

П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача
НАН України, Львів, Україна,
e-mail: *Petro.Malachivskyi@gmail.com*.

Л.С. МЕЛЬНИЧОК

Львів, Україна, e-mail: *levkom@gmail.com*.

Я.В. ПІЗЮР

Національний університет «Львівська політехніка», Львів, Україна,
e-mail: *yaropolk.v.piziur@lpnu.ua*.

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ СТЕПЕНЕВИМ ВИРАЗОМ

Анотація. Запропоновано метод побудови чебишовського наближення з відносною похибкою функцій багатьох змінних степеневим виразом. Він полягає в побудові проміжного чебишовського наближення з відносною похибкою поліномом значень кореня відповідного степеня від наближуваної функції. Параметри наближення поліномом обчислено як граничне середньостепеневе наближення за ітераційною схемою з використанням методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Наведено тестові приклади, які підтверджують швидку збіжність методу побудови чебишовського наближення функцій однієї, двох і трьох змінних степеневим виразом.

Ключові слова: чебишовське наближення функцій багатьох змінних, степеневий вираз, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція.

ВСТУП

Степеневі вирази використовують для опису залежностей у різних галузях науки й техніки [1–3], зокрема об'ємного коефіцієнта масопередачі [4], залежності навантаження, спричиненого транспортними засобами на дорожнє покриття, від товщини покриття, температури й характеристик матеріалу [5] тощо.

Чебишовське наближення степеневими виразами застосовують для опису спеціальних математичних функцій [6], а також у моделюванні спеціальних класів фізичних, хімічних, біологічних і економічних процесів [7–9]. Наближення степеневими виразами використовують для опису термометричної характеристики германієвого мікросенсора [10–12], термісторів [13, 14], калібрувальної кривої витратоміра [15], а також функціональних залежностей у початкових умовах задачі просторової теплопровідності [16, 17]. Застосування степеневі залежності питомих іонізаційних втрат енергії заряджених частинок від їхньої енергії дає змогу отримати достовірні коефіцієнти енергетичного калібрування для комбінованих спектрометрів [18].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай функція n змінних $f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, неперервна в деякій обмеженій області D , $D \subset R^n$, набуває лише додатних значень у D , де R^n — n -вимірний векторний простір. Наблизимо функцію $f(X)$, задану на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^s$, $\Omega \in D$, степеневим виразом

$$S_m(a; X) = a_0(P_m(a; X))^b, \quad m+1 < s, \quad b \neq 0, \quad (1)$$

де $P_m(a; X)$ — узагальнений поліном вигляду

$$P_m(a; X) = 1 + \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(X) \quad (2)$$

за системою лінійно незалежних, неперервних на D дійсних функцій $\varphi_i(X)$, $i=1, m$, а $a_i, i=0, m$, — невідомі параметри $\{a_i\}_{i=0}^m \in A$, $A \subseteq R^{m+1}$. Вираз $S_m(a^*; X)$ називатимемо чебишовським наближенням функції $f(X)$ з відносною похибкою на множині точок Ω , якщо він задовольняє умову

$$\max_{X \in \Omega} \left| 1 - \frac{S_m(a^*; X)}{f(X)} \right| = \min_{a \in A} \max_{X \in \Omega} \left| 1 - \frac{S_m(a; X)}{f(X)} \right|. \quad (3)$$

У праці [7] побудову чебишовського наближення з відносною похибкою для функції однієї змінної степеневим виразом (1) зведено до обчислення параметрів чебишовського наближення з відносною похибкою поліномом. Аналогічно, чебишовське наближення степеневим виразом (1) з відносною похибкою зводимо до побудови наближення з відносною похибкою узагальненим поліномом

$$\bar{P}_m(a; X) = \bar{a}_0 P_m(a; X) = \bar{a}_0 \left(1 + \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(X) \right) \quad (4)$$

функції $f_s(X) = (f(X))^{1/b}$ на множині точок Ω щодо невідомих параметрів $\bar{a}_0$ і $a_i, i=1, m$. Чебишовське наближення функції багатьох змінних $f_s(X)$ поліномом (4) обчислюємо як граничне наближення у нормі простору L^p для $p \rightarrow \infty$ методом, описаним у працях [19–21].

