні» функції $g(t)$, можна (в деякому визначеному сенсі) керувати процесом моделювання, вибираючи відповідним чином функції $g(t)$ з метою отримання заздалегідь заданих динамічних режимів.

Визначимо, насамкінець, поняття біпорядкової g -Хільфер похідної для загального випадку $n-1 < \alpha_1, \alpha_2 < n$ ($n \in \mathbb{N}$), $\beta \in [0, 1]$. За означенням маємо

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) := I_{0+;g}^{\beta(n-\alpha_1)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^n I_{0+;g}^{(1-\beta)(n-\alpha_2)} u(t).$$

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ БІПОРЯДКОВОЇ ДРОБОВОЇ ПОХІДНОЇ ХІЛЬФЕРА ФУНКЦІЇ ЩОДО ІНШОЇ ФУНКЦІЇ. ЗАДАЧА ТИПУ КОШІ

Уведемо позначення $\gamma = \alpha_2 + \beta(\alpha_1 - \alpha_2)$, $\eta = \alpha_2 + \beta(1 - \alpha_2) = \gamma + \beta(1 - \alpha_1)$ і з урахуванням цих позначень запишемо співвідношення (5) у вигляді

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) := I_{0+;g}^{\eta-\gamma} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right) I_{0+;g}^{1-\eta} u(t) = I_{0+;g}^{\eta-\gamma} D_{0+;g}^{\eta} u(t),$$

де $D_{0+;g}^{\eta}$ – оператор дробової похідної Рімана–Ліувілля порядку η функції щодо іншої функції [2]. Зупинимось докладніше на двох важливих властивостях біпорядкової g -Хільфер похідної, які стосуються композиції дробових операторів диференціювання та інтегрування.

Згідно з першою властивістю композиції, якщо $f(t) \in C_{\eta}[0, T]$, $I_{0+;g}^{1-\eta} f(t) \in C_{\eta, g}^1[0, T]$ для $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\beta \in [0, 1]$, то має місце таке співвідношення:

$$I_{0+;g}^{\gamma} {}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} f(t) = f(t) - \frac{I_{0+;g}^{1-\eta} f(0)}{\Gamma(\eta)} (g(t) - g(0))^{\eta-1}. \quad (6)$$

Згідно з другою композиційною властивістю за умов $f(t) \in C_{1-\eta}[0, T]$, $I_{0+;g}^{1+\gamma-\eta} f(t) \in C_{1-\eta, g}^1[0, T]$ маємо

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} I_{0+;g}^{\gamma} f(t) = f(t), \quad t \in (0, T] \quad (7)$$

(тут $\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1)$, $\beta \in [0, 1]$ і ваговий простір $C_{\gamma, g}^1[0, T]$ визначається відповідно до [18, 20, 22, 31]:

$$C_{\gamma, g}^1[0, T] = \{f: (0, T] \mapsto \mathbb{R}; f(t) \in C[0, T], f'(t) \in C_{\gamma, g}[0, T]\},$$

$$C_{\gamma, g}[0, T] = \{f: (0, T] \mapsto \mathbb{R}; (g(t) - g(0))^{\gamma} f(t) \in C[0, T]\}.$$

Доведення співвідношення (6) ґрунтується на таких перетвореннях з урахуванням результатів роботи [31]:

$$\begin{aligned} I_{0+;g}^{\gamma} {}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} f(t) &= I_{0+;g}^{\gamma} I_{0+;g}^{\eta-\gamma} D_{0+;g}^{\eta} f(t) = I_{0+;g}^{\eta} D_{0+;g}^{\eta} f(t) = f(t) - \\ &\quad - \frac{I_{0+;g}^{1-\eta} f(0)}{\Gamma(\eta)} (g(t) - g(0))^{\eta-1}. \end{aligned}$$

Для доведення співвідношення (7) скористаємось результатами робіт [16, 31]. Унаслідок цього маємо

$$\begin{aligned} {}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} I_{0+;g}^{\gamma} f(t) &= I_{0+;g}^{\eta-\gamma} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right) I_{0+;g}^{1-(\eta-\gamma)} f(t) = \\ &= I_{0+;g}^{\eta-\gamma} D_{0+;g}^{\eta-\gamma} f(t) = f(t) - \frac{I_{0+;g}^{1+\gamma-\eta} f(0)}{\Gamma(\eta-\gamma)} (g(t) - g(0))^{\eta-\gamma-1} = f(t). \end{aligned}$$

Розглянемо задачу типу Коші для лінійного рівняння з біпорядковою g -Хільфер похідною з постійними коефіцієнтами:

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1), \quad \beta \in [0, 1], \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

$$I_{0+;g}^{(1-\alpha_2)(1-\beta)} u(0+) = \xi_0, \quad (9)$$

де

$$\zeta_0 = \text{const}, \lambda > 0; u(t), f(t) \in C^1([0, T], \mathbb{R}), I_{0+;g}^{(1-\alpha_2)(1-\beta)} u(0+) = \lim_{t \rightarrow 0+} I_{0+;g}^{(1-\alpha_2)(1-\beta)} u(t).$$

