

Ю.М. БАЗИЛЕВИЧ

Український державний університет науки і технологій, Дніпро, Україна,
e-mail: *bazilvch@ukr.net*.

І.А. КОСТЮШКО

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського», Київ, Україна,
e-mail: *kostushkoia5@gmail.com*.

О.Д. СТАНІНА

Національний технічний університет «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна,
e-mail: *st.olga.d@gmail.com*.

В.С. ТКАЧОВ

Український державний університет науки і технологій, Дніпро, Україна,
e-mail: *tkachov.volodymyr@pdaba.edu.ua*.

РОЗЩЕПЛЕННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ НА БЛОКИ

Анотація. Наведено огляд різних задач про приведення системи лінійних диференціальних рівнянь до декількох незалежних підсистем меншого порядку. Обґрунтовано побудову допоміжних квадратних матриць, для яких застосовується перетворення подібності. Це дає змогу використовувати для різних класів задач результати, які були отримані для приведення двох квадратних матриць, а саме: отримання максимально можливої кількості блоків, доказ єдиності одержаного розщеплення, пошук схованої симетрії досліджуваної системи, виявлення слабо пов'язаних підсистем і створення ефективних обчислювальних алгоритмів розщеплення.

Ключові слова: матриці, системи рівнянь, декомпозиція, максимальна кількість підсистем.

ВСТУП

Для багатьох практичних задач є корисним спрощення відповідної матричної математичної моделі зведенням початкових рівнянь до декількох незалежних підсистем меншого порядку. Для зведення квадратних матриць до блочно-діагонального вигляду перетворенням подібності існує метод комутовної матриці [1, гл. VIII]. Про можливість його застосування для розщеплення систем рівнянь давно відомо з підручників з квантової механіки [2]. Метод комутовної матриці як такий запропонували одночасно А.К. Лопатін і Є.Д. Якубович [3, 4].

У випадку перетворення подібності квадратних матриць у [5] наведено розв'язки таких задач:

- отримання максимально можливої кількості блоків;
- доказ єдиності одержаного розщеплення;
- виявлення симетрії досліджуваної системи;
- виявлення слабо пов'язаних підсистем;
- створення ефективних обчислювальних алгоритмів розщеплення.

У запропонованій роботі наведено огляд різних прикладних задач з прямокутними та квадратними матрицями. Для кожної з них побудовано допоміжні квадратні матриці і застосовано перетворення подібності цих матриць.

1. МЕТОД КОМУТОВНОЇ МАТРИЦІ. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ

Спочатку розглянемо одночасне розщеплення двох квадратних матриць: M_1 , M_2 n -го порядку. Назвемо комутовною матрицю Z таку, що задовольняє систему матричних рівнянь:

$$\begin{cases} M_1 \cdot Z = Z \cdot M_1, \\ M_2 \cdot Z = Z \cdot M_2. \end{cases} \quad (1)$$

© Ю.М. Базилевич, І.А. Костюшко, О.Д. Станіна, В.С. Ткачов, 2024

Множина $\Omega(M_i)$ усіх матриць, що комутують із заданими матрицями $\{M_i\}$, називається централізатором матриць $\{M_i\}$. Відомо [1, 5], що необхідною та достатньою умовою зведення матриць M_i ($i=1,2$) до блочно-діагонального вигляду є існування в централізаторі $\Omega(M_i)$ матриці Z , яка має неоднакові власні числа.

Елементи матриці Z визначаються згідно з системою матричних рівнянь (1). Приходимо до розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що містить $2n^2$ рівнянь із n^2 невідомими — елементами матриці Z . Розв'язок системи рівнянь можна отримати відомими методами.

Описаний метод застосовується спочатку для пари початкових матриць, потім — до пар блоків, отриманих на попередньому етапі. Виконуємо це до отримання пар блоків, що не розщеплюються. Таким чином, згідно з теоремою єдиності [5, теорема 6.5] отримуємо максимально можливу кількість незалежних підсистем

Перейдемо до узагальнення [3, теорема 2] методу комутувальної матриці. У випадку прямокутних матриць M_i ($i=1, g$) розміру $m \times n$ замість комутувальної матриці Z використовуються дві матриці: Z_1, Z_2 , розмірів $m \times m$ та $n \times n$ відповідно, що задовольняють систему матричних рівнянь:

$$Z_1 \cdot M_i = M_i \cdot Z_2 \quad (i=\overline{1, g}). \quad (2)$$

Вказані матриці можуть мати однакові власні числа. Пронумеруємо власні числа матриць Z_1, Z_2 у такий спосіб: спочатку власні числа, які збігаються, потім решту. Зазначимо, що серед розв'язків системи (2) завжди наявні множини $Z_1 = \beta \cdot E_m, Z_2 = \beta \cdot E_n$, де β — довільне число, E_m, E_n — одиничні матриці порядків m та n відповідно.