МЕТОД ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ СТЕПЕНЕВИМ ВИРАЗОМ

У праці [7] теоретично обґрунтовано можливість зведення побудови чебишовського наближення з відносною похибкою функції однієї змінної степеневим виразом (1) до побудови наближення значень кореня відповідного степеня цієї функції поліномом. Така можливість є й у разі побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних степеневим виразом (1).

Теорема 1. Нехай додатна неперервна функція n змінних $f(X)$ задана на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^s$ деякої обмеженої області D ($\Omega \in D$). Чебишовське наближення функції $f(X)$ з відносною похибкою степеневим виразом (1) на множині точок Ω визначається через чебишовське наближення з відносною похибкою узагальненим поліномом (4) функції $f_s(X) = (f(X))^{1/b}$ на Ω . При цьому значення параметрів $a_i, i=1, m$, наближення виразом (1) збігаються зі значеннями однойменних параметрів наближення узагальненим поліномом $\bar{P}_m(a; X)$ (4) функції $f_s(X)$ на множині точок Ω , а параметр a_0 обчислюється за формулою

$$a_0 = \frac{2f(X_{\max})f(X_{\min})}{\bar{S}_m(a; X_{\min})f(X_{\max}) + \bar{S}_m(a; X_{\max})f(X_{\min})}, \quad (5)$$

де $X_{\max}$ — точка, в якій відносна похибка наближення функції $f(X)$ виразом

$$\bar{S}_m(a; X) = (\bar{P}_m(a; X))^b$$

досягає найбільшого значення на множині точок Ω , а $X_{\min}$ — точка, в якій значення відносної похибки найменше.

Доведення. У праці [22] для функцій багатьох змінних теоретично обґрунтовано, що точки H -множини чебишовського наближення узагальненим поліномом (4) збігаються з точками H -множини чебишовського наближення виразом $\psi(P_m(a; X))$, де $\psi(z)$ — строго монотонна функція. Оскільки степеневі функції є строго монотонними, то ця властивість справджується для виразу (1). Відповідно до [22] точки H -множини чебишовського наближення функцій багатьох змінних є аналогами точок альтернансу чебишовського наближення функцій однієї змінної. В точках H -множини похибка наближення функцій набуває найбільшого за модулем значення. Ґрунтуючись на результатах праці [22] щодо зазначеної властивості точок H -множини чебишовського наближення, припустимо, що H -множина точок чебишовського наближення степеневим виразом (1) складається з $(m+2)$ -х точок

$$H = \{ H_i^+, i = \overline{1, k}, H_i^-, i = \overline{1, l}, k + l = m + 2 \}, \quad (6)$$

де H^+ — точки, в яких похибка наближення додатна, а H^- — точки, в яких похибка наближення від'ємна. Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення [22] параметри наближення степеневим виразом (1) функції $f(X)$ з відносною похибкою задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 - \frac{a_0(P_m(a; H_i^+))^b}{f(H_i^+)} = |\mu|, i = \overline{1, k}, \\ 1 - \frac{a_0(P_m(a; H_i^-))^b}{f(H_i^-)} = -|\mu|, i = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (7)$$

де $|\mu|$ — похибка наближення. Послідовно віднімаючи від k -го рівняння системи (7) $(k-1)$ -е, від $(k-1)$ -го — $(k-2)$ -е тощо і аналогічно від l -го рівняння — $(l-1)$ -е тощо, вилучаємо із системи рівнянь (7) невідомі a_0 і μ :

$$\begin{cases} \frac{(P_m(a; H_{i+1}^+))^b}{f(H_{i+1}^+)} = \frac{(P_m(a; H_i^+))^b}{f(H_i^+)}, i = \overline{1, k-1}, \\ \frac{(P_m(a; H_{i+1}^-))^b}{f(H_{i+1}^-)} = \frac{(P_m(a; H_i^-))^b}{f(H_i^-)}, i = \overline{1, l-1}. \end{cases} \quad (8)$$

Оскільки функція $f(X)$ додатна, то добувши корінь степеня b із лівої та правої частин системи рівнянь (8), отримаємо

$$\begin{cases} P_m(a; H_{i+1}^+) f_s(H_i^+) = P_m(a; H_i^+) f_s(H_{i+1}^+), i = \overline{1, k-1}, \\ P_m(a; H_{i+1}^-) f_s(H_i^-) = P_m(a; H_i^-) f_s(H_{i+1}^-), i = \overline{1, l-1}, \end{cases} \quad (9)$$

де $f_s(X) = (f(X))^{1/b}$.