Побудуємо замкнений розв'язок задачі (8), (9), здійснюючи заміну $t = g^{-1}(\theta)$ ($\theta = g(t)$, $g(g^{-1}(\theta)) = \theta$, $g'(t) > 0 \forall t \in [0, T]$, $g(0) = 0$). З уведенням позначення $u(t) = u(g^{-1}(\theta)) := U(\theta)$ одержуємо

$$I_{0+;g}^\nu u(t) = I_{0+;\theta}^\nu U(\theta), \quad {}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) = {}^H D_{0+;\theta}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} U(\theta).$$

Далі повернімося до вихідної задачі та, позначивши $F(\theta) := f(g^{-1}(\theta)) = f(t)$, зводимо задану задачу до наступної задачі зі стандартною біпорядковою похідною Хільфера від функції $U(\theta)$:

$${}^H D_{0+;\theta}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} U(\theta) + \lambda U(\theta) = F(\theta), \quad (10)$$

$$I_{0+;\theta}^{1-\eta} U(0+) = \zeta_0. \quad (11)$$

Використовуючи результати роботи [26], запишемо розв'язок задачі (10), (11) у вигляді

$$U(\theta) = \zeta_0 \theta^{\eta-1} E_{\gamma, \eta}(-\lambda \theta^\gamma) + \int_0^\theta (\theta - \xi)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda (\theta - \xi)^\gamma) f(g^{-1}(\xi)) d\xi, \quad (12)$$

де $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ – визначена в [1, 2, 32] функція Міттаг-Леффлера.

Повертаючись у співвідношенні (12) до початкової змінної t та виконуючи підстановку $\xi = g(\tau)$, остаточно одержуємо розв'язок задачі (8), (9) у вигляді

$$u(t) = \zeta_0 (g(t))^{\eta-1} E_{\gamma, \eta}(-\lambda g^\gamma(t)) + \int_0^t (g(t) - g(\tau))^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda (g(t) - g(\tau))^\gamma) f(\tau) dg(\tau). \quad (13)$$

Зазначимо, що з співвідношення (13) при $g(t) \equiv t$ впливає розв'язок [26] відповідної до (8), (9) задачі типу Коші для рівняння з біпорядковою похідною Хільфера ${}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t)$, а для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ співвідношення (13) визначає розв'язок [13, 14, 18] задачі вигляду (8), (9) за наявності однопорядкової g -Хільфер похідної ${}^H D_{0+;g}^{\alpha; \beta} u(t)$ шуканої функції.

Далі розглянемо інший спосіб побудови розв'язку задачі (8), (9), який ґрунтується на використанні методу послідовних наближень Пікара [18, 25, 33].

Застосовуючи до обох частин рівності (8) інтегральний оператор $I_{0+;g}^\gamma$ з використанням співвідношення (6), встановимо, що розглядувана задача еквівалентна такому інтегральному рівнянню Вольтерра:

$$u(t) = \frac{\zeta_0}{\Gamma(\eta)} (g(t))^{\eta-1} - \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u(\tau) dg(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^{1-\gamma}} + I_{0+;g}^\gamma f(t).$$

Звідси згідно з методом послідовних наближень маємо

$$u_0(t) = \frac{\zeta_0}{\Gamma(\eta)} (g(t))^{\eta-1}, \quad (14)$$

$$u_m(t) = u_0(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u_{m-1}(\tau) dg(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^{1-\gamma}} + I_{0+;g}^\gamma f(t) \quad (m=1, 2, \dots). \quad (15)$$

Далі з (14), (15) одержуємо

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= u_0(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u_0(\tau) dg(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^{1-\gamma}} + I_{0+;g}^\gamma f(t) = \\
&= \frac{\xi_0}{\Gamma(\eta)} (g(t))^{\eta-1} - \frac{\xi_0 \lambda}{\Gamma(\eta + \gamma)} (g(t))^{\eta+\gamma-1} + I_{0+;g}^\gamma f(t) = \\
&= \xi_0 (g(t))^{\eta-1} \sum_{k=0}^1 \frac{(-\lambda g^\gamma(t))^k}{\Gamma(\gamma k + \eta)} + I_{0+;g}^\gamma f(t), \\
u_2(t) &= u_0(t) - \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{u_1(\tau) dg(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^{1-\gamma}} + I_{0+;g}^\gamma f(t) = \\
&= \frac{\xi_0}{\Gamma(\eta)} (g(t))^{\eta-1} + \frac{\xi_0}{\Gamma(\gamma)} \sum_{k=0}^1 \frac{(-\lambda)^{k+1}}{\Gamma(\gamma k + \eta)} \int_0^t \frac{(g(\tau))^{\gamma k + \eta - 1} dg(\tau)}{(g(t) - g(\tau))^{1-\gamma}} - \\
&\quad - \lambda I_{0+;g}^\gamma I_{0+;g}^\gamma f(t) + I_{0+;g}^\gamma f(t) = \xi_0 (g(t))^{\eta-1} \sum_{k=0}^2 \frac{(-\lambda g^\gamma(t))^k}{\Gamma(\gamma k + \eta)} + \\
&\quad + \int_0^t (g(t) - g(\tau))^{\gamma-1} \sum_{k=0}^2 \frac{(-\lambda (g(t) - g(\tau)))^k}{\Gamma(\gamma(k+1))} f(\tau) dg(\tau).
\end{aligned}$$