Уведемо позначення: $\sigma(Z_i)$ ($i=1,2$) — множина усіх різних власних чисел матриці Z_i , $\sigma(Z_i, Z_2) = \sigma(Z_1) \cup \sigma(Z_2)$; $v(A)$ — матриця, стовбцями якої є вектори канонічного базису матриці A . Нехай $S_1 = v^{-1}(Z_1)$, $S_2 = v^{-1}(Z_2)$. Відомо [3], якщо множина $\sigma_0(Z_i, Z_2)$ має більше одного елемента, то перетворення

$$\tilde{M}_i = S_i \cdot M_i \cdot S_2 \quad (i=\overline{1, g})$$

приводить задані матриці M_i ($i=\overline{1, g}$) до блочно-діагонального вигляду

$$\tilde{M}_i = \begin{bmatrix} M_{i1} & & & 0 & \vdots & 0 \\ & M_{i2} & & & \vdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots & \dots \\ & & & M_{id-1} & \vdots & 0 \\ 0 & & & & \vdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \\ \dots \\ m_{d-1} \\ m_d \end{matrix} \quad (3)$$

$n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_{d-1} \quad n_d$

У (3) M_{ij} ($i, j=\overline{1, d-1}$) — матриці розміру $n_k \times m_j$ ($k, j=\overline{1, g}$); $(d-1)$ — кількість власних чисел матриць Z_1, Z_2 ; $\{n_i\}$ (для $i < d$) — кратності власних чисел матриці Z_1 , а $\{m_i\}$ — матриці Z_2 [3].

Значення чисел $n_d(m_d)$ відповідно дорівнюють сумі кратностей усіх власних чисел матриці $Z_1(Z_2)$, які не збігаються з жодним власним числом матриці $Z_2(Z_1)$.

Далі розглядається застосування методу комутувальної матриці та його узагальнення щодо спрощення прикладних задач.

2. КОЛИВАЛЬНІ СИСТЕМИ

Часто задачі механіки зводяться до систем диференціальних рівнянь, відмінних від традиційних. Наприклад, рівняння коливань інколи містять не-симетричні матриці коефіцієнтів. Якщо нехтувати деякими масами, змінюється загальний вигляд самої системи, при цьому матриця інерційних коефіцієнтів стає особливою. Тому звичайно є сенс розглянути розщеплення систем диференціальних рівнянь, які містять довільні, зокрема, прямокутні матриці коефіцієнтів.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$A_1(\Psi) \cdot \ddot{\mathbf{z}} + A_2(\Psi) \cdot \dot{\mathbf{z}} + A_3(\Psi) \cdot \mathbf{z} = \mathbf{R}(t), \quad (4)$$

де $\mathbf{z}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ — шуканий та заданий вектори-стовпці розмірів n та m відповідно; A_i ($i=1,3$) — задані прямокутні комплексні матриці розміру $m \times n$, які лінійно залежать від параметрів $\Psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_p)$:

$$A_i(\Psi) = \sum_{j=1}^p \psi_j \cdot A_j^i,$$

де A_j^i — задані сталі матриці. Далі перепозначимо A_j^i на $M_1, M_2, \dots, M_g$ ($g=3p$).

Потрібно застосувати такі перетворення системи (4):

- заміна змінних $\mathbf{z} = S \cdot \mathbf{y}$ із використанням неособливої матриці S ;
- множення ліворуч перетвореної системи на неособливу матрицю H .

Отримуємо змінені матриці

$$\tilde{M}_i = H \cdot M_i \cdot S \quad (i = \overline{1, g}). \quad (5)$$

Задача полягає у визначенні таких неособливих матриць H , S , щоб матриці $\tilde{M}_i$ були блочно-діагональними і кількість блоків l на головній діагоналі була максимально можливою.