Система рівнянь (9) збігається із системою рівнянь для визначення параметрів $a_i, i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f_s(X)$ узагальненим поліномом (4). Справді, виходячи з того, що точки H -множини чебишовського наближення степеневим виразом (1) збігаються з точками H -множини чебишовського наближення узагальненим поліномом (4), параметри чебишовського наближення узагальненим поліномом (4) функції $f_s(X)$ з відносною похибкою задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} 1 - \bar{a}_0 P_m(a; H_i^+) / f_s(H_i^+) = |\bar{\mu}|, i = \overline{1, k}, \\ 1 - \bar{a}_0 P_m(a; H_i^-) / f_s(H_i^-) = -|\bar{\mu}|, i = \overline{1, l}, \end{cases} \quad (10)$$

де $|\bar{\mu}|$ — похибка наближення. Аналогічно до вилучення невідомих a_0 і μ із системи рівнянь (7) вилучимо невідомі $\bar{a}_0$ і $\bar{\mu}$ із системи рівнянь (10). Після вилучення цих невідомих отримуємо систему рівнянь, яка збігається із системою рівнянь (9).

Оскільки система рівнянь (9) для визначення значень параметрів $a_i, i=1, m$, чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f(X)$ на множині точок Ω степеневим виразом (1) збігається із системою рівнянь (10) відносно значень параметрів $a_i, i=1, m$, чебишовського наближення функції $f_s(X)$ поліномом (4), обчислення значень цих параметрів наближення степеневим виразом (1) зводиться до обчислення значень відповідних параметрів чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f_s(X)$ поліномом (4) на множині точок Ω .

Значення параметра a_0 можна визначити як розв'язок однопараметричної задачі чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f(X)$ виразом $a_0 \bar{S}_m(a; X)$ на множині точок Ω :

$$\max_{X \in \Omega} \left| 1 - \frac{a_0 \bar{S}_m(a; X)}{f(X)} \right| \xrightarrow{a_0} \min. \quad (11)$$

Розв'язок задачі (11) відносно значення параметра a_0 обчислюється за формулою (5).

Отже, значення параметрів $a_i, i=1, m$, чебишовського наближення з відносною похибкою виразом (1) збігаються зі значеннями однойменних параметрів чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f_s(X)$ на множині точок Ω узагальненим поліномом $\bar{P}_m(a; X)$, а значення параметра a_0 обчислюється за формулою (5). Теорему доведено.

Відповідно до теореми 1 побудова чебишовського наближення степеневим виразом (1) зводиться до обчислення параметрів чебишовського наближення функції $f_s(X)$ поліномом (4). Обчислення параметрів чебишовського наближення функції багатьох змінних $f_s(X)$ поліномом (4) можна реалізувати методом, описаним у працях [19, 20]. Цей метод полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень з використанням ітераційного процесу на основі методу найменших квадратів

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_r(X) (f_s(X) - \bar{P}_m(a; X))^2 \xrightarrow{a \in A} \min, \quad r=0, 1, \dots, \quad (12)$$

з ваговою функцією

$$\rho_r(X) = \rho_{r-1}(X) |\Delta_r(X)| = \rho_0(X) \prod_{i=1}^r |\Delta_i(X)|, \\ r=1, \dots, p-2, \quad p=3, 4, \dots, \quad (13)$$

де

$$\rho_0(X) = \frac{1}{f_s^2(X)}, \quad \Delta_k(X) = 1 - \frac{\bar{P}_{m,k-1}(a; X)}{f_s(X)}, \quad k=1, r,$$

а $\bar{P}_{m,k}(a; X)$ — наближення функції $f_s(X)$ методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_k(X)$, яке відповідає середньостепеневому наближенню степеня $k+2$.