Продовжуючи цей процес індукцією, отримаємо співвідношення

$$\begin{aligned}
u_m(t) &= \xi_0 (g(t))^{\eta-1} \sum_{k=0}^m \frac{(-\lambda g^\gamma(t))^k}{\Gamma(\gamma k + \eta)} + \\
&\quad + \int_0^t (g(t) - g(\tau))^{\gamma-1} \sum_{k=0}^m \frac{(-\lambda (g(t) - g(\tau)))^k}{\Gamma(\gamma(k+1))} f(\tau) dg(\tau). \quad (16)
\end{aligned}$$

Переходячи у співвідношенні (16) до границі за умови $m \rightarrow \infty$, з урахуванням означення двопараметричної функції Міттаг-Лефлера [1, 2, 32], одержуємо розв'язок задачі (8), (9) у вигляді (13).

Зупинимось на розв'язанні аналогу задачі (8), (9) для випадку $1 < \alpha_1, \alpha_2 \leq 2$ ($\beta \in [0, 1]$). У цьому разі біпорядкова g -Хільфер дробова похідна визначається таким чином:

$${}_H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) = I_{0+;g}^{\beta(2-\alpha_1)} \left(\frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right)^2 I_{0+;g}^{(1-\beta)(2-\alpha_2)} u(t) \quad (17)$$

і задача типу Коші для лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами, яке містить g -Хільфер дробову похідну (17), формулюється у вигляді

$${}_H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) + \lambda u(t) = f(t), \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in (1, 2], \beta \in [0, 1]), \quad (18)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+} I_{0+;g}^{(2-\alpha_2)(1-\beta)} u(t) = \xi_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{g'(t)} \frac{d}{dt} I_{0+;g}^{(2-\alpha_2)(1-\beta)} u(t) = \xi_1, \quad (19)$$

де $\xi_0, \xi_1 = \text{const}$, $\lambda > 0$, $u(t)$ — шукана функція.

Аналогічно до викладеного вище, виконуючи в (18), (19) заміну $t = g^{-1}(\theta)$ ($\theta = g(t)$, $g(g^{-1}(\theta)) = \theta$, $g'(t) > 0 \forall t \in [0, T]$, $g(0) = 0$) та позначаючи $u(t) = u(g^{-1}(\theta)) := U(\theta)$, $f(t) = f(g^{-1}(\theta)) := F(\theta)$, зводимо задачу (18), (19)

до такої:

$${}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} U(\theta) + \lambda U(\theta) = F(\theta) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in (1, 2], \beta \in [0, 1]), \quad (20)$$

$$I_{0+; \theta}^{(2-\alpha_2)(1-\beta)} U(0+) = \zeta_0, \quad \frac{d}{d\theta} I_{0+; \theta}^{(2-\alpha_2)(1-\beta)} U(0+) = \zeta_1. \quad (21)$$

З використанням методики інтегрального перетворення Лапласа задача (20), (21) розв'язана в праці [28]. Відповідно до цієї роботи маємо

$$U(\theta) = \zeta_0 \theta^{\delta-2} E_{\gamma, \delta-1}(-\lambda \theta^\gamma) + \zeta_1 \theta^{\delta-1} E_{\gamma, \delta}(-\lambda \theta^\gamma) + \\ + \int_0^\theta (\theta - \xi)^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda (\theta - \xi)^\gamma) f(g^{-1}(\xi)) d\xi, \quad (22)$$

де $\delta = \gamma + \beta(2 - \alpha_1)$, $\gamma = \alpha_2 + \beta(\alpha_1 - \alpha_2)$, $E_{\alpha, \beta}(\cdot)$ — функція Міттаг-Леффлера [1, 2, 32].

Повертаючись у (22) до початкової змінної t та використовуючи підстановку $\xi = g(\tau)$, одержуємо шуканий розв'язок задачі (18), (19) у вигляді

$$u(t) = \zeta_0 (g(t))^{(\alpha_2-2)(1-\beta)} E_{\gamma, \gamma-1+\beta(2-\alpha_1)}(-\lambda g^\gamma(t)) + \\ + \zeta_1 (g(t))^{\gamma-1+\beta(2-\alpha_1)} E_{\gamma, \gamma+\beta(2-\alpha_1)}(-\lambda g^\gamma(t)) + \\ + \int_0^t (g(t) - g(\tau))^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda (g(t) - g(\tau))^\gamma) f(\tau) dg(\tau).$$