Для цього складаємо допоміжні квадратні матриці і застосовуємо перетворення подібності. За допомогою методу комутовної матриці спочатку приводимо до блочно-діагонального вигляду допоміжні матриці, а далі цей алгоритм застосовуємо до проміжних матриць (блоки, що утворилися на попередньому етапі). Якщо внаслідок обчислень з'ясовано, що не існує жодної комутовної матриці з різними власними числами, то це означає, що подальше спрощення системи рівнянь неможливе. Таким чином визначаємо максимально можливу кількість підсистем для допоміжних матриць.

Для виконання перетворення (5) складаємо допоміжні матриці $\{K_i\}$; далі для них виконуємо перетворення подібності. Існують два способи складання допоміжних матриць. Перший спосіб:

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix}, \quad K_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & M \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = \overline{1, g}, \quad (6)$$

де E_m — одинична матриця порядку m . Нульові блоки в (6) такі, що всі матриці K_i мають розмір $(m+n) \times (m+n)$. У випадку, якщо одна із матриць, наприклад M_1 , є квадратною та неособливою, можна застосувати другий спосіб:

$$K_i = M_1^{-1} \cdot M_{i+1} \quad (i = \overline{1, g-1}).$$

Розщеплення рівнянь (4) із застосуванням перетворення (5) можливе лише у випадку, коли одночасно приводяться до блочно-діагонального вигляду допоміжні матриці [5, теореми 6.3, 6.4].

Задача одночасного зведення декількох матриць до блочно-діагонального вигляду має місце також у разі розв'язання систем диференціальних рівнянь першого порядку у частинних похідних. Такі системи використовують у різних прикладних галузях [9, 10]. Випадок застосування двох матриць коефіцієнтів є відомим. У [11] розглянуто більш загальний випадок, коли кількість матриць та їхній порядок більше двох. Для одночасного приведення декількох матриць до блочно-діагонального вигляду в [11] було застосовано метод комутотної матриці.

3. ОСОБЛИВІСТЬ ЗАДАЧ З СИМЕТРИЧНИМИ МАТРИЦЯМИ

Розщеплення систем з квадратними симетричними матрицями є корисним для багатьох різних задач, наприклад, для задач традиційної теорії коливань, квантової механіки тощо.

Розглянемо методи роботи з симетричними матрицями на прикладі проблеми спрощення задачі напіввизначеного програмування [7, 13–15]:

$$\begin{aligned} \min A_0 \bullet X, \\ A_i \bullet X - b_i, \quad i = \overline{1, m}, \end{aligned}$$

де A_i ($i = \overline{0, m}$) — задані симетричні матриці порядку n ; X — невід'ємно визначена квадратна матриця порядку n , що підлягає означенню; b_i ($i = \overline{1, m}$) — дійсні числа; $\bullet$ — скалярний (внутрішній) добуток двох квадратних матриць:

$$A \bullet X = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} x_{jk}.$$

Потрібно всі матриці A_i ($i = \overline{0, m}$) одним перетворенням подібності привести до однакового блочно-діагонального вигляду. При цьому треба враховувати дві умови: перетворені матриці мають бути симетричними, а нова матриця невідомої має ще залишатися невід'ємно визначеною. Ці умови будуть виконуватися, якщо матриця перетворення S буде ортогональною.

Застосовуємо метод комутотної матриці. Для отримання ортогональної матриці перетворення потрібно з множини комутотних матриць вибрати симетричну матрицю Z . Зазначимо, що разом з кожною матрицею Z у централізатор множини симетричних матриць входить і транспонована матриця Z^T . Дійсно, з рівності $A_i Z = Z A_i$ випливає $Z^T A_i^T = A_i^T Z^T$, а оскільки матриці A_i симетричні, то і $Z^T A_i = A_i Z^T$. Це означає, що Z^T належить централізатору. Тому замість несиметричних (взагалі кажучи) матриць Z потрібно використовувати симетричні матриці $U = Z Z^T$ або $U = Z + Z^T$.

Для симетричної матриці завжди існує канонічний базис, що складається з ортогональних нормованих власних векторів. З таких векторів і складаємо ортогональну матрицю перетворення S .

Зазначимо, що перетворення подібності залишає незмінними власні числа матриці, зберігаючи таким чином невід'ємну визначеність невідомої матриці X .

Для симетричних матриць неможливий особливий випадок, коли ранг централізатора $r > 1$, але всі матриці його базису не мають різних власних чисел. Дійсно, симетричні матриці мають діагональну Жорданову форму. Якщо всі власні числа такої матриці Z однакові, то вона є кратною одиничній матриці і може бути лише одним елементом базису централізатора. Інакше існує матриця Z , що має різні власні числа.