Завершення побудови середньостепеневих наближень з використанням ітерацій (12) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$|\mu_{r-1} - \mu_r| \leq \varepsilon \mu_r, \quad (14)$$

де

$$\mu_r = \max_{X \in \Omega} \left| 1 - \frac{\bar{P}_{m,r}(a; X)}{f_s(X)} \right|.$$

Відповідно до теореми 1 значення параметрів $a_i, i = \overline{1, m}$, чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f(X)$ на множині точок Ω степеневим виразом (1) збігаються зі значеннями однойменних параметрів отриманого наближення $\bar{P}_{m,r}(a; X)$. Значення параметра a_0 визначаємо за формулою (5). Оскільки однопараметрична задача чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f(X)$ виразом $a_0 \bar{S}_m(a; X)$ на множині точок Ω (11) еквівалентна задачі чебишовського наближення

$$\max_{X \in \Omega} \left| 1 - \frac{\tilde{a}_0 (\bar{P}_m(a; X))^b}{f(X)} \right| \xrightarrow{\tilde{a}_0} \min$$

відносно параметра $\tilde{a}_0$, то чебишовське наближення з відносною похибкою функції $f(X)$ виразом $S_m(a; X)$ на множині точок Ω збігається з наближенням виразом $\tilde{a}_0 (\bar{P}_m(a; X))^b$. Використання цього факту під час практичної реалізації обчислення чебишовського наближення з відносною похибкою функції $f(X)$ виразом $S_m(a; X)$ на множині точок Ω дещо зменшує загальний обсяг обчислень.

Результати обчислення параметрів чебишовського наближення з відносною похибкою степеневим виразом (1) для тестових прикладів підтверджують швидку збіжність у разі наближення функцій однієї, двох і трьох змінних.

Приклад 1. Знайдемо чебишовське наближення з відносною похибкою функції однієї змінної $y(x) = \sqrt[3]{1+2x+0.3x^3}$, заданої в точках $x_i, i = \overline{0, 20}$, де $x_i = 0.1i$, степеневим виразом $S_2(a; x) = a_0 \sqrt[3]{1+a_1x+a_2x^2}$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ в умові (14) для функції $y_s(x) = 1+2x+0.3x^3$ отримано чебишовське наближення поліномом

$$\bar{P}_2(a; x) = 0.7555142273x^2 + 1.58744604x + 1.023276474 \quad (15)$$

за 4 ітерації (12). Цей поліном забезпечує відносну похибку наближення 2.5%. Відповідно чебишовське наближення функції $y(x)$ степеневим виразом

$$S_2(a; x) = 1.00011938 \sqrt[3]{0.7555142273x^2 + 1.58744604x + 1.023276474} \quad (16)$$

забезпечує відносну похибку наближення 0.837%. Графіки похибки наближень виразами (15) і (16) представлено на рис. 1.

Наведені на рис. 1 криві похибки апроксимації відповідають характеристичній властивості чебишовського наближення. Вони мають по чотири екстремальні точки (точки альтернансу), в яких значення похибки наближення за модулем збігаються у межах заданої точності, а знак відхилення у цих точках чергується [7, 23]. Наведені графіки відповідають також твердженню [22] щодо точок H -множини чебишовського наближення. Екстремальні точки похибки наближення поліномом (16) збігаються з екстремальними точками (точками альтернансу) похибки наближення виразом (15).

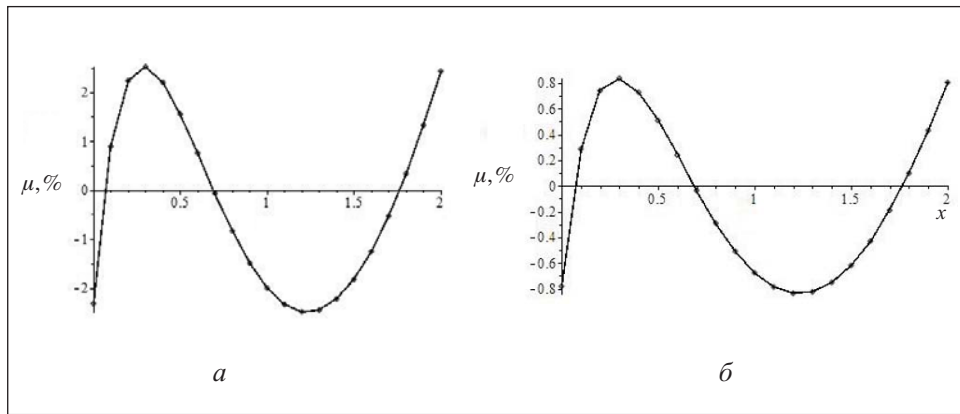


Рис. 1. Графіки відносної похибки наближення: функції $y_s(x)$ поліномом (15) (а), функції $y(x)$ степеневим виразом (16) (б)