ПРОПОРЦІЙНА БІПОРЯДКОВА ДРОБОВА ПОХІДНА ХІЛЬФЕРА ФУНКЦІЇ ЩОДО ІНШОЇ ФУНКЦІЇ

Пропорційний диференціальний оператор порядку ρ функції f щодо функції g визначається так [24, 25]:

$$G_g^\rho f(t) = (1-\rho) f(t) + \rho \frac{f'(t)}{g'(t)} \quad (\rho \in [0, 1]). \quad (23)$$

Відповідно до (23) пропорційний інтеграл для $\rho \in (0, 1]$, $\nu \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(\nu) > 0$ функції f щодо функції g має вигляд [24, 25]

$${}_\rho I_{0+;g}^\nu f(t) = \frac{1}{\rho^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(g(t)-g(\tau))} (g(t)-g(\tau))^{\nu-1} f(\tau) dg(\tau). \quad (24)$$

Зауважимо, що з співвідношення (24) для $\rho = 1$ одержуємо співвідношення (4). Якщо $0 < \alpha < 1$, $\rho \in (0, 1]$, $f, g \in C[0, T]$ ($g'(t) > 0$), то узагальнена пропорційна (ліва) дробова похідна порядку α функції f щодо іншої функції g визначається так [24]:

$${}_\rho D_{0+;g}^\alpha f(t) = G_g^\rho ({}_\rho I_{0+;g}^{1-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\rho^{1-\alpha} \Gamma(1-\alpha)} \left[(1-\rho) + \frac{\rho}{g'(t)} \frac{d}{dt} \right] \times \\ \times \int_0^t e^{\frac{\rho-1}{\rho}(g(t)-g(\tau))} (g(t)-g(\tau))^{-\alpha} f(\tau) dg(\tau). \quad (25)$$

Зауважимо, що аналогічно визначається і відповідна права дробова похідна [24] і, зокрема, для $\rho = 1$, $g(t) = t$ співвідношення (25) визначає стандартну дробову похідну Рімана-Ліувілля функції f порядку α [1, 2].

Пропорційна g -Хільфер дробова похідна порядку α типу β функції щодо іншої функції ${}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha,\beta} u(t)$ є узагальненням похідної, визначеної згідно з (3), і відображається таким [25] співвідношенням:

$${}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha,\beta} u(t) = {}_{\rho} I_{0+;g}^{\beta(1-\alpha)} (G_g^{\rho}) {}_{\rho} I_{0+;g}^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t) = {}_{\rho} I_{0+;g}^{\beta(1-\alpha)} {}_{\rho} D_{0+;g}^{\gamma} u(t), \quad (26)$$

де $\gamma = \alpha + \beta(1-\alpha)$, $\alpha \in (0, 1)$, $\beta \in [0, 1]$, $\rho \in (0, 1]$.

Для похідної, визначеної згідно з (26), маємо

$${}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha,0} = {}_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha}, \quad {}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha,1} = {}^C_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha},$$

що дає змогу розглядати [22] пропорційну g -Хільфер дробову похідну заданого порядку як інтерполянт стосовно пропорційних похідних цього ж порядку Капуто та Рімана-Ліувілля функції щодо іншої функції.

Узагальнюючи поняття пропорційної g -Хільфер дробової похідної одного порядку в межах інтерполяційної концепції, запровадимо до розгляду пропорційну біпорядкову g -Хільфер дробову похідну співвідношенням

$${}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha_1,\alpha_2;\beta} f(t) = {}_{\rho} I_{0+;g}^{\beta(1-\alpha_1)} (G_g^{\rho}) {}_{\rho} I_{0+;g}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} f(t), \quad (27)$$

де $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\beta \in [0, 1]$, $\rho \in (0, 1]$, $f, g \in C^1([0, T])$, $g'(t) > 0$ ($\forall t \in (0, T]$).

Оскільки згідно з означенням (27) має місце співвідношення

$${}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha_1,\alpha_2;\beta} = \begin{cases} {}_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha_2}, & \beta = 0, \\ {}^C_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha_1}, & \beta = 1, \end{cases}$$

то оператор пропорційної біпорядкової g -Хільфер дробової похідної зумовлює інтерполяцію стосовно операторів пропорційних похідних Рімана-Ліувілля та Капуто функції щодо іншої функції загалом різних порядків (на відміну від однопорядкової пропорційної g -Хільфер похідної (26)), що дає змогу сподіватися на розширення області застосувань цієї похідної, зокрема, в прикладних дослідженнях. Необхідно зазначити, що поняття біпорядкової g -Хільфер похідної (співвідношення (5)) є окремим випадком поняття пропорційної біпорядкової g -Хільфер похідної (співвідношення (27)), оскільки для $\rho = 1$ маємо ${}^H_1 D_{0+;g}^{\alpha_1,\alpha_2;\beta} u(t) = {}^H D_{0+;g}^{\alpha_1,\alpha_2;\beta} u(t)$.

