

А.О. ЧИКРІЙІнститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: g.chikrii@gmail.com.**Й.С. РАППОПОРТ**Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: jeffrappoport@gmail.com.

ДОСТАТНІ УМОВИ ЗБЛИЖЕННЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З РІЗНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ

Анотація. Розглянуто проблему зближення керованих об'єктів з різною інерційністю в ігрових задачах динаміки. Для таких керованих об'єктів характерним є невиконання умови Понтрягіна на деякому інтервалі часу. Для розв'язання проблеми уведено спеціальні багатозначне відображення і матрична функція для вирівнювання ресурсів керування гравців, а потім додатковий ресурс компенсується за рахунок тілесної складової циліндричної термінальної множини. За допомогою нижньої розв'язувальної функції для об'єктів з різною інерційністю запропоновано дві модифіковані схеми першого прямого методу Понтрягіна, що гарантують успішне завершення конфліктно-керованого процесу в класі контркерувань. Уведено верхню розв'язувальну функцію та розглянуто відповідні модифіковані схеми методу розв'язувальних функцій для керованих об'єктів з різною інерційністю в класі квазістратегій та контркерувань. Нові теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі.

Ключові слова: керовані об'єкти з різною інерційністю, квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

ВСТУП

Безпілотні літальні апарати останнім часом набули широких функціональних можливостей і дістали застосовування у багатьох комерційних та військових галузях. Складність задач висуває на чільне місце питання взаємодії груп рухомих об'єктів з різною інерційністю в умовах конфлікту. Серед багатьох публікацій зарубіжних авторів, тематика яких пов'язана з питаннями керування реально чинними прототипами безпілотних апаратів з різною інерційністю, відзначимо праці [1–9]. У цих роботах розглядаються задачі групової взаємодії під час розв'язання задач зближення керованих об'єктів та стратегій перехоплення цілей з багатьма учасниками. Аналіз зазначених робіт свідчить, що в них досліджуються евристичні методи зближення конфліктно-керованих об'єктів і вони мають прикладний, інженерний характер. Отримані в цих роботах результати підкріплені як експериментами з використанням комп'ютерного моделювання, так і польовими випробуваннями за допомогою чинних прототипів безпілотних літальних апаратів та інших об'єктів керування з різною інерційністю. Для теоретичного обґрунтування результатів цих і схожих робіт запропоновано методику формування стратегій керування, що дає можливість розробити ефективний математичний апарат, придатний для застосування в реальних умовах щодо вирішення проблеми зближення конфліктно-керованих об'єктів з різною інерційністю та стратегій перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки з багатьма учасниками.

Робота присвячена дослідженню проблеми зближення керованих об'єктів з різною інерційністю та перехоплення цілей в ігрових задачах динаміки на основі сучасної версії методу розв'язувальних функцій [10–12]. Для керованих об'єктів з різною інерційністю характерним є те, що на деякому інтервалі часу не виконується умова Понтрягіна [13, 14]. Для розв'язання задачі введено

спеціальні багатозначне відображення і матрична функція для вирівнювання ресурсів керування гравців, а потім додатковий ресурс компенсується за рахунок тілесної складової циліндричної термінальної множини. За допомогою нижньої розв'язувальної функції для об'єктів з різною інерційністю запропоновано дві модифіковані схеми першого прямого методу Понтрягіна [13], що гарантують успішне завершення конфліктно-керованого процесу в класі контркерувань. Уведено верхню розв'язувальну функцію та наведено відповідні модифіковані схеми методу розв'язувальних функцій для керованих об'єктів з різною інерційністю в класі квазістратегій та контркерувань. Нові теоретичні результати проілюстровано на модельному прикладі.

Робота продовжує дослідження [10–12], дотична до публікацій [13–20] і поширює клас ігрових задач зближення керованих об'єктів із різною інерційністю, які мають розв'язок.

ДОСТАТНІ УМОВИ ГАРАНТОВАНОГО РЕЗУЛЬТАТУ В ПРЯМИХ МЕТОДАХ ЗБЛИЖЕННЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З РІЗНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ

У скінченновимірному евклідовому просторі R^n , $n \geq 2$, розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описана рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t, \tau) \varphi(u(\tau), v(\tau)) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g: R_+ \rightarrow R^n$, $R_+ = \{t: t \geq 0\}$, вимірна за Лебегом [9, 11] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t, \tau)$, $t \geq \tau \geq 0$, вимірна за t , а також є сумовною за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задається функцією $\varphi(u, v)$, $\varphi: U \times V \rightarrow R^n$, яка вважається неперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непорожніх компактів U і V .

Керування гравців $u(\tau)$, $u: R_+ \rightarrow U$, і $v(\tau)$, $v: R_+ \rightarrow V$, є вимірними функціями часу.

Крім процесу (1) задано термінальну множину M^* , що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \quad (2)$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^n , а M — компакт з ортогонального доповнення L до підпростору M_0 у R^n .

Цілі першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший гравець (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (2) за найкоротший час, а другий гравець (втікач) — максимально відтягнути момент попадання траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути зустрічі.

Нехай гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$. Вважатимемо, що задана стратегія зближення, якщо визначено відображення $U(g(T), v_t(\cdot))$, яке на основі інформації про $g(T)$ і $v_t(\cdot)$ формує вимірну функцію

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U, \quad (3)$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s): s \in [0, t]\}$ — передісторія керування другого гравця до моменту t . Якщо замість відображення $U(g(T), v_t(\cdot))$ задіяти відображення $U(g(T), v(t))$, то вважатимемо, що задана стробоскопічна стратегія зближення, яка визначає контркерування у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v(t)), \quad t \in [0, T], \quad u(t) \in U. \quad (4)$$

Керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію, а контркерування [13] $u(t) = u(z_0, v(t))$ призначається стробоскопічною стратегією Хаєка [17]. При цьому має бути виконана умова «фізичної здійсненності»: якщо $v^1(t) = v^2(t)$ майже всюди для $t \geq 0$, то $u(z_0, v_t^1(\cdot)) = u(z_0, v_t^2(\cdot))$ майже всюди для $t \geq 0$, $v^i(t) \in V$, $v^i(\cdot)$ — вимірна функція, $i=1,2$.

Сформулюємо необхідні факти з опуклого аналізу [15, 19] у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ — опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід’ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau) d\tau X$, $T > 0$. До того ж якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau)X$ і $\int_0^T \omega(\tau) d\tau \leq 1$, то $\int_0^T f(\tau) d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

Позначимо π оператор ортогонального проектування з R^n у L . Покладемо $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v): u \in U\}$ і розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi \Omega(t, \tau) \varphi(U, v), \quad W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множинах $\Delta_\Theta \times V$ і Δ_Θ відповідно, де $\Delta_\Theta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке додатне число. Припустимо, що багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ має замкнені значення на множині $\Delta_\Theta \times V$.

Умова 1 (умова Понтрягіна). Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ набуває непорожніх значень на множині Δ_Θ , Θ — деяке додатне число.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t, \tau)$ можна дійти висновку, що за будь-якого фіксованого $t > 0$ вектор-функція $\pi \Omega(t, \tau) \varphi(u, v)$ буде $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірною за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ і неперервною за $u \in U$. Тому на підставі теореми про прямий образ [9] для будь-якого фіксованого $t > 0$ багатозначне відображення $W(t, \tau, v) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Якщо умова Понтрягіна виконана, то на множині Δ існує принаймні один селектор $\gamma_0(t, \tau)$ відображення $W(t, \tau)$, $\gamma_0(t, \tau) \in W(t, \tau)$. Такий селектор називатимемо селектором Понтрягіна. Сформулюємо умову Понтрягіна в еквівалентному вигляді.

На множині Δ_Θ , де Θ — деяке додатне число, існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t, \tau)$, для якого справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

Умова Понтрягіна є ключовою для першого методу Понтрягіна, і якщо вона не виконана, то метод не працює. Сформулюємо модифіковану умову Понтрягіна для керованих об’єктів з різною інерційністю.