4. СИСТЕМИ КЕРУВАННЯ

Розглянемо приклад декомпозиції системи рівнянь

$$\dot{\mathbf{y}} = A \cdot \mathbf{y} + B \cdot \mathbf{u}, \quad (7)$$

де $\mathbf{y} \in C^n$; $\mathbf{u} \in C^m$; A, B — задані матриці розмірів $n \times n$ та $n \times m$ відповідно.

У (7) робимо заміну змінних

$$\mathbf{y} = S_1 \cdot \tilde{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{u} = S_2 \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \quad (8)$$

де $\tilde{\mathbf{y}} \in C^n$, $\tilde{\mathbf{u}} \in C^m$ — нові змінні. Матриці S_1, S_2 потрібно визначити так, щоб систему рівнянь (7) привести до підсистем меншого порядку.

Оскільки матриця A квадратна, а матриця B прямокутна, потрібно визначити матриці Z_1, Z_2 згідно з (1), (2):

$$Z_1 \cdot A = A \cdot Z_1, \quad Z_1 \cdot B = B \cdot Z_2. \quad (9)$$

Вважаємо, що всі власні числа матриці Z_2 пронумеровані так само, як в розд. 1.

Якщо $\{Z_1, Z_2\}$ — розв'язок системи (9), а $S_i = v(Z_i)$, $i=1,2$ (де $v(Z_i)$ — матриця, стовбцями якої є вектори канонічного базису матриці Z_i), заміна змінних (8) приводить матрицю A до блочно-діагонального вигляду:

$$\tilde{A} = S_1^{-1} \cdot A \cdot S_1 = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_q),$$

а матрицю B — до матриці $\tilde{B} = S_1^{-1} B S_2$, структура якої аналогічна (3).

Зауважимо, що коли хоча б одна із матриць Z_i має принаймні два різні власні числа, тоді заміна (8) для $S_i = v(Z_i)$ приводить (7) до підсистем меншого розміру

$$\dot{\mathbf{y}}_k = A_k \cdot \mathbf{y}_k + B_k \cdot \mathbf{u}_k, \quad k = \overline{1, q}.$$

Тут порядки векторів $\mathbf{y}_k, \mathbf{u}_k$ відповідно становлять n_k, m_k , $\sum_{k=1}^q n_k = n$, $\sum_{k=1}^q m_k \leq m$. Тобто спрощення рівнянь (7) може бути досягнутим не лише за рахунок розщеплення на підсистеми, а ще завдяки зменшенню розміру вектора $\mathbf{u}$, що можливо, якщо в перетвореній матриці $\tilde{B}$ наявний нульовий стовпець.

Далі розглянемо квадратні матриці порядку $l = m + n$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Нульові блоки в (10) такі, що всі матриці K_i мають розмір $(m+n) \times (m+n)$.

Систему (7) можна розщепити на підсистеми меншого порядку лише у випадку, коли матриці (10) одночасно приводяться до блочно-діагонального вигляду перетворенням подібності [5]. При цьому матриця $Z = \text{diag}(Z_1, Z_2)$, де $\{Z_1, Z_2\}$ — розв'язок рівнянь (9), комутує із матрицями (10). Отже, матриці перетворення в (8) можуть бути отримані так: $S_i = v(Z_i)$, $i=1,2$.

Таким чином, послідовне застосування наведеної методики спочатку до заданої системи рівнянь, а потім до отриманих підсистем дає змогу визначити максимальну кількість підсистем мінімального порядку.

Як приклад розглянемо систему керування (7), де $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Для наведених матриць допоміжні матриці мають вигляд

$$K_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Базис у множині матриць, що комутують з матрицями K_1, K_2 , складається із двох матриць:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Як комутивну матрицю Z виберемо матрицю B_2 . Тоді $Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $Z_2 = 1$.

Канонічний базис матриці Z_1 — це вектори $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Тому матриці перетворення такі: $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S_2 = 1$.

Остаточно після заміни змінних (8) отримуємо два незалежні диференціальні рівняння (дві підсистеми):

$$\begin{cases} \dot{\tilde{y}}_1 = 4\tilde{y}_1 + \tilde{u}_1, \\ \dot{\tilde{y}}_2 = 2\tilde{y}_2. \end{cases}$$

5. ПОБУДОВА ДОПОМІЖНИХ МАТРИЦЬ ДЛЯ РІЗНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ

Далі наведено стислу інформацію про систему рівнянь, що підлягає декомпозиції, та відповідні допоміжні матриці. Одночасне приведення допоміжних матриць до блочно-діагонального вигляду перетворенням подібності $\tilde{M} = S^{-1}MS$ є відповідним до перетворення, яке розщеплює систему рівнянь.