Для введеної згідно з співвідношенням (27) пропорційної біпорядкової g -Хільфер дробової похідної мають місце подібні представленим вище (співвідношення (6), (7)) формули композиції дробових операторів диференціювання та інтегрування. З урахуванням зазначених вище обмежень та умов $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\beta \in [0, 1]$, $\rho \in (0, 1]$, $g'(t) > 0$ відповідні формули можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} & {}_{\rho} I_{0+;g}^{\gamma} {}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha_1,\alpha_2;\beta} f(t) = \\ & = f(t) - \frac{{}_{\rho} I_{0+;g}^{1-\eta} f(0)}{\rho^{\eta-1} \Gamma(\eta)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(g(t)-g(0))} (g(t)-g(0))^{\eta-1}, \end{aligned} \quad (28)$$

$${}^H_{\rho} D_{0+;g}^{\alpha_1,\alpha_2;\beta} {}_{\rho} I_{0+;g}^{\gamma} f(t) = f(t), \quad t \in (0, T], \quad (29)$$

де ${}_p I_{0+}^\gamma$, ${}_p^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta}$ — оператори пропорційного інтегрування та g -Хільфер диференціювання, визначені згідно з (24), (27).

Доведення співвідношення (28) ґрунтується на використанні результатів роботи [22, лема 3.8, властивість 3.1]. У результаті маємо

$$\begin{aligned} {}_p I_{0+}^\gamma {}_p^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} f(t) &= {}_p I_{0+}^\eta {}_p D_{0+}^\eta f(t) = \\ &= f(t) - \frac{{}_p I_{0+}^{1-\eta} f(0)}{\rho^{\eta-1} \Gamma(\eta)} e^{\frac{\rho-1}{p}(g(t)-g(0))} (g(t)-g(0))^{\eta-1}. \end{aligned}$$

Для доведення (29), скориставшись лемами 3.3 та 3.6 з праці [22], отримаємо

$$\begin{aligned} {}_p^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} {}_p I_{0+}^\gamma f(t) &= {}_p I_{0+}^{\eta-\gamma} (G_g^\rho) {}_p I_{0+}^{1-\eta} f(t) = {}_p I_{0+}^{\eta-\gamma} {}_p D_{0+}^{\eta-\gamma} f(t) = \\ &= f(t) - \frac{{}_p I_{0+}^{1+\gamma-\eta} f(0)}{\rho^{\eta-\gamma-1} \Gamma(\eta-\gamma)} (g(t)-g(0))^{\eta-\gamma-1} e^{\frac{\rho-1}{p}(g(t)-g(0))} = f(t). \end{aligned}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ПРОПОРЦІЙНОЇ БІПОРЯДКОВОЇ ПОХІДНОЇ ХІЛЬФЕРА. ЗАДАЧА ТИПУ КОШІ ДЛЯ РІВНЯННЯ З ПРОПОРЦІЙНОЮ БІПОРЯДКОВОЮ g -ХІЛЬФЕР ПОХІДНОЮ

Для отримання формули перетворення Лапласа пропорційної біпорядкової похідної Хільфера функції експоненціального порядку скористаємось відомим [23] співвідношенням для перетворення Лапласа пропорційного дробового інтеграла ${}_p I_{0+}^\alpha f(t)$ для $0 < \alpha < 1$, $\rho \in (0, 1]$:

$$\mathcal{L}\{{}_p I_{0+}^\alpha f(t)\} = \frac{1}{(\rho p + 1 - \rho)^\alpha} \mathcal{L}\{f(t)\},$$

де p — параметр перетворення $\mathcal{L}$.

З урахуванням цього співвідношення та співвідношення (27) (за умови $g(t) = t$) маємо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{{}_p^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} f(t)\} &= \mathcal{L}\{{}_p I_{0+}^{\beta(1-\alpha_1)} (G_t^\rho ({}_p I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} f(t)))\} = \\ &= \frac{1}{(\rho p + 1 - \rho)^{\beta(1-\alpha_1)}} \mathcal{L}\{G_t^\rho ({}_p I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} f(t))\} = \\ &= \frac{1}{(\rho p + 1 - \rho)^{\beta(1-\alpha_1)}} [(\rho p + 1 - \rho) \mathcal{L}\{{}_p I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} f(t)\} - \rho {}_p I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} f(0+)] = \\ &= \frac{1}{(\rho p + 1 - \rho)^{\beta(1-\alpha_1)}} \left[\frac{\rho p + 1 - \rho}{(\rho p + 1 - \rho)^{(1-\beta)(1-\alpha_2)}} \mathcal{L}\{f(t)\} - \rho {}_p I_{0+}^{(1-\beta)(1-\alpha_2)} f(0+) \right] = \\ &= (\rho p + 1 - \rho)^\gamma \mathcal{L}\{f(t)\} - \rho (\rho p + 1 - \rho)^{\gamma-\eta} {}_p I_{0+}^{1-\eta} f(0+) = \\ &= (\rho p + 1 - \rho)^\gamma (\mathcal{L}\{f(t)\} - \rho (\rho p + 1 - \rho)^{-\eta} {}_p I_{0+}^{1-\eta} f(0+)), \end{aligned} \quad (30)$$

де $\gamma = \alpha_2 + \beta(\alpha_1 - \alpha_2)$, $\eta = \alpha_2 + \beta(1 - \alpha_2)$, $0 < \alpha_1, \alpha_2 < 1$, $\beta \in [0, 1]$, $\rho \in (0, 1]$,
 ${}_{\rho}I_{0+}^{1-\eta} f(0+) = {}_{\rho}I_{0+}^{1-\eta} f(t) \Big|_{t \rightarrow 0+}$.