Нехай $\gamma(t, \tau)$, $\gamma: \Delta_\Theta \rightarrow L$, — деяка (майже всюди) обмежена вимірна за t і сумовна за τ , $\tau \in [0, t]$, для кожного $t > 0$ функція, яку називатимемо функцією зсуву, $\Delta_\Theta = \{(t, \tau): 0 \leq \tau \leq t \leq \Theta < \infty\}$, Θ — деяке додатне число. Нехай M_1 — опуклий компакт із ортогонального додатку L до підпростору M_0 у R^n такий, що для $m \in M_1$ матимемо $-m \in M_1$ і $M_2 = M \underset{*}{*} M_1 = \{m \in L: m + M_1 \subset M\} = \bigcap_{m \in M_1} (M - m) \neq \emptyset$, де символ $\underset{*}{*}$ визначає геометричну різницю Мінковського [13, 14]. Називатимемо допустимими функцію зсуву $\gamma(t, \tau)$ і множини M_1 , M_2 , для яких справедливі зазначені умови та властивості.

Розглянемо компактнозначне вимірне багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, $\bar{V}(t) \subset V$, і неперервну матричну функцію $B(\cdot)$ із значеннями порядку k , де k — розмірність вектора $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, Θ — деяке додатне число. Зазначимо, що для відображення $\bar{V}(\cdot)$ існує вимірний селектор $\bar{v}_s(\cdot)$. Далі припускати-
 мемо, що багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$ є компактнозначним вимірним відоб-
 раженням, а матрична функція $B(\cdot)$ є неперервною функцією.

Позначимо $W_B(t, \tau, \bar{v}) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, B(t - \tau)\bar{v})$, $\varphi_B(t - \tau, u, v, \bar{v}) = \varphi(u, B(t - \tau)\bar{v}) - \varphi(u, v)$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $u \in U$, $v \in V$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$ і розглянемо для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$ багатозначне відображення

$$\Lambda_B(t, \tau, v, \bar{v}) = \{\lambda \geq 0: \pi\Omega(t, \tau)\varphi_B(t - \tau, U, v, \bar{v}) \subset \lambda M_1\}.$$

Якщо на множині $\Delta_\Theta \times V \times \bar{V}(t - \tau)$ виконано умову $\Lambda_B(t, \tau, v, \bar{v}) \neq \emptyset$, то розглянемо скалярну функцію $\lambda_B(t, \tau, v, \bar{v}) = \inf\{\lambda: \lambda \in \Lambda_B(t, \tau, v, \bar{v})\}$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$. Відповідно до роботи [20] багатозначне відображення $\Lambda_B(t, \tau, v, \bar{v})$ є замкненозначним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним за сукупністю $(\tau, v, \bar{v})$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$, а функція $\lambda_B(t, \tau, v, \bar{v})$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірною за сукупністю $(\tau, v, \bar{v})$, $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$ і тому вона суперпозиційно вимірна [20], тобто $\lambda_B(t, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))$ вимірна за τ , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, за будь-яких вимірних функцій $v(\tau)$ і $\bar{v}(\tau)$, $v(\tau) \in V$, $\bar{v}(\tau) \in \bar{V}(t - \tau)$. Зазначимо також, що функція $\sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)} \lambda_B(t, \tau, v, \bar{v})$ вимірна за τ , $\tau \in [0, t]$.

Для функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ позначимо $\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau) d\tau$ та розглянемо для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $\Theta > 0$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$ багатозначне відоб-
 раження

$$\mathfrak{U}(t, \tau, \bar{v}) = \{\alpha \geq 0: [W_B(t, \tau, \bar{v}) - \gamma(t, \tau)] \cap \alpha[M_2 - \xi(t)] \neq \emptyset\}. \quad (5)$$

Якщо на множині $\Delta_\Theta \times \bar{V}(t - \tau)$ виконано умову $\mathfrak{U}(t, \tau, \bar{v}) \neq \emptyset$, то розгляне-
 мо нижню скалярну розв'язувальну функцію [10]

$$\alpha_*(t, \tau, \bar{v}) = \inf\{\alpha: \alpha \in \mathfrak{U}(t, \tau, \bar{v})\}, \quad (t, \tau) \in \Delta_\Theta, \quad \bar{v} \in \bar{V}(t - \tau).$$

У роботі [20] показано, що багатозначне відображення $\mathfrak{U}(t, \tau, \bar{v})$ є замкне-
 нозначним, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним за сукупністю (τ, v) , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$, а ни-
 жня розв'язувальна функція є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірною за сукупністю (τ, v) , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$,
 $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$, і тому вона суперпозиційно вимірна [20], тобто $\alpha_*(t, \tau, \bar{v}(\tau))$
 вимірна за τ , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, для будь-якої вимірної функції $\bar{v}(\cdot) \in \bar{V}_t(\cdot)$. Зазначимо
 також, що нижня розв'язувальна функція напівнеперервна знизу за змінною $\bar{v}$
 та функція $\sup_{\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)} \alpha_*(t, \tau, \bar{v})$ вимірна за τ , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$.

Умова 2. Існують деяке додатне число Θ , а також багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, $\bar{V}(t) \subset V$, $t \in [0, \Theta]$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі функція зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$, множини M_1 , M_2 такі, що для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $v \in V$, $\bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)$ справедливі співвідношення $\Lambda_B(t, \tau, v, \bar{v}) \neq \emptyset$, $\mathfrak{U}(t, \tau, \bar{v}) \neq \emptyset$, $\varphi_B(t - \tau, U, v, \bar{v}) \subset \lambda_B(t, \tau, v, \bar{v})M_1$, $\int_0^t \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(t - \tau)} \lambda_B(t, \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq 1$.

Розглянемо множину

$$T_*(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \in [0, \Theta] : \int_0^t \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau \leq 1 \right\}. \quad (6)$$

Якщо нерівність в фігурних дужках співвідношення (6) не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \emptyset$.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \in M_2$ і виконана умова 2. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V , $\tau \in [0, T]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)$, $\tau \in [0, T]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*(\tau, \bar{v}) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T - \tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau) \in \alpha_*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) та нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*(T, \tau, \bar{v})$ компактнозначне відображення $U_*(\tau, \bar{v}) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним [20] за $\bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)$, $\tau \in [0, T]$. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [18] багатозначне відображення $U_*(\tau, \bar{v})$ містить $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірний селектор $u_*(\tau, \bar{v})$, який є суперпозиційно вимірною функцією [20].

Нехай $\bar{v}_s(\cdot) \in$ вимірним селектором відображення $\bar{V}(\cdot)$. Покладемо для $\tau \in [0, T]$ керування першого гравця $u_*(\tau) = u_*(\tau, \bar{v}(\tau))$, де

$$\bar{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \bar{V}(T - \tau), \\ \bar{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \bar{V}(T - \tau). \end{cases}$$

З урахуванням формули (1) отримаємо

$$\begin{aligned} \pi z(T) = & - \int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \\ & + \xi(T) + \int_0^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T - \tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (7)$$

Унаслідок умови 2 щодо визначення моменту T маємо

$$0 \in M_1, \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \tau \in [0, T],$$

$$\int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)} \lambda_B(T, \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \in M_1$$

та за припущенням маємо

$$- \int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \in M_1.$$

З урахуванням вибору керування та за визначенням моменту T маємо

$$0 \in M_2 - \xi(T), \quad \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau) \in \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau))[M_2 - \xi(T)],$$

$$\int_0^T \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau \leq \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau \in M_2 - \xi(T).$$

Отже, співвідношення (7) визначає

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + M_2 - \xi(T) = M_1 + M_2 \subset M \quad \text{і} \quad z(T) \in M^*,$$

що й завершує доведення теореми.