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x} + D\mathbf{u}, \quad (11)$$

де $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}$ — вектори розмірів n, m, p відповідно; A, B, C, D — матриці відповідних розмірів

Систему (11) можна привести до підсистем меншого порядку за допомогою перетворення $x = S_1\tilde{x}$, $u = S_2\tilde{u}$, $y = S_2\tilde{y}$ лише у випадку, коли матриці

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & 2E_m & 0 \\ 0 & 0 & 3E_p \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C & D & 0 \end{bmatrix}$$

приводяться одночасно до блочно-діагонального вигляду [5, теорема 8.3].

У [6] розглянуто задачу декомпозиції, яка потребує розв'язання такої системи рівнянь:

$$Z_1A = AZ_1, \quad Z_1B = BZ_2, \quad Z_1C = CZ_1, \quad Z_2D = DZ_2.$$

У цьому випадку допоміжними є матриці

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 2E_m \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

У [3] розглянуто рівняння

$$\mathbf{y} = A(p)\mathbf{u} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - B(p)\mathbf{y},$$

де $\mathbf{y}$ і $\mathbf{f}$ — вектори порядку n , а $\mathbf{x}$ і $\mathbf{u}$ — вектори порядку k . Матриці $A(p)$, $B(p)$ представлено у вигляді:

$$A(p) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(p)A_j, \quad B(p) = \sum_{j=1}^m \varphi_j(p)B_j, \quad m < nk,$$

де $\varphi_j(p)$ — лінійно незалежні функції.

Задача про розщеплення системи наведених рівнянь зводиться до задачі про приведення матриць

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 2E_k \end{bmatrix}, \quad K_{j+1} = \begin{bmatrix} 0 & A_j \\ B_j & 0 \end{bmatrix} \quad (j = \overline{1, m})$$

до блочно-діагонального вигляду.

6. МАКРОЕКОНОМІЧНІ МОДЕЛІ

Зазвичай макроекономічні моделі можуть бути описані матрицями, які пов'язані між собою. Цікавим є питання щодо можливості розділення початкових систем на незалежні підсистеми, що описують, наприклад, види продукції та види технологічних засобів.

Розглянемо відому модель Неймана [8]:

$$\mathbf{U} = A \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{W} = B \cdot \mathbf{x}, \quad (12)$$

де $\mathbf{x} \in R^n$ — вектор інтенсивності застосування технологічних засобів; $\mathbf{U}, \mathbf{W} \in R^m$ — вектори витрат та випуску продукції відповідно; A, B — задані матриці розміру $m \times n$.

Для декомпозиції потрібно визначити заміну змінних

$$\mathbf{x} = S_1 \cdot \tilde{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{W} = S_2 \cdot \tilde{\mathbf{W}}, \quad \mathbf{U} = S_2 \cdot \tilde{\mathbf{U}}, \quad (13)$$

після застосування якої систему (12) можна було б привести до максимально можливої кількості незалежних підсистем. У (13) $\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{W}}, \tilde{\mathbf{U}}$ — вектори нових змінних.

Декомпозиція рівнянь (12) приводить до задачі про приведення допоміжних матриць

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 2E_n \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

до блочно-діагонального вигляду перетворенням подібності.

Запишемо баланс однієї галузі у вигляді

$$\begin{cases} \mathbf{u} = D\mathbf{z} + C\mathbf{y}, \\ \mathbf{z} = P\mathbf{z} + N\mathbf{y}, \end{cases} \quad (14)$$

де $\mathbf{u} \in C^m$ — сировина та матеріали, що використовуються; $\mathbf{z} \in C^n$, $\mathbf{y} \in C^p$ — проміжний та кінцевий продукти галузі відповідно; D, C, P, N — матриці відповідних розмірів.

Застосуємо до системи рівнянь (14) заміну змінних

$$\mathbf{u} = S_1 \bar{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{z} = S_2 \bar{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{y} = S_3 \bar{\mathbf{y}}.$$

Допоміжними є квадратні матриці порядку $n + m + p$:

$$K_1 = \begin{bmatrix} E_p & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot E_n & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot E_m \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & D & C \\ 0 & P & N \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матриця, що комутує з допоміжними матрицями, має такий вигляд: $Z = \text{diag}(Z_1, Z_2, Z_3)$. Матриці перетворення S_i складаються з векторів канонічних базисів матриць Z_i , тобто $S_i = v(Z_i)$, $i = 1, 3$.