Зазначимо, що у разі $\rho = 1$ з (30) впливає співвідношення для перетворення Лапласа стандартної біпорядкової похідної Хільфера [26]. Використаємо одержане для перетворення Лапласа пропорційної біпорядкової похідної Хільфера співвідношення (30) з метою визначення розв'язку задачі типу Коші вигляду

$${}_{\rho}^H D_{0+;g}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} u(t) + \lambda u(t) = f(t) \quad (\alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1), \beta \in [0, 1], \rho \in (0, 1]), \quad (31)$$

$${}_{\rho}I_{0+;g}^{1-\eta} u(t) \Big|_{t \rightarrow 0+} = \xi_0, \quad (32)$$

де $u(t)$ — шукана функція, $\xi_0 = \text{const}$, $\lambda > 0$, $g, f \in C^1[0, T]$, $g'(t) > 0$, $g(0) = 0$.

Перейдемо до нової змінної $\theta = g(t)$ ($t = g^{-1}(\theta)$, $g(g^{-1}(\theta)) = \theta$) та введемо позначення $U(\theta) := u(g^{-1}(\theta)) = u(t)$, $F(\theta) := f(g^{-1}(\theta)) = f(t)$. Тоді розглядувана задача зводиться до такої:

$${}_{\rho}^H D_{0+}^{\alpha_1, \alpha_2; \beta} U(\theta) + \lambda U(\theta) = F(\theta), \quad (33)$$

$${}_{\rho}I_{0+}^{1-\eta} U(0+) = \xi_0. \quad (34)$$

Застосовуючи до задачі (33), (34) інтегральне перетворення Лапласа щодо змінної t та враховуючи співвідношення (30), матимемо

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{U(\theta)\} &= \frac{1}{(\rho p + 1 - \rho)^{\gamma} + \lambda} \mathcal{L}\{F(\theta)\} + \xi_0 \rho \frac{(\rho p + 1 - \rho)^{\gamma - \eta}}{(\rho p + 1 - \rho)^{\gamma} + \lambda} = \\ &= A(p) \mathcal{L}\{F(\theta)\} + B(p), \end{aligned} \quad (35)$$

де $A(p) = \frac{1}{(\rho p + 1 - \rho)^{\gamma} + \lambda}$, $B(p) = \xi_0 \rho \frac{(\rho p + 1 - \rho)^{\gamma - \eta}}{(\rho p + 1 - \rho)^{\gamma} + \lambda}$, p — параметр перетворення $\mathcal{L}$.

З урахуванням відомого співвідношення [1–3, 32]

$$\mathcal{L}\{\theta^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda \theta^{\alpha})\} = \frac{p^{\alpha-\beta}}{p^{\alpha} - \lambda} \quad (\text{Re } p > 0, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda p^{-\alpha}| < 1)$$

та теореми зміщення для перетворення Лапласа [34], дістаємо

$$\begin{aligned} A(p) &= \frac{\rho^{-\gamma}}{\left(p + \frac{1-\rho}{\rho}\right)^{\gamma} + \lambda \rho^{-\gamma}} \mapsto \mathcal{L}^{-1}\{A(p)\} = \\ &= \rho^{-\gamma} e^{\frac{\rho-1}{\rho} \theta} \theta^{\gamma-1} E_{\gamma, \gamma}(-\lambda \rho^{-\gamma} \theta^{\gamma}), \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} B(p) &= \xi_0 \rho^{1-\eta} \frac{\left(p + \frac{1-\rho}{\rho}\right)^{\gamma-\eta}}{\left(p + \frac{1-\rho}{\rho}\right)^{\gamma} + \lambda \rho^{-\gamma}} \mapsto \mathcal{L}^{-1}\{B(p)\} = \\ &= \xi_0 \rho^{1-\eta} e^{\frac{\rho-1}{\rho} \theta} \theta^{\eta-1} E_{\gamma, \eta}(-\lambda \rho^{-\gamma} \theta^{\gamma}), \end{aligned} \quad (37)$$

де $\mathcal{L}^{-1}$ — оператор оберненого перетворення Лапласа щодо $\mathcal{L}$.