В екстремальних точках похибка наближення поліномом (16) набуває таких значень:

$$(0, -0.007819691), (0.3, 0.008367812729), \\ (1.2, -0.008367814281), (2.0, 0.00804602296). \quad (17)$$

Розбіжність значень похибки наближення в екстремальних точках (17) можна зменшити, підвищивши точність обчислення ε в умові (14). Чебишовське наближення функції $y(x)$ степеневим виразом $S_2(a; x)$

$$S_2(a; x) = 1.000056769 \sqrt[3]{37552451826x^2 + 1.585929135x + 1.024672066} \quad (18)$$

для $\varepsilon = 0.00003$ отримано за 95 ітерацій з похибкою 0.8237%. Розбіжність значень похибки наближення (18) за модулем в екстремальних точках

$$(0, -0.008214532), (0.3, 0.008236717686), \\ (1.2, -0.008236717711), (2.0, 0.00823243693) \quad (19)$$

зменшилася. З (17) і (19) випливає, що екстремальні точки похибки наближення функції $y(x)$ не змінилися. Знак похибки в цих точках чергується, і відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення функції однієї змінної [7] ці точки відповідають точкам альтернансу.

Приклад 2. Для функції двох змінних

$$z_2(x, y) = 1 / \sqrt{2 + 2.9(x^2 + y^2) + 1.3(x^3 + y^3)}, \quad (20)$$

заданої в точках (x_i, y_j) , $i = \overline{0, 20}$, $j = \overline{0, 20}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, знайдемо чебишовське наближення з відносною похибкою степеневим виразом

$$S_{2,2}(a; x, y) = a_0 / \sqrt{1 + a_1(x + y) + a_2(x^2 + y^2)}. \quad (21)$$

З використанням запропонованого методу за десять ітерацій (12) з ваговою функцією (13) для $\varepsilon = 0.003$ отримано проміжне наближення функції $z_2^{-2}(x, y)$ поліномом

$$P_{2,2}(a; x, y) = 2.12987898 + 1.480066091(x + y) + 3.004164689(x^2 + y^2) \quad (22)$$

з відносною похибкою 6.89%. Наближення функції $z_2(x, y)$ степеневим виразом

$$S_{2,2}(a; x, y) = \frac{0.998262731}{\sqrt{2.12987898 + 1.480066091(x + y) + 3.004164689(x^2 + y^2)}} \quad (23)$$

забезпечує відносну похибку наближення 3.443%. Графіки поверхонь похибки наближень поліномом (22) і виразом (23) представлено на рис. 2.

Вигляд поверхонь похибок наближень, наведених на рис. 2, підтверджує теоретичний вислід щодо точок H -множини [22]. Відповідно до цього висліду екстремальні точки (точки H -множини) відносної похибки відтворення значень функції $z_2^{-2}(x, y)$ поліномом (22) збігаються з екстремальними точками похибки відтворення значень функції $z_2(x, y)$ степеневим виразом (23).

Наближення функції $z_2(x, y)$ степеневим виразом $S_{2,2}(a; x, y)$

$$S_{2,2}(a; x, y) = \frac{0.9982553944}{\sqrt{2.135126121 + 1.471201916(x + y) + 3.006350333(x^2 + y^2)}}$$

для $\varepsilon = 0.00001$ отримано за 72 ітерації з похибкою 3.41%.