Наслідок. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \in M_2$ і виконана умова 2. Тоді мають місце нерівності

$$\begin{aligned} \mu_{M_1} \left(\int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \right) &\leq \int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau, \\ &\times \left(\int_0^T [\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)] d\tau \right) \leq \int_0^T \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

де $\mu_X(f(t)) = \inf\{\mu \geq 0 : f(t) \in \mu X\}$ — функціонал Мінковського, $X \in R^n$ — опуклий компакт, $0 \in X$, $f(t)$ — вимірний функція.

Доведення. Нехай $v(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V , $\tau \in [0, T]$. За вибором керування в доведенні теореми 1 мають місце включення

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau) \in \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau))[M_2 - \xi(T)].$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливі включення

$$\begin{aligned} \int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau &\in \int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau M_1, \\ \int_0^T [\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)] d\tau &\in \int_0^T \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau [M_2 - \xi(T)]. \end{aligned}$$

З визначенням функціоналу Мінковського маємо необхідний результат.

Умова 3. Існують деяке додатне число Θ , багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, $\bar{V}(t) \subset V$, $t \in [0, \Theta]$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі функція зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$, множини M_1, M_2 такі, що виконана умова 2 і для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$ справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \{[W_B(t, \tau, \bar{v}) - \gamma(t, \tau)] - \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \notin M_2$, виконана умова 3 і $\int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau = 1$. Тоді гра може бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ є довільним вимірним селектором компакта V , а $\bar{v}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\bar{V}(\cdot)$. Покладемо для $\tau \in [0, T]$

$$\bar{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \bar{V}(T-\tau), \\ \bar{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \bar{V}(T-\tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем. Для цього розглянемо компактнозначне відображення

$$\begin{aligned} \underline{U}_*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau) \in \\ &\in \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (8)$$

Багатозначне відображення $\underline{U}_*(\tau, \bar{v})$ має непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і функції $\sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})$ компактнозначне відображення $\underline{U}_*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [0, T]$, для $\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним [20].

Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [18] воно має хоча б один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірний селектор $\underline{u}_*(\tau, \bar{v})$, який є суперпозиційно вимірною функцією [20]. Покладемо керування першого гравця $\underline{u}_*(\tau) = \underline{u}_*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраного керування отримаємо

$$\begin{aligned} \pi z(T) &= - \int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \underline{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau + \\ &+ \xi(T) + \int_0^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\underline{u}_*(\tau), B(T-\tau), \bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau. \end{aligned} \quad (9)$$

Унаслідок умови 2 матимемо

$$\begin{aligned} 0 \in M_1, \quad \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \underline{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) &\in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \\ \tau &\in [0, T]; \end{aligned}$$

$$\int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \lambda_B(T, \tau, v, \bar{v})d\tau \leq 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\int_0^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \underline{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau \in M_1$$

та за припущенням маємо

$$- \int_0^T \pi\Omega(T-\tau, \tau)\varphi_B(T-\tau, \underline{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau \in M_1.$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (8), (9) визначають

$$\begin{aligned} \pi z(T) &\in M_1 + \xi(T) + \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) [M_2 - \xi(T)] d\tau = \\ &= M_1 + \xi(T) + \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau [M_2 - \xi(T)] = \\ &= M_1 + \xi(T) \left[1 - \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] + \\ &+ \left[\int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M. \end{aligned}$$

Тут враховано лему 1 і включення $M_1 + M_2 \subset M$.

Якщо на множині $\Delta_\Theta \times \bar{V}(t-\tau)$ виконано умову $\mathfrak{A}(t, \tau, \bar{v}) \neq \emptyset$ і $\xi(T) \notin M_2$, то розглянемо верхню скалярну розв'язувальну функцію [4]

$$\alpha^*(t, \tau, \bar{v}) = \sup \{ \alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \bar{v}) \}, \quad (t, \tau) \in \Delta_\Theta, \quad \bar{v} \in \bar{V}(t-\tau).$$

У роботі [20] показано, що верхня розв'язувальна функція є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірною за сукупністю (τ, v) , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, $\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)$, тому вона су-перпозиційно вимірна [20], тобто $\alpha^*(t, \tau, \bar{v}(\tau))$ вимірна за τ , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$, для будь-якої вимірної функції $\bar{v}(\cdot) \in \bar{V}_t(\cdot)$. Зазначимо також, що верхня розв'язувальна функція напівнеперервна зверху за змінною $\bar{v}$ та функція $\inf_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha^*(t, \tau, \bar{v})$ вимірна за τ , $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$. Зауважимо, що верхня розв'язувальна

функція в загальному випадку може бути визначена з використанням оберненого функціонала Мінковського [14] деяких багатозначних відображень, що дає додаткові можливості в дослідженні.

Умова 4. Існують деяке додатне число Θ , багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, $\bar{V}(t) \subset V$, $t \in [0, \Theta]$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі функція зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$, множини M_1, M_2 такі, що виконана умова 2 і для $(t, \tau) \in \Delta_\Theta$ справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \{ [W_B(t, \tau, \bar{v}) - \gamma(t, \tau)] - \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha^*(t, \tau, \bar{v}) [M_2 - \xi(t)] \}.$$

Розглянемо множину

$$T^*(g(t), \gamma(\cdot, \cdot)) = \left\{ t \in [0, \Theta] : \int_0^t \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha^*(t, \tau, \bar{v}) d\tau \geq 1 \right\}. \quad (10)$$

Якщо нерівність в фігурних дужках співвідношення (10) не виконується для жодних $t \in [0, \Theta]$, то покладемо $T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) = \emptyset$.

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \notin M_2$, то виконана умова 4 і $\int_0^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau = 1$. Тоді гра може бути закінченою

в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ — довільний вимірний селектор компакта V , а $\bar{v}_s(\cdot)$ — вимірний селектор відображення $\bar{V}(\cdot)$. Покладемо для $\tau \in [0, T]$

$$\bar{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \bar{V}(T - \tau), \\ \bar{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \bar{V}(T - \tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем. Для цього розглянемо компактне відображення

$$\begin{aligned} \hat{U}^*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U : (\pi \Omega(T, \tau) \varphi(u, B(T - \tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\ &\in \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)} \alpha^*(t, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [0, T]. \end{aligned} \quad (11)$$

Багатозначне відображення $\hat{U}^*(\tau, \bar{v})$ має непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і функції $\sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})$ компактнозначне відображення $\hat{U}^*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [0, T]$, для $\bar{v} \in \bar{V}(T - \tau) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірним [20]. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [18] він містить хоча б один $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірний селектор $\hat{u}^*(\tau, \bar{v})$, який є суперпозиційно вимірною функцією [20]. Покладемо керування першого гравця $\hat{u}^*(\tau) = \hat{u}^*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраного керування отримаємо

$$\begin{aligned} \pi z(T) &= - \int_0^T \pi \Omega(T, \tau) \varphi_B(T - \tau, \hat{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \\ &+ \xi(T) + \int_0^T (\pi \Omega(T, \tau) \varphi(\hat{u}^*(\tau), B(T - \tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (12)$$

Унаслідок умови 2 матимемо

$$\begin{aligned} 0 \in M_1, \quad \pi \Omega(T, \tau) \varphi_B(T - \tau, \hat{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) &\in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) M_1, \\ \tau &\in [0, T]; \end{aligned}$$

$$\int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)} \lambda_B(T, \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\int_0^T \pi \Omega(T, \tau) \varphi_B(T - \tau, \hat{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \in M_1$$

та за припущенням маємо

$$- \int_0^T \pi \Omega(T - \tau, \tau) \varphi_B(T, \hat{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \in M_1.$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (11), (12) визначають

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T - \tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)] d\tau =$$

$$\begin{aligned}
&= M_1 + \xi(T) + \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau [M_2 - \xi(T)] = \\
&= M_1 + \xi(T) \left[1 - \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] + \\
&+ \left[\int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.
\end{aligned}$$

Тут враховано лему 1 і включення $M_1 + M_2 \subset M$.