7. ЗВЕДЕННЯ МАТРИЦЬ ДО БЛОЧНО-ТРИКУТНОГО ВИГЛЯДУ

Під час дослідження коливальних систем, динамічної моделі Леонт'єва також використовуються зазвичай квадратні матриці. Для матриць вказаного типу існує метод [12] одночасного приведення до блочно-трикутного вигляду. Проте для прямокутних матриць це потребує подальшого дослідження.

ВИСНОВКИ

Розглянуто різні прикладні задачі, які описуються матричними математичними моделями — системами лінійних рівнянь. Наведено методику спрощення початкової моделі одночасним приведенням допоміжних матриць до блочно-діагонального вигляду. Таким чином створюється можливість отримання максимальної кількості незалежних підсистем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gantmacher F.R. The Theory of Matrices. 2 Volumes. New York: Chelsea Publishing Company, 1959. 276 p.
2. Fermi E. Notes on Quantum Mechanics. Chicago: The University of Chicago Press, 1961. 171 p.
3. Якубович Е.Д. Построение систем замещения для некоторого класса многомерных линейных систем автоматического управления. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1969. Т. 12, № 3. С. 362–377.
4. Mitropolsky Yu.A., Lopatin A.K. Nonlinear mechanics, groups and symmetry. Amsterdam: Springer-Science+Business Media, B.Y., 1995. 390 p.
5. Базилевич Ю.Н. Численные методы декомпозиции в линейных задачах механики. Киев: Наук. думка, 1987. 156 с.
6. Можаяев Г.В. Об использовании симметрии в линейных задачах оптимального управления с квадратичным критерием качества. *Автоматика и телемеханика*. 1975. № 6. С. 22–30; № 7. С. 23–31.
7. Базилевич Ю.Н. Об упрощении задачи полуопределенного программирования. *Теорія оптимальних рішень*. 2016. № 15. С. 103–107.
8. Манків Г.Н. Макроекономіка. Київ: Основи, 2000. 588 с.
9. Smirnov V.I. A course of Higher Mathematics. Vol. II. Oxford; London; Edinburgh; New-York; Paris; Frankfurt: Pergamon press, 1964. 643 p.
10. Гурса Е. Интегрирование уравнений с частными производными первого порядка. Київ: Радянська школа, 1941. 416 с.
11. Bazylevych Yu., Kostiusenko I. Matrices diagonalization in solution of partial differential equation of the first order. *AIP Conference Proceedings*. 2019. Vol. 2164, Iss. 1. <https://doi.org/10.1063/1.5130806>.
12. Bazilevich Yu.N. The best reduction of matrices to block-triangular form for hierarchical decomposition problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 456–463. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9947-1>.
13. Kaashif H., Pasechnik D. RepnDecomp: A GAP package for decomposing linear representations of finite groups. *The Journal of Open Source Software*. 2020. Vol. 5(50). P. 1835. <https://doi.org/10.21105/joss.01835>.
14. de Klerk E., Dobre C., Pasechnik D.V. Numerical block diagonalization of matrix *-algebras with application to semidefinite. *Math. Program. Ser. B*. 2011. Vol. 129. P. 91–111.
15. Murota K., Kanno Y., Kojima M., Kojima S. A numerical algorithm for block-diagonal decomposition of matrix *-algebras with application to semidefinite programming. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 2010. Vol. 27. P. 125–160.

Yu.M. Bazylevych, I.A. Kostiusenko, O.D. Stanina, V.S. Tkachov

DECOUPLING A SYSTEM OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS INTO BLOCKS

Abstract. Problems on reducing a system of linear differential equations to several independent low-order subsystems are considered. Construction of the auxiliary square matrices for which similarity transformation is applied is substantiated. This allows transferring the results obtained for the problem of reducing two square matrices to different classes of problems: obtaining the maximum possible number of blocks, proof of the unity of the obtained decoupling, detection of the symmetry of the system under study, detection of loosely coupled subsystems, and creation of efficient computational splitting algorithms.

Keywords: matrices, systems of equations, decomposition, maximum number of subsystems.

Надійшла до редакції 29.02.2024