Приклад 3. Побудуємо чебишовське наближення з відносною похибкою функції трьох змінних

$$z_3(x, y, t) = (4.7 + 0.367(x^2 + y^2 + t^2))^3,$$

заданої в точках (x_i, y_j, t_r) , $i = 0, \overline{10}$, $j = 0, \overline{10}$, $r = 0, \overline{10}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, $t_r = 0.1r$, степеневим виразом

$$S_{3,1}(a; x, y, t) = a_0(1 + a_1(x + y + t))^3.$$

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ за 8 ітерацій отримано для функції $z_3(x, y, t)$ наближення степеневим виразом

$$S_{3,1}(a; x, y, t) = 0.9982998304(4.572627443 + 0.3572541362(x + y + t))^3,$$

який забезпечує відносну похибку 8.068%.

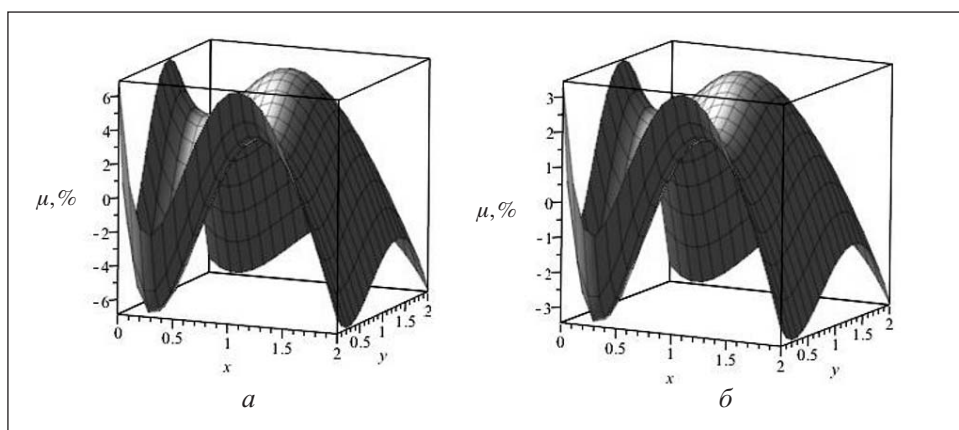


Рис. 2. Графіки поверхонь відносної похибки наближення: функції $z_2^{-2}(x, y)$ поліномом (22) (а), функції $z_2(x, y)$ степеневим виразом (23) (б)

ВИСНОВКИ

Метод побудови чебишовського наближення з відносною похибкою таблично заданої функції багатьох змінних $f(X)$ степеневим виразом (1) реалізовано із застосуванням проміжного чебишовського наближення функції $f_s(X) = \sqrt[k]{f(X)}$ з відносною похибкою узагальненим поліномом (4). Чебишовське наближення поліномом обчислено як граничне середньостепеневе наближення з використанням методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Запропонований метод забезпечує можливість побудови чебишовського наближення степеневим виразом з необхідною точністю. Результати тестових прикладів підтверджують швидку збіжність методу побудови чебишовського наближення з відносною похибкою степеневим виразом функцій однієї, двох і трьох змінних.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Zamani M. A simple 2D interpolation model for analysis of nonlinear data. *Natural Science*. 2010. Vol. 2, N 6. P. 641–645. <https://doi.org/10.4236/ns.2010.26080>.
2. Iske A. Approximation theory and algorithms for data analysis. New York: Springer, 2018. X, 358 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-05228-7>.
3. Cavoretto R. A numerical algorithm for multidimensional modeling of scattered data points. *Comp. Appl. Math*. 2015. Vol. 34. P. 65–80. <https://doi.org/10.1007/s40314-013-0104-9>.
4. Jamshidzadeh M., Ein-Mozaffari F., Lohi A. Experimental analysis of the mass transfer coefficient and interfacial area in an aerated coaxial mixing system comprising a non-Newtonian solution. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2020. Vol. 59 (49). P. 21530–21547. <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.0c03641>.
5. Gajda J., Sroka R., Zeglen T., Burnos P. The influence of temperature on errors of WIM systems employing piezoelectric sensors. *Metrology and Measurement Systems*. 2013. Vol. XX, N 2. P. 171–182. <https://doi.org/10.2478/mms-2013-0015>.
6. Luke Y.L. Mathematical functions and their approximations, 1st ed. Academic Press, 1975. 568 p.
7. Попов Б.А., Теслер Г.С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наук. думка, 1980. 352 с.
8. DeVore R.A. Nonlinear approximation and its applications. In: Multiscale, Nonlinear and Adaptive Approximation. DeVore R.A., Kunoth A. (Eds.). Berlin; Heidelberg: Springer, 2009. P. 169–201. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-03413-8>.
9. Skopetskii V.V., Malachivskii P.S. Chebyshev approximation of functions by the sum of a polynomial and an expression with a nonlinear parameter and endpoint interpolation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 1. P. 58–68. <https://doi.org/10.1007/s10559-009-9078-4>.
10. Mitin V.F., Kholevchuk V.V., Kolodych B.P. Ge-on-GaAs film resistance thermometers: low-temperature conduction and magnetoresistance. *Cryogenics*. 2011. Vol. 51, N 1. P. 68–73. <https://doi.org/10.1016/j.cryogenics.2010.11.003>.
11. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Danchak N.V., Orazov E.B. Chebyshev approximation by exponential-power expression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, N 6. P. 877–881. <https://doi.org/10.1007/s10559-013-9577-1>.
12. Malachivskyy P.S., Pizyur Ya.V., Danchak N.V., Orazov E.B. Chebyshev approximation by exponential expression with relative error. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 2. P. 286–290. <https://doi.org/10.1007/s10559-015-9720-2>.