ДОСТАТНІ УМОВИ ГАРАНТОВАНОГО РЕЗУЛЬТАТУ В МЕТОДІ РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ КОНФЛІКТНО-КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ З РІЗНОЮ ІНЕРЦІЙНІСТЮ

Теорема 4. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \cap T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \cap T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \notin M_2$, виконана умова 3 і справедлива нерівність $\int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau < 1$. Тоді гра може

бути закінченою в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ є довільним вимірним селектором компакта V , а $\bar{v}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\bar{V}(\cdot)$. Вважатимемо для $\tau \in [0, T]$

$$\bar{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \bar{V}(T-\tau), \\ \bar{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \bar{V}(T-\tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем. Запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau - \int_t^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$\begin{aligned}
h(0) &= 1 - \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau > 0, \\
h(T) &= 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau \leq 1 - \int_0^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \leq 0.
\end{aligned}$$

Унаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу $t_*, t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зазначимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*]$, $[t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першого гравця на кожному проміжку. Для цього розглянемо компактні відображення

$$\begin{aligned}
\bar{U}^*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U : (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\
&\in \alpha^*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [0, t_*],
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}\bar{U}_*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U: (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\ &\in \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [t_*, T].\end{aligned}\quad (14)$$

Багатозначні відображення $\bar{U}^*(\tau, v)$ і $\bar{U}_*(\tau, v)$ мають непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\alpha^*(T, \tau, \bar{v})$ і $\sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})$ компактнозначні відображення $\bar{U}^*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [0, t_*]$, і $\bar{U}_*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [t_*, T]$, для $\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірними [20]. Тому за умов теореми про вимірний вибір селектора [18] кожне відображення містить хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірному селектору $\bar{u}^*(\tau, \bar{v})$ і $\bar{u}_*(\tau, \bar{v})$, які є суперпозиційно вимірними функціями [20]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $\bar{u}^*(\tau) = \bar{u}^*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [0, t_*]$, а на пасивному проміжку покладемо $\bar{u}_*(\tau) = \bar{u}_*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Відповідно до формули (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\begin{aligned}\pi z(T) &= - \left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \right] + \\ &\quad + \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\bar{u}^*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau + \\ &\quad + \int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\bar{u}_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau.\end{aligned}\quad (15)$$

Унаслідок умови 2 матимемо

$$0 \in M_1, \quad \int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \lambda_B(T, \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq 1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \quad \tau \in [0, t_*],$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \quad \tau \in [t_*, T].$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \\ &+ \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \in M_1\end{aligned}$$

та за припущенням матимемо

$$\begin{aligned}&- \left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \bar{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \right] \in M_1.\end{aligned}$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (13)–(15) визначають

$$\begin{aligned}
& \pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) [M_2 - \xi(T)] d\tau + \\
& + \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) [M_2 - \xi(T)] d\tau = \\
& = M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau [M_2 - \xi(T)] + \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau [M_2 - \xi(T)] = \\
& = M_1 + \xi(T) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau - \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] + \\
& + \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.
\end{aligned}$$

Тут враховано лему 1, рівність $h(t_*) = 0$ і включення $M_1 + M_2 \subset M$.

Теорема 5. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \cap T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \cap T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \notin M_2$, виконані умова 3, умова 4 і справедлива нерівність $\int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau < 1$. Тоді гра може бути

закінченою в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ є довільним вимірним селектором компакта V , а $\bar{v}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\bar{V}(\cdot)$. Вважатимемо, що для $\tau \in [0, T]$

$$\bar{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \bar{V}(T-\tau), \\ \bar{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \bar{V}(T-\tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем. Запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau - \int_t^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau, \quad t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \leq 0.$$

Унаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_* , $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зазначимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першого гравця на кожному проміжку.

Для цього розглянемо компактні відображення

$$\begin{aligned}\tilde{U}^*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U: (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\ &\in \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [0, t_*],\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\tilde{U}_*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U: (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\ &\in \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [t_*, T].\end{aligned}\quad (17)$$

Багатозначні відображення $\tilde{U}^*(\tau, \bar{v})$ і $\tilde{U}_*(\tau, \bar{v})$ мають непорожні образи.

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})$ і $\sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v})$ компактнозначні відображення $\tilde{U}^*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [0, t_*]$, і $\tilde{U}_*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [t_*, T]$, для $\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірними [20]. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [18] кожне відображення містить хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірному селектору $\tilde{u}^*(\tau, \bar{v})$ і $\tilde{u}_*(\tau, \bar{v})$, які є суперпозиційно вимірними функціями [20]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $\tilde{u}^*(\tau) = \tilde{u}^*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [0, t_*]$, а на пасивному проміжку $\tilde{u}_*(\tau) = \tilde{u}_*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\begin{aligned}\pi z(T) &= - \left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \tilde{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \tilde{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau \right] + \\ &\quad + \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\tilde{u}^*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau + \\ &\quad + \int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(\tilde{u}_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau))d\tau.\end{aligned}\quad (18)$$

Унаслідок умови 2 маємо

$$0 \in M_1, \quad \int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \lambda_B(T, \tau, v, \bar{v})d\tau \leq 1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \tilde{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \quad \tau \in [0, t_*],$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \tilde{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \quad \tau \in [t_*, T].$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \tilde{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau + \\ &+ \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, \tilde{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau))d\tau \in M_1\end{aligned}$$

і внаслідок маємо

$$- \left[\int_0^{t_*} \pi \Omega(T, \tau) \varphi_B(T - \tau, \tilde{u}^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \right. \\ \left. + \int_{t_*}^T \pi \Omega(T, \tau) \varphi_B(T - \tau, \tilde{u}_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \right] \in M_1.$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (16)–(18) визначають

$$\begin{aligned} \pi z(T) &\in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) [M_2 - \xi(T)] d\tau + \\ &+ \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) [M_2 - \xi(T)] d\tau = \\ &= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau [M_2 - \xi(T)] + \\ &+ \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau [M_2 - \xi(T)] = \\ &= M_1 + \xi(T) \left[1 - \int_0^{t_*} \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau - \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] + \\ &+ \left[\int_0^{t_*} \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau + \int_{t_*}^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M. \end{aligned}$$

Тут враховано лему 1, рівність $h(t_*) = 0$ і включення $M_1 + M_2 \subset M$.

Теорема 6. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2), деякого додатного числа Θ і допустимої функції зсуву $\gamma(\cdot, \cdot)$ множина $T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \cap T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою, $T \in T_*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot)) \cap T^*(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ та існують багатозначне відображення $\bar{V}(\cdot)$, матрична функція $B(\cdot)$, допустимі множини M_1, M_2 такі, що $\xi(T) \notin M_2$, виконана умова 4 і справедлива нерівність $\int_0^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau > 1$. Тоді гра може бути

закінченою в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $v(\cdot)$ є довільним вимірним селектором компакта V , а $\bar{v}_s(\cdot)$ є вимірним селектором відображення $\bar{V}(\cdot)$. Покладемо для $\tau \in [0, T]$

$$\bar{v}(\tau) = \begin{cases} v(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \in \bar{V}(T - \tau), \\ \bar{v}_s(\tau), & \text{якщо } v(\tau) \notin \bar{V}(T - \tau). \end{cases}$$

Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = \int_0^t \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau + \int_t^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau - 1, \quad t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = \int_0^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau - 1 > 0,$$

$$h(T) = \int_0^T \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau - 1 \leq \int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau - 1 \leq 0.$$

Унаслідок неперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу $t_*, t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Зазначимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*], [t_*, T]$ називатимемо активним і пасивним відповідно. Запишемо спосіб керування першого гравця на кожному проміжку. Для цього розглянемо компактні відображення

$$\begin{aligned} U_*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U : (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\ &\in \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau))[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [0, t_*], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} U^*(\tau, \bar{v}) &= \{u \in U : (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, B(T-\tau)\bar{v}) - \gamma(T, \tau)) \in \\ &\in \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v})[M_2 - \xi(T)]\}, \quad \tau \in [t_*, T]. \end{aligned} \quad (20)$$

Багатозначні відображення $U_*(\tau, \bar{v})$ і $U^*(\tau, \bar{v})$ мають непорожні образи.