На основі теореми множення зображень [34] та відповідно до співвідношень (36), (37) одержуємо з (35)

$$U(\theta) = \zeta_0 \rho^{1-\eta} e^{\frac{\rho-1}{\rho}\theta} \theta^{\eta-1} E_{\gamma,\eta}(-\lambda \rho^{-\gamma} \theta^\gamma) + \\ + \frac{1}{\rho^\gamma} \int_0^\theta (\theta - \xi)^{\gamma-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(\theta-\xi)} E_{\gamma,\gamma}(-\lambda \rho^{-\gamma} (\theta - \xi)^\gamma) f(g^{-1}(\xi)) d\xi$$

або, повертаючись в останній рівності до первинної змінної $t = g^{-1}(\theta)$, маємо

$$u(t) = \zeta_0 \rho^{1-\eta} e^{\frac{\rho-1}{\rho}g(t)} (g(t))^{\eta-1} E_{\gamma,\eta}(-\lambda \rho^{-\gamma} (g(t))^\gamma) + \\ + \frac{1}{\rho^\gamma} \int_0^t (g(t) - g(\tau))^{\gamma-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(g(t)-g(\tau))} \times \\ \times E_{\gamma,\gamma}(-\lambda \rho^{-\gamma} (g(t) - g(\tau))^\gamma) f(\tau) dg(\tau). \quad (38)$$

Формула (38) визначає шуканий замкнений розв'язок задачі (31), (32). Покладаючи в співвідношенні (38), зокрема, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, отримуємо розв'язок відповідної задачі типу Коші для рівняння з однопорядковим пропорційним дробовим g -Хільфер оператором у вигляді

$$u(t) = \zeta_0 \rho^{(1-\alpha)(1-\beta)} e^{\frac{\rho-1}{\rho}g(t)} (g(t))^{(1-\alpha)(\beta-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda \rho^{-\alpha} (g(t))^\alpha) + \\ + \frac{1}{\rho^\alpha} \int_0^t (g(t) - g(\tau))^{\alpha-1} e^{\frac{\rho-1}{\rho}(g(t)-g(\tau))} \times \\ \times E_{\alpha,\alpha}(-\lambda \rho^{-\alpha} (g(t) - g(\tau))^\alpha) f(\tau) dg(\tau). \quad (39)$$

(Слід зазначити, що співвідношення (39) одержане в роботі [25, лема 3.1].) Відмітимо також, що коли в співвідношенні (38) покласти $\rho=1$, то цей розв'язок перетворюється в розв'язок (13) задачі (8), (9).

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто деякі узагальнення біпорядкової [26] дробової похідної Хільфера. Зокрема, введено поняття біпорядкової похідної Хільфера функції щодо іншої функції та пропорційної біпорядкової дробової похідної Хільфера функції щодо іншої функції. Наведено основні композиційні властивості для операторів біпорядкових дробових похідних та інтегралів, одержано формулу перетворення Лапласа пропорційної біпорядкової похідної Хільфера, побудовано замкнені розв'язки задач типу Коші для лінійних рівнянь з зазначеними узагальненими біпорядковими дробовими похідними.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Podlubny I. Fractional differential equations. New York: Academic Press, 1999. 341 p.
2. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 523 p.

3. Sandev T., Tomovsky Z. Fractional equations and models. Theory and applications. Cham, Switzerland: Springer Nature Switzerland AG, 2019. 344 p.
4. Uchaikin V.V. Fractional derivatives for phusicsts and engineers. Berlin, Heidelberg; Springer, 2013. 512 p.
5. Mainardi F. Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity. London: Imperial College Press, 2010. 368 p.
6. Povstenko Yu. Linear fractional diffusion-wave equation for scientists and engineers. Switzerland: Springer Int. Publ., 2015. 460 p.
7. Magin R.L. Fractional calculus in bioengineering. Connecticut, USA: Begel House Publishers Inc., 2006. 355 p.
8. Ninghu Su. Fractional calculus for hydrology, soil science and geomechanics. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2021. 336 p.
9. Deseri L., Zingales M. A mechanical picture of fractional-order Darcy equation. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simulat.* 2015. Vol. 20. P. 940–949.
10. Tomovski Z., Sandev T., Metzler R., Dubbeldam J.L. Generalized space-time fractional diffusion equation with composite fractional time derivative. *Physica A.* 2012. Vol. 391. P. 2527–2542.
11. Al-Homidan S., Ghanam R.A., Tatar N. On a generalized diffusion equation arising in petroleum engineering. *Advances in Differential Equations.* 2013. Vol. 349. P. 1–14.
12. Богасенко В.О., Булавацький В.М., Хіміч О.М. Математичне та комп'ютерне моделювання в задачах гідрогеоміграційної динаміки. Київ: Наук. думка, 2022. 249 с.
13. Bulavatsky V.M., Kryvonos I.G. Mathematical models with a control function for investigation of fractional-differential dynamics of geomigration processes. *Journal of Automation and Information Science.* 2014. Vol. 46, N 6. P. 1–11.
14. Bulavatsky V.M. Mathematical models and problems of fractional differential dynamics of some relaxation filtration processes. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 5. P. 727–736.
15. Almeida R. A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2017. Vol. 44. P. 160–181.
16. J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. On the ψ -Hilfer fractional derivative function. *Commun. Nonlin. Sci. Numer. Simul.* 2018. Vol. 60. P. 72–91.
17. J. Vanterler da C. Sousa, E. Capelas de Oliveira. A Gronwall inequality and the Cauchy-type problem by means of ψ -Hilfer operator. *Differ. Equat. Appl.* 2019. Vol. 11(1). P. 87–106.
18. Kuccehe K.D., Mali A.D., J. Vanterler da C. Sousa. On the nonlinear ψ -Hilfer fractional differential equations. *Comput. Appl. Math.* 2019. Vol. 38. P. 73–98. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0833-5>.
19. Hilfer R. Fractional time evolution. *Applications of Fractional Calculus in Physics.* R. Hilfer (ed.). Singapore: World scientific, 2000. P. 87–130.
20. Oliveira D.S., E. Capelas de Oliveira. Hilfer-Katugampola fractional derivative. arXiv: 1705.07733v1 [math. CA], 15 May 2017.
21. Katugampola U.N. A new approach to generalized fractional derivatives. *Bull. Math. Anal. Appl.* 2014. N 6. P. 1–15.
22. Ishfaq Mallah, Idris Ahmed, Ali Akgul, Fahd Jarad, Subhash Alha. On ψ -Hilfer generalized proportional fractional operators. *AIMS Mathematics.* 2021. Vol. 7(1). P. 82–103.