13. Rudtsch S., von Rohden C. Calibration and self-validation of thermistors for high-precision temperature measurements. *Measurement*. 2015. Vol. 76. P. 1–6. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2015.07.028>.
14. Hughes-Riley T., Lugoda P., Dias T., Trabi C.L., Morris R.H. A study of thermistor performance within a textile structure. *Sensors*. 2017. Vol. 17, Iss. 8. Article number 1804. <https://doi.org/10.3390/s17081804>.
15. Javaid A., Mohammed A., Ghaithan A. A regression-based model for prediction of flowmeters calibration cost in oil and gas industry. *Flow Measurement and Instrumentation*. 2022. Vol. 86. Article number 102191. <https://doi.org/10.1016/j.flowmeasinst.2022.102191>
16. Baranovsky S.V., Bomba A.Ya., Lyashko S.I. Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58, N 4. P. 576–592. <https://doi.org/10.1007/s10559-022-00491-w>.
17. Baranovsky S. V., Bomba A.Ya. Generalizing the infectious disease model taking into account diffusion perturbations, logistic dynamics, and biostimulation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59, N 1. P. 134–145. <https://doi.org/10.1007/s10559-023-00549-3>.
18. Горпинич О.К., Поворозник О.М., Ячменьов О.О. Використання емпіричної залежності $dE/dx-E^n/a$ для калібровки. *Збірник наукових праць Інституту ядерних досліджень*. 2002. № 2(8). С. 211–215.
19. Malachivskyy P.S., Pizyur Y.V., Malachivskiy R.P., Ukhanska O.M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 1. P. 76–86. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8>.
20. Malachivskyy P.S., Melnychok L.S., Pizyur Y.V. Chebyshev approximation of multivariable functions by the exponential expression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 3. P. 429–435. <https://doi.org/10.1007/s10559-021-00367-5>.
21. Malachivskyy P.S., Pizyur Y.V., Malachivskiy R.P. Chebyshev approximation by a rational expression for functions of many variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 5. P. 811–819. <https://doi.org/10.1007/s10559-020-00302-0>.
22. Collatz L., Krabs W. Approximationstheorie. Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen. Stuttgart: Vieweg+Teubner Verlag, 1973. 212 p.
23. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.

P.S. Malachivskyy, L.S. Melnychok, Ya.V. Pizyur
Chebyshev Approximation of the Multivariable Functions
by Power Expression

Abstract. A method of constructing the Chebyshev approximation with the smallest relative error of multivariable functions by a power expression is proposed. It consists in constructing an intermediate Chebyshev approximation of the function, which is the root of the corresponding power of the given function by a polynomial. The parameters of the polynomial approximation are calculated as the limiting mean-power approximation according to the iterative scheme using the least squares method with a variable weight function. Test examples are given that confirm the fast convergence of the method of constructing the Chebyshev approximation using the power expression of functions of one, two, and three variables.

Keywords: Chebyshev approximation of the multivariable functions, power expression, mean-power approximation, least squares method, variable weight function.

Надійшла до редакції 13.02.2024