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau))$ і $\inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v})$ компактнозначні відображення $U_*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [0, t_*]$, і $U^*(\tau, \bar{v})$, $\tau \in [t_*, T]$, для $\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau) \in \mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірними [20]. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [18] кожне відображення містить хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$ -вимірному селектору $u_*(\tau, \bar{v})$ і $u^*(\tau, \bar{v})$, які є суперпозиційно вимірними функціями [20]. Покладемо керування першого гравця на активному проміжку $u_*(\tau) = u_*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [0, t_*]$, а на пасивному проміжку $u^*(\tau) = u^*(\tau, \bar{v}(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\begin{aligned} \pi z(T) &= - \left[\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T-\tau, u^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \right] + \\ &\quad + \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau + \\ &\quad + \int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u^*(\tau), B(T-\tau)\bar{v}(\tau)) - \gamma(T, \tau)) d\tau. \end{aligned} \quad (21)$$

Унаслідок умови 2 маємо

$$0 \in M_1, \int_0^T \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \leq \int_0^T \sup_{v \in V, \bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \lambda_B(T, \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq 1,$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \tau \in [0, t_*],$$

$$\pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) \in \lambda_B(T, \tau, v(\tau), \bar{v}(\tau))M_1, \tau \in [t_*, T].$$

Тоді з урахуванням леми 1 отримаємо

$$\int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \in M_1$$

і внаслідок цього маємо

$$\left[- \int_0^{t_*} \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u_*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_*}^T \pi\Omega(T, \tau)\varphi_B(T - \tau, u^*(\tau), v(\tau), \bar{v}(\tau)) d\tau \right] \in M_1.$$

З урахуванням останнього включення співвідношення (19)–(21) визначають

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) [M_2 - \xi(T)] d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) [M_2 - \xi(T)] d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau [M_2 - \xi(T)] +$$

$$+ \int_{t_*}^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau [M_2 - \xi(T)] =$$

$$= M_1 + \xi(T) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau - \int_{t_*}^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] +$$

$$+ \left[\int_0^{t_*} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}(\tau)) d\tau + \int_{t_*}^T \inf_{\bar{v} \in \bar{V}(T-\tau)} \alpha^*(T, \tau, \bar{v}) d\tau \right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Тут враховано лему 1, рівність $h(t_*) = 0$ і включення $M_1 + M_2 \subset M$.

МОДЕЛЬНИЙ ПРИКЛАД

Динаміка переслідувача і втікача задається рівняннями відповідно

$$\dot{x} = u, \quad x \in R^n, \quad n \geq 2, \quad u \in S_r^\rho,$$

$$\dot{y} = v, \quad y \in R^n, \quad n \geq 2, \quad v \in S_0^\sigma, \quad \rho > \sigma > r > 0, \quad (22)$$

$S_b^a \subset R^n$ — кільце з центром в нулі, зовнішнім радіусом a і внутрішнім радіусом b .

Переслідування вважатимемо завершеним, якщо $\|x - y\| \leq \varepsilon$.

Вихідна задача (22) зводиться до конфліктно-керованого процесу в такий спосіб. Уведемо нові змінні

$$\begin{aligned}(z_1, z_2) &= z, \\ z_1 &= x - y, \quad z_2 = \dot{x}.\end{aligned}\quad (23)$$

Продиференціюємо за часом співвідношення (23). З урахуванням вихідних рівнянь (22) отримаємо

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 - v, \\ \dot{z}_2 &= u.\end{aligned}\quad (24)$$

Термінальна множина $M^* = \{z: z_1 \in S_0^\varepsilon\}$, $M_0 = \{z: z_1 = 0\}$, $M = \{z: z_1 \in S_0^\varepsilon, z_2 = 0\}$. Позначимо $M_1 = \varepsilon_1 S_0^1$, $M_2 = \varepsilon_2 S_0^1 = M \underset{-}{*} M_1 = \varepsilon S_0^1 \underset{-}{*} \varepsilon_1 S_0^1 = (\varepsilon - \varepsilon_1) S_0^1$, $\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1$, $\varepsilon > \varepsilon_1$. Тоді

$$L = \{z: z_2 = 0\}, \quad \pi = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi z = z_1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Області визначення керувань мають вигляд

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ u \end{pmatrix} : u \in S_r^\rho \right\}, \quad V = \left\{ \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} : v \in S_0^\sigma \right\}, \quad \bar{V} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} : \bar{v} \in \bar{S} \right\}, \quad \bar{S} = S_{\sigma/\rho}^\sigma, \quad \bar{V} \subset V.$$

Фундаментальна матриця однорідної системи (24) має вигляд $e^{At} = \begin{pmatrix} E & tE \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Тоді отримаємо $\pi e^{At} U = t S_r^\rho$, $\pi e^{At} V = S_0^\sigma$, $\pi e^{At} \bar{V} = \bar{S}$, $M = S_0^\varepsilon \subset L$.

Умову Понтрягіна не виконано для $0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho$:

$$\pi e^{A(t-\tau)} U \underset{-}{*} \pi e^{A(t-\tau)} V = (t - \tau) S_r^\rho \underset{-}{*} S_0^\sigma = \emptyset.$$

Визначимо функцію зсуву $\gamma(t) \equiv 0$ і покладемо $\xi(t) = \pi e^{At} z = z_1 + t z_2$,

$$B(t - \tau) = \begin{cases} (\rho / \sigma)(t - \tau)E, & 0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho, \\ E, & (t - \tau) > \sigma / \rho, \end{cases} \quad \bar{V}(t - \tau) = \begin{cases} \bar{V}, & 0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho, \\ V, & (t - \tau) > \sigma / \rho. \end{cases}$$

Тоді маємо для $\bar{v} \in \bar{S}$, $0 \leq t \leq \sigma / \rho$, $0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho$,

$$W_B(t, \tau, \bar{v}) = \pi e^{A(t-\tau)} [U - B(t - \tau) \bar{v}],$$

$$0 \in \bigcap_{\bar{v} \in \bar{S}} [W_B(t, \tau, \bar{v}) - \gamma(t, \tau)] = \pi e^{A(t-\tau)} U \underset{-}{*} \pi e^{A(t-\tau)} B(t - \tau) \bar{V}(t - \tau) = \{0\}. \quad (25)$$

Отже, $0 \in \mathfrak{A}(t, \tau, \bar{v}) = \{\alpha \geq 0: \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap [(t - \tau) S_r^\rho - \bar{v}]\}$,

$$\begin{aligned}\alpha_*(t, \tau, \bar{v}) &= \inf \{\alpha: \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \bar{v})\} = \sup_{\bar{v} \in \bar{S}} \alpha_*(t, \tau, \bar{v}) = 0, \\ \int_0^t \sup_{\bar{v} \in \bar{S}} \alpha_*(t, \tau, \bar{v}) d\tau &= 0\end{aligned}\quad (26)$$

і справедливе співвідношення

$$T(z, 0) = \left\{ t \in [0, \sigma / \rho] : \int_0^t \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau \leq 1 \right\} \neq \emptyset.$$

У результаті обчислень маємо

$$\lambda(t, \tau, v, \bar{v}) = \begin{cases} \frac{(\|v\| - (\rho / \sigma)(t - \tau))\|\bar{v}\|}{\varepsilon_1}, & 0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho, \\ 0, & (t - \tau) > \sigma / \rho, \end{cases}$$

$$\max_{v \in S_0^\sigma, \bar{v} \in \bar{S}} \lambda(t, \tau, v, \bar{v}) = \begin{cases} \frac{\sigma - \rho(t - \tau)}{\varepsilon_1}, & 0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho, \\ 0, & (t - \tau) > \sigma / \rho. \end{cases}$$