23. Fand Jarad, Thabet Abdeljawad, Jehad Alzabut. Generalized fractional derivatives generated by a class of local proportional derivatives. *Europ. Phys. J. Spetial Topics*. 2017. Vol. 226. P. 3457–3471.
24. Fand Jarad, Thabet Abdeljawad, Saima Rashid, Zakia Hammouch. More properties of the proportional fractional integral and derivatives of a function with respect to another function. *Adv. Differ. Equat.* 2020. Vol. 303. P. 1–16. doi.org/10.1186/s13662-020-02767-x.
25. Weerawat Sudsutad, Chatthai Thaiprayoon, Bounmy Khaminsou, Jehad Alzabut, Jutarat Kongson. A Gronwall inequality and its applications to the Cauchy-type problem under ψ -Hilfer proportional fractional operators. *Journal of Inequalities and Applications*. 2023. Vol. 2023:20. P. 1–35. doi.org/10.1186/s13660-023-02929-x.
26. Bulavatsky V.M. Closed form of the solutions of some boundary-value problems for anomalous diffusion equation with Hilfer's generalized derivative. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50, N 4. P. 570–577.
27. Karimov E.T., Toshtemirov B.H. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators. *Uzbek Mathematical Journal*. 2021. Vol. 65(2). P. 61–77.
28. Karimov E.T., Ruzhansky M., Toshtemirov B.H. A boundary-value problem for a mixed type equation involving hyper-Bessel fractional differential operator and Hilfer's bi-ordinal fractional derivative. arXiv:2103.08989v2 [math. AP], 15 Jul 2021.
29. Karimov E.T. Boundary value problems with integral transmitting conditions and inverse problems for integer and fractional order differential equations (DSc Thesis). Vol. 1. Tashkent: *Romanovskiy Institute of Mathematics*. Uzbekistan Academy of Sciences, 2020. 207 p.
30. Abramovitz M., Stegun I.A. Handbook of mathematical functions. New York: Dover, 1965. 831 p.
31. Fand Jarad, Thabet Abdeljawad. Generalized fractional derivatives and Laplace transform. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*. Ser. S. 2020. Vol. 13, N 3. P. 709–722.
32. Gorenflo R., Kilbas A.A., Mainardi F., Rogosin S.V. Mittag-Leffler functions, related topics and applications. Berlin: Springer-Verlag, 2014. 454 p.
33. Chitalkar-Dhaigude C.P., Sandeep P. Bhairat, Dhaigude D.B. Solution of fractional differential equations involving Hilfer fractional derivative. *Bulletin of the Marathwada Mathematical Society*. 2017. Vol. 18, N 2. P. 1–13.
34. Sneddon Ian N. The use of integral transform. New York: Mc. Graw-Hill Book Comp., 1972. 539 p.

V.M. Bulavatsky

ON SOME GENERALIZATIONS OF THE BI-ORDINAL HILFER'S FRACTIONAL DERIVATIVE

Abstract. The article is devoted to the generalization of the concept of bi-ordinal Hilfer's fractional derivative, previously introduced in an author's work. In particular, the concept of the bi-ordinal Hilfer's derivative of a function with respect to another function and proportional bi-ordinal Hilfer derivative of a function with respect to another function are introduced, the main compositional properties for operators of bi-ordinal fractional derivatives and integrals are given, a formula for the Laplace transform of the proportional bi-ordinal Hilfer derivative is obtained, and closed-form solutions to the Cauchy-type problems for linear equations with the mentioned generalized bi-ordinal Hilfer's fractional derivatives are constructed.

Keywords: Hilfer's fractional derivative, bi-ordinal Hilfer's fractional derivative, bi-ordinal Hilfer's fractional derivative of a function with respect to another function, proportional bi-ordinal Hilfer's fractional derivative, composite properties, Laplace transform, Cauchy-type problems, closed-form solutions.

Надійшла до редакції 14.11.2023