Оскільки для $v \in S_0^\sigma$, $\bar{v} \in \bar{S}$

$$\varphi_B\left(t - \tau, U, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \pi e^{A(t-\tau)} \left(\begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} - B(t - \tau) \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{cases} v - (t - \tau)(\rho / \sigma) \bar{v}, & 0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho, \\ \{0\}, & (t - \tau) > \sigma / \rho. \end{cases}$$

то

$$\varphi_B\left(t - \tau, U, \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{v} \\ 0 \end{pmatrix}\right) \subset \lambda(t, \tau, v, \bar{v}) S_0^{\varepsilon_1}. \quad (27)$$

Якщо $\varepsilon_1 \geq \sigma^2 / 2\rho$, то для всіх $t \geq 0$ справедлива нерівність

$$(\rho t^2 / 2) - \sigma t + \varepsilon_1 \geq 0. \quad (28)$$

Тому для $\varepsilon_1 \geq \sigma^2 / 2\rho$ і для всіх $t \geq 0$ виконується нерівність

$$\int_0^t \max_{v \in S_0^\sigma, \bar{v} \in \bar{S}} \lambda(t - \tau, v, \bar{v}) d\tau \leq \frac{\sigma t - (\rho t^2 / 2)}{\varepsilon_1} \leq 1. \quad (29)$$

Нехай $0 \leq t \leq \sigma / \rho$. Оскільки для $0 \leq (t - \tau) \leq \sigma / \rho$, $\varepsilon_1 \geq \sigma^2 / 2\rho$ унаслідок співвідношень (26), (27), (29) виконано умови 1 і 2, то для початкового положення z^0 і моменту T , що задовольняє умова 1, маємо $\int_0^T \sup_{\bar{v} \in \bar{S}} \alpha_*(T, \tau, \bar{v}) d\tau = 0$,

$T \in T(z^0, 0)$. Якщо $\xi(T) \in \varepsilon_2 S_0^1$, то виконано всі умови теореми 1.

Нехай $t > \sigma / \rho$, а також $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S_0^1$. Тоді для $t - \tau \leq \sigma / \rho$ верхня розв'язувальна функція $\alpha^*(t, \tau, \bar{v})$ визначається із співвідношення

$$\alpha^*(t, \tau, \bar{v}) = \sup \{ \alpha \geq 0 : \alpha [\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap (t - \tau) [S_r^\rho - \bar{v}] \} =$$

$$= \sup \{ \alpha \geq 0 : \|\rho(t - \tau) \bar{v} - \alpha \xi(t)\| = \alpha \varepsilon_2 + \rho(t - \tau) \}, \bar{v} \in \bar{S},$$

і функція $\alpha^*(t, \tau, \bar{v})$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння

$$(\|\xi(t)\|^2 - (\varepsilon_2)^2) \alpha^2 - 2[(\bar{v}, \xi(t)) + \rho(t - \tau) \varepsilon_2] \alpha - [\rho^2(t - \tau)^2(\sigma^2 - \|\bar{v}\|^2)] = 0$$

стосовно α , коли $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$, $\bar{v} \in \bar{S}$.

У результаті обчислень отримаємо

$$\min_{\bar{v} \in \bar{S}} \alpha^*(t, \tau, \bar{v}) = 0, \quad t - \tau \leq \sigma / \rho, \quad (30)$$

до того ж мінімум досягається на векторі $\bar{v} = -\sigma(\xi(t) / \|\xi(t)\|)$.

Нехай $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$ і $t - \tau > \sigma / \rho$. Тоді багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, v)$ має вигляд

$$\mathfrak{A}(t, \tau, v) = \{\alpha \geq 0: \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap [(t - \tau)S_r^\rho - v] \neq \emptyset\}, \quad v \in S_0^1. \quad (31)$$

Верхня розв'язувальна функція $\alpha^*(t, \tau, v)$ визначається із співвідношення

$$\begin{aligned} \alpha^*(t, \tau, v) &= \sup\{\alpha \geq 0: \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \in (t - \tau)S_r^\rho - v\} = \\ &= \sup\{\alpha \geq 0: \|(v - \alpha \xi(t))\| = \alpha \varepsilon_2 + \rho(t - \tau)\}, \quad v \in S_0^\sigma, \end{aligned}$$

і функція $\alpha^*(t, \tau, v)$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння

$$(\|\xi(t)\|^2 - (\varepsilon_2)^2)\alpha^2 - 2[(v, \xi(t)) + \rho(t - \tau)\varepsilon_2]\alpha - [\rho^2(t - \tau)^2 - \|v\|^2] = 0$$

стосовно α для $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$, $v \in S_0^\sigma$.

У результаті обчислень для $t - \tau > \sigma / \rho$ отримаємо

$$\min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(t, \tau, v) = \frac{\rho(t - \tau) - \sigma}{\|\xi(t)\| - \varepsilon_2} \quad (32)$$

і мінімум досягається на векторі $v = -\sigma \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$.

З урахуванням рівностей (30), (32) запишемо

$$\begin{aligned} &\int_0^t \min_{\bar{v} \in \pi e^{A(t-\tau)} \bar{V}(t-\tau)} \alpha^*(t, \tau, \bar{v}) d\tau = \\ &= \int_0^{t-(\sigma/\rho)} \min_{\bar{v} \in \bar{S}} \alpha^*(t, \tau, \bar{v}) d\tau + \int_{t-(\sigma/\rho)}^t \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(t, \tau, v) d\tau = \\ &= \int_0^{t-(\sigma/\rho)} \frac{\rho(t - \tau) - \sigma}{\|\xi(t)\| - \varepsilon_2} d\tau = 1. \end{aligned}$$

З останньої рівності отримаємо рівняння

$$\|z_1 + tz_2\| = (\rho t^2 / 2) - \sigma t + \varepsilon_2, \quad t > \sigma / \rho. \quad (33)$$

Найменший додатний корінь рівняння (33) позначимо $\tau^*(z)$.

Для $v \in S_0^\sigma$ нижня розв'язувальна функція $\alpha_*(t, \tau, v)$ визначається зі співвідношення

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \inf\{\alpha \geq 0: \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \cap [(t - \tau)S_r^\rho - v] \neq \emptyset\}.$$

Однак для $v \in (t - \tau)S_0^r$ маємо

$$\begin{aligned} \alpha_*(t, \tau, v) &= \alpha_*^r(t, \tau, v) = \sup\{\alpha > 0: \alpha[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(t)] \in (t - \tau)S_0^r - v\} = \\ &= \sup\{\alpha > 0: \|(v - \alpha \xi(t))\| = (t - \tau)r - \alpha \varepsilon_2\} \end{aligned}$$

і функція $\alpha_*^r(t, \tau, v)$ є більшим додатним коренем квадратного рівняння

$$(\|\xi(t)\|^2 - (\varepsilon_2)^2) \alpha^2 - 2[(v, \xi(t)) + r(t - \tau) \varepsilon_2] \alpha - [r^2(t - \tau)^2 - \|v\|^2] = 0$$

стосовно α , якщо $\xi(t) \in \varepsilon_2 S$, $\sigma / \rho < t - \tau \leq \sigma / r$, $v \in (t - \tau) S_0^r$.

Отже, отримаємо для $v \in (t - \tau) S_0^r$

$$\begin{aligned} \alpha_*(t, \tau, v) &= \alpha_*^r(t, \tau, v) = \\ &= \frac{[(v, \xi(t)) - r(t - \tau) \varepsilon_2] + \sqrt{[(v, \xi(t)) - r(t - \tau) \varepsilon_2]^2 + (\|\xi(t)\|^2 - (\varepsilon_2)^2)(r^2(t - \tau)^2 - \|v\|^2)}}{\|\xi(t)\|^2 - (\varepsilon_2)^2}. \end{aligned}$$

Оскільки справедливим є співвідношення $(t - \tau) S_r^\rho * S_{(t - \tau)r}^\sigma = S_0^{(t - \tau)\rho - \sigma}$, то для $v \in S_{(t - \tau)r}^\sigma$ маємо

$$\alpha_*(t, \tau, v) = \max_{v \in S_{(t - \tau)r}^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) = 0.$$

Отже, для $\sigma / \rho < t - \tau \leq \sigma / r$, $v \in S_0^\sigma$ виконується рівність $\alpha_*(t, \tau, v) = \alpha_*^r(t, \tau, v)$ і разом з тим отримаємо рівність

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) = \max_{v \in (t - \tau) S_0^r} \alpha_*^r(t, \tau, v) = \frac{2r(t - \tau)}{\|\xi(t)\| + \varepsilon_2}$$

і максимум досягається на векторі $v = r(t - \tau) \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$.

Нехай $\xi(t) \notin \varepsilon_2 S$, $t - \tau > \sigma / r$, $v \in S_0^\sigma$. Тоді матимемо

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) = \frac{r(t - \tau) + \sigma}{\|\xi(t)\| + \varepsilon_2}$$

і максимум досягається на векторі $v = \sigma \frac{\xi(t)}{\|\xi(t)\|}$.

З урахуванням рівності (26) запишемо

$$\begin{aligned} &\int_0^t \max_{\bar{v} \in \pi e^{A(t - \tau)} \bar{V}(t - \tau)} \alpha_*(t, \tau, \bar{v}) d\tau = \\ &= \int_0^{t - (\sigma / \rho)} \max_{\bar{v} \in \bar{S}} \alpha_*(t, \tau, \bar{v}) d\tau + \int_{t - (\sigma / \rho)}^t \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau = \int_0^{t - (\sigma / \rho)} \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau, \end{aligned}$$

де

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) = \begin{cases} \frac{2r(t - \tau)}{\|\xi(t)\| + \varepsilon_2} & \text{для } \sigma / \rho < t - \tau \leq \sigma / r, \\ \frac{r(t - \tau) + \sigma}{\|\xi(t)\| + \varepsilon_2} & \text{для } t - \tau > \sigma / r. \end{cases}$$

Якщо параметри гри задовольняє хоча б одна з нерівностей

$$\frac{2r(t - \tau)}{\|\xi(t)\| + \varepsilon_2} < \frac{\rho(t - \tau) - \sigma}{\|\xi(t)\| - \varepsilon_2} \quad \text{для } \sigma / \rho < t - \tau \leq \sigma / r, \quad (34)$$

$$\frac{r(t - \tau) + \sigma}{\|\xi(t)\| + \varepsilon_2} < \frac{\rho(t - \tau) - \sigma}{\|\xi(t)\| - \varepsilon_2} \quad \text{для } t - \tau > \sigma / r, \quad (35)$$

то отримаємо

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(\tau^*(z), \tau, v) < \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(\tau^*(z), \tau, v),$$

і тому справедлива нерівність

$$\begin{aligned} & \int_0^{\tau^*(z) - (\sigma/\rho)} \max_{\bar{v} \in \pi e^{A(\tau^*(z) - \tau)} \bar{V}(\tau^*(z) - \tau)} \alpha_*(\tau^*(z), \tau, \bar{v}) d\tau < \\ & < \int_0^{\tau^*(z) - (\sigma/\rho)} \min_{\bar{v} \in \pi e^{A(\tau^*(z) - \tau)} \bar{V}(\tau^*(z) - \tau)} \alpha^*(\tau^*(z), \tau, \bar{v}) d\tau = 1. \end{aligned} \quad (36)$$

Отже, маємо

$$\int_0^{\tau^*(z)} \max_{\bar{v} \in \pi e^{A(\tau^*(z) - \tau)} \bar{V}(\tau^*(z) - \tau)} \alpha_*(\tau^*(z), \tau, \bar{v}) d\tau < 1$$

та справедливе включення

$$\tau^*(z) \in T(z, 0) = \left\{ t > 0 : \int_0^t \max_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau \right\} \neq \emptyset.$$

За побудовою для всіх $v \in S_0^\sigma$ справедливе включення

$$\alpha_*(\tau^*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau^*(z))] \in (\tau^*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Тому з урахуванням нерівностей (34), (35) маємо

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(\tau^*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau^*(z))] \in (\tau^*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Таким чином, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} [(\tau^*(z) - \tau) S_r^\rho - v] - \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(\tau^*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau^*(z))]$$

і справедлива умова 3. Найменший додатний корінь рівняння (33) $\tau^*(z)$ є моментом закінчення гри за умов теореми 4 з використанням керування вигляду (3).

Перевіримо справедливість умови 4. За побудовою для всіх $v \in S_0^\sigma$ справедливе включення

$$\alpha^*(\tau^*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau^*(z))] \in (\tau^*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Тому з урахуванням нерівностей (34), (35) маємо

$$\min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(\tau^*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau^*(z))] \in (\tau^*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Отже, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} [(\tau^*(z) - \tau) S_r^\rho - v] - \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(\tau^*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau^*(z))]$$

і справедлива умова 4. Найменший додатний корінь рівняння (33) $\tau^*(z)$ є моментом закінчення гри за теоремами 3 і 5 з використанням керування вигляду (4).

Розглянемо рівняння

$$\int_0^t \max_{\bar{v} \in \pi e^{A(t-\tau)} \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, \bar{v}) d\tau = \int_0^{t - (\sigma/\rho)} \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau = 1.$$

З останньої рівності отримаємо рівняння

$$\|z_1 + tz_2\| = \int_0^{t-(\sigma/\rho)} f(t, \tau) d\tau + \varepsilon_2, \quad t > \sigma/\rho, \quad (37)$$

де

$$f(t, \tau) = \begin{cases} 2r(t-\tau) & \text{для } \sigma/\rho < t-\tau \leq \sigma/r, \\ r(t-\tau) + \sigma & \text{для } t-\tau > \sigma/r. \end{cases}$$

Найменший додатний корінь рівняння (37) позначимо $\tau_*(z)$. Якщо, наприклад, для деякого початкового положення $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$, $\sigma/\rho < \tau_*(z^0) \leq \sigma/r$, то $\tau_*(z^0)$ є найменшим додатним коренем рівняння $\|z_1 + tz_2\| = rt^2 + \varepsilon_2$, $\sigma/\rho < t \leq \sigma/r$. Зокрема, для $z^0 = (z_1^0, 0)$ маємо $\tau_*(z^0) = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 + \|z_1^0\|}{r}}$.

Якщо параметри гри задовольняє хоча б одна з нерівностей (34), (35), отримаємо

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(\tau_*(z), \tau, v) < \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(\tau_*(z), \tau, v),$$

і тому справедлива нерівність

$$\begin{aligned} 1 &= \int_0^{\tau_*(z) - (\sigma/\rho)} \max_{\bar{v} \in \pi e^{A(\tau_*(z) - \tau)} \bar{V}(\tau_*(z) - \tau)} \alpha_*(\tau_*(z), \tau, \bar{v}) d\tau < \\ &< \int_0^{\tau_*(z) - (\sigma/\rho)} \min_{\bar{v} \in \pi e^{A(\tau_*(z) - \tau)} \bar{V}(\tau_*(z) - \tau)} \alpha^*(\tau_*(z), \tau, \bar{v}) d\tau. \end{aligned} \quad (38)$$

Отже, з урахуванням нерівності (38) маємо

$$\int_0^{\tau_*(z)} \min_{\bar{v} \in \pi e^{A(\tau_*(z) - \tau)} \bar{V}(\tau_*(z) - \tau)} \alpha^*(\tau_*(z), \tau, \bar{v}) d\tau > 1$$

та справедливе включення

$$\tau_*(z) \in T(z, 0) = \left\{ t > 0 : \int_0^t \max_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, \bar{v}) d\tau \leq 1 \right\} \neq \emptyset.$$

Перевіримо справедливість умови 4. За побудовою для всіх $v \in S_0^\sigma$ справедливе включення

$$\alpha^*(\tau_*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau_*(z))] \in (\tau_*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Тому з урахуванням нерівностей (34), (35) маємо

$$\min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(\tau_*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau_*(z))] \in (\tau_*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Отже, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} [(\tau_*(z) - \tau) S_r^\rho - v] - \min_{v \in S_0^\sigma} \alpha^*(\tau_*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau_*(z))]$$

і справедлива умова 4. Найменший додатний корінь рівняння (37) $\tau_*(z)$ є моментом закінчення гри за умов теореми 6 з використанням керування вигляду (3).

За побудовою для всіх $v \in S_0^\sigma$ справедливе включення

$$\alpha_*(\tau_*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau_*(z))] \in (\tau_*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Тому з урахуванням нерівностей (34), (35) маємо.

$$\max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(\tau_*(z), \tau, v)[\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau_*(z))] \in (\tau_*(z) - \tau) S_r^\rho - v.$$

Отже, виконується включення

$$0 \in \bigcap_{v \in S_0^\sigma} [(\tau_*(z) - \tau) S_r^\rho - v] - \max_{v \in S_0^\sigma} \alpha_*(\tau_*(z), \tau, v) [\varepsilon_2 S_0^1 - \xi(\tau_*(z))]$$

і справедлива умова 3. Найменший додатний корінь рівняння (37) $\tau_*(z)$ є моментом закінчення гри за умов теореми 2 з використанням керування вигляду (4).

Розглянемо початкове положення $z^0 = (z_1^0, z_2^0)$ і момент $T > \sigma / \rho$ такі, що

$$\varepsilon_2 > \|z_1^0 + T z_2^0\|, \quad T \in T(z, 0) = \left\{ t \in [0, \tau_*(z)]: \int_0^t \sup_{\bar{v} \in \bar{V}(t-\tau)} \alpha_*(t, \tau, v) d\tau \leq 1 \right\}.$$

Тоді гра може бути закінченою в момент T за умов теореми 1 з використанням керування вигляду (4).

ВИСНОВКИ

Розглянуто проблему зближення конфліктно-керованих об'єктів з різною інерційністю. Сформульовано достатні умови закінчення гри за скінченний гарантований час у разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Уведено нижні розв'язувальні функції двох типів, що відіграють ключову роль у формулюванні результатів і дають змогу реалізувати побудову керування. Ці нижні розв'язувальні функції в загальному випадку можна визначити з урахуванням функціоналів Мінковського деяких багатозначних відображень, що дає додаткові можливості в дослідженні. Запропоновано дві модифіковані схеми першого прямого методу Понтрягіна, які гарантують успішне завершення конфліктно-керованого процесу в класі контркерувань. Уведено верхню розв'язувальну функцію, що в загальному випадку може бути визначена з урахуванням оберненого функціонала Мінковського деяких багатозначних відображень. Розглянуто відповідні модифіковані схеми методу розв'язувальних функцій для керованих об'єктів з різною інерційністю в класі квазістратегій та контркерувань. Наведено модельний приклад.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Logiewa R., Hoffmann F., Govaers F., Koch W. Dynamic pursuit-evasion scenarios with a varying number of pursuers using deep sets. *IEEE Symposium sensor data fusion and international conference on multisensor fusion and integration (SDF-MFI)*. Bonn, Germany, 2023. P. 1–7. <https://doi.org/10.1109/SDF-MFI59545.2023.10361514>.
2. Fang X., Wang C., Xie L., Chen J. Cooperative pursuit with multi-pursuer and one faster free-moving evader. *IEEE Transactions on Cybernetics*. 2022. Vol. 52, N 3. P. 1405–1414. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2019.2958548>.
3. Yuchen H., Hongjian W., YuDan Y.D., WangZhao W. Research on multi-UUV pursuit-evasion games strategies under the condition of strongly manoeuvrable evader. 2021. *40th Chinese Control Conference (CCC)*. Shanghai, China, 2021. P. 5504–5511. <https://doi.org/10.23919/CCC52363.2021.9550358>.
4. Lee Y., Bakolas E. Relay pursuit of an evader by a heterogeneous group of pursuers using potential games. *American Control Conference (ACC)*. New Orleans, LA, USA, 2021. P. 3182–3187. <https://doi.org/10.23919/ACC50511.2021.9482912>.
5. Silveira J., Cabral K., Rabbath C-A., Givigi S. Deep reinforcement learning solution of reach-avoid games with superior evader in the context of unmanned aerial systems. *International Conference on Unmanned Aircraft Systems (ICUAS)*. Warsaw, Poland, 2023. P. 911–918. <https://doi.org/10.1109/ICUAS57906.2023.10156154>.
6. Luo Y., Jiang X., Zhong S., Ji Y., Sun G. A multi-satellite swarm pursuit-evasion game based on contract network protocol and optimal lambert method. Yan L., Duan H., Deng Y. (eds.). *Advances in Guidance. Navigation and Control*. ICGNC 2022. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. Vol. 845. Singapore: Springer. 2022. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6613-2_222.

7. Lee Y., Bakolas E., Akella M.R. Feedback strategies for hypersonic pursuit of a ground evader. *IEEE Aerospace Conference (AERO)*. Big Sky, MT, USA, 2022. P. 1–7. <https://doi.org/10.1109/AERO53065.2022.9843434>.
8. Xiao Liang, Boran Zhou, Linping Jiang, Guanglei Meng, Yiwei Xiu. Collaborative pursuit-evasion game of multi-UAVs based on Apollonius circle in the environment with obstacle. *Connection Science*. 2023. Vol. 35, N 1. <https://doi.org/10.1080/09540091.2023.2168253>.
9. Tan M., Shen H. The differential game cooperative guidance law for the single target. Yan L., Duan H., Deng Y. (eds.). *Advances in Guidance, Navigation and Control. ICGNC 2022. Lecture Notes in Electrical Engineering*. Vol. 845, 2022. Singapore: Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-19-6613-2_188.
10. Чикрий А.О., Раппопорт Й.С. Модифікований метод розв'язувальних функцій в ігрових задачах зближення керованих об'єктів з різною інерційністю. *Кибернетика та системний аналіз*. 2023. Т. 59, № 2. С. 87–103.
11. Чикрий А.О., Раппопорт Й.С. Прямий метод розв'язання ігрових задач зближення керованих об'єктів. *Кибернетика та системний аналіз*. 2023. Т. 59, № 5. С. 144–153.
12. Чикрий А.О., Раппопорт Й.С. Модифікації умови Понтрягіна у проблемі зближення конфліктно-керованих об'єктів. *Кибернетика та системний аналіз*. 2022. Т. 58, № 6. С. 95–105.
13. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
14. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
15. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. Москва: Наука, 1980. 320 с.
16. Пшеничный Б.Н., Остапенко В.В. Дифференциальные игры. Киев: Наук. думка. 1992, 263 с.
17. Hajek O. Pursuit games. Vol. 12. New York: Acad. Press, 1975. 266 p.
18. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
19. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
20. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.

A.A. Chikrii, I.S. Rappoport

SUFFICIENT APPROACH CONDITIONS FOR CONFLICT CONTROLLED OBJECTS WITH DIFFERENT INERTIA

Abstract. The problem of convergence of controlled objects with different inertia in dynamic game problems is considered. For controlled objects with different inertia, it is characteristic that the Pontryagin condition is not satisfied on a time interval. To solve the problem, a special multivalued mapping and a matrix function are introduced to equalize the players' control resources, and then the additional resource is compensated by the body component of the cylindrical terminal set. With the help of the lower resolving function for objects with different inertia, two modified schemes of the first direct Pontryagin method are proposed, which guarantee the successful completion of the conflict-controlled process in the class of countercontrols. The upper resolving function is introduced and the corresponding modified schemes of the method of resolving functions for controlled objects with different inertia in the class of quasi-strategies and counter-controls are presented. New theoretical results are illustrated by a model example.

Keywords: controlled objects with different inertia, quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Надійшла до редакції 28.12.2023