

УДК 517.95:519.63

DOI: 10.32626/2308-5878.2024-26.37-49

А. С. Калініченко

Харківський національний університет радіоелектроніки, м. Харків

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ САМОЗАЙМАННЯ У НАСИПІ З КРУГОВИМ ТА ПІВКРУГОВИМ ПЕРЕРІЗОМ МЕТОДАМИ РОТЕ ТА ДВОБІЧНИХ НАБЛИЖЕНЬ

Самозаймання насипу таких матеріалів, як торф, вугілля, зерно виникає через накопичення тепла, виділеного екзотермічною реакцією окиснення, тому насип можна розглядати як тіло з внутрішнім джерелом тепла. Дослідження процесів самозаймання за допомогою математичного моделювання зводиться до необхідності розв'язання початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності. Оскільки знайти аналітичний розв'язок не завжди можливо, тому має сенс використання методів чисельного аналізу.

Метою цієї статті є чисельне дослідження початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що виникає при математичному моделюванні процесів самозаймання насипу сипучого матеріалу циліндричної форми з круговою та півкровою основою методом Роте у поєднанні з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна.

Для досягнення поставленої мети вихідна початково-крайова задача для напівлінійного рівняння теплопровідності методом Роте була замінена послідовністю крайових задач для напівлінійного еліптичного рівняння з оператором Гельмгольца, кожна з яких була зведена до нелінійного інтегрального рівняння Гаммерштейна. Для нього було побудовано ітераційний процес двобічного методу з умовою його зупинки, отриманою завдяки апостеріорній оцінці похибки. Апроксимація потужності внутрішнього джерела тепла була проведена за допомогою експоненціальної залежності.

Результати проведеного обчислювального експерименту наведено у вигляді графіків наближень до розв'язку на різних часових шарах та графіків теплокарт. Отримані наближені розв'язки для насипу циліндричної форми з круговою та півкровою основою було порівняно між собою та з відомим розв'язком для насипу циліндричної форми з прямокутною основою.

Ключові слова: математичне моделювання, двовимірне напівлінійне рівняння теплопровідності, метод двобічних наближень, метод Роте, процеси самозаймання, рівняння Гаммерштейна, функція Гріна.

Вступ. Схильність таких насипних матеріалів, як зерно, вугілля, бавовна, торф до загоряння без впливу зовнішнього джерела запалювання створює необхідність контролю та профілактики пожеж. Цей процес називається самозайманням, а його математичне моделювання, пов'язане з необхідністю розв'язання початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності, що часто неможливо виконати аналітично. Тому застосування до знаходження її розв'язку методів чисельного аналізу, зокрема методу Рунге у поєднанні з ітераційним методом двобічних наближень є актуальною науковою задачею. У цій роботі розглянуто їх застосування до задачі теплообміну в циліндричному тілі, що має внутрішнє джерело тепла. Як основу циліндричного тіла обрано дві області: круг $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$ з радіусом $R=1$ та півкруг $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_2 \geq 0\}$ з радіусом $R=\sqrt{2}$. Такий вибір форми тіла обумовлюється практичними міркуваннями щодо фізичного сенсу задачі – кожна область має однакову міру $\mu(\Omega) = \pi$, тому відповідні контейнери для збереження матеріалу, перерізами яких є ці області, при однаковій довжині тіла вмістять однаковий об'єм цього матеріалу. Отже, проведення такого обчислювального експерименту дає можливість дослідити вплив геометричної форми насипу на накопичення в ньому тепла при процесові самозаймання. Приклади насипів вугілля, що мають такі форми, наведено на рис. 1 та рис. 2 (зліва зображено насип; пунктиром виділено $\partial\Omega$; справа зображено Ω).

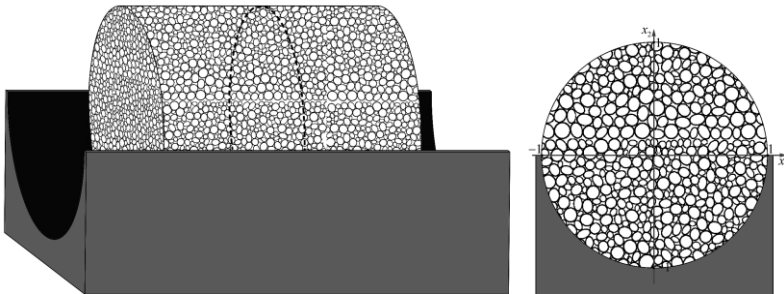


Рис. 1. Зображення насипу вугілля циліндричної форми та його перерізу, що описується областю $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$

Постановка задачі. Розглянемо процес самозаймання у насипі, що має форму циліндричного тіла з основою, що описується областю $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, для якого можна стверджувати, що його вимір (сторона), який перпендикулярний до основи, значно більший за інші.

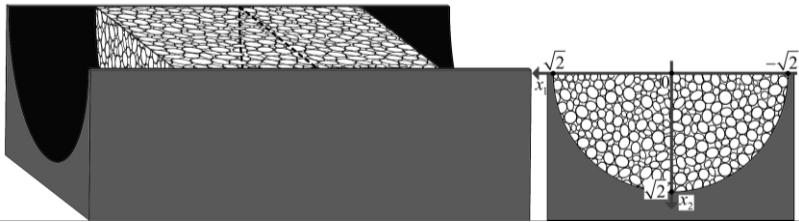


Рис. 2. Зображення насипу вугілля циліндричної форми та його перерізу, що описується областю $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 2, x_2 \geq 0\}$

Процес самозаймання є наслідком накопичення всередині насипу тепла, виділеного екзотермічною реакцією окиснення – якщо його більше, ніж може розсіятися у насипі та випромінитися у навколишнє середовище, то починається горіння. Таким чином, можна вважати, що всередині насипу матеріалу є внутрішнє джерело тепла. Згідно з теорією горіння та вибуху [1, 2], математичною моделлю розподілу температури $T(\mathbf{x}, t)$ при самозайманні у насипі матеріалу зі сталими теплофізичними властивостями, розповсюдження тепла всередині якого відбувається лише через теплопровідність, є початково-крайова задача для рівняння теплопровідності. Для обраної форми насипу, оскільки один його вимір значно більший двох інших, варто розглядати двовимірну модель [3]. Тоді, якщо використати для апроксимації потужності внутрішнього джерела тепла рівняння Арреніуса, математична модель матиме вигляд

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + Q \cdot \rho \cdot A_0 \cdot e^{-\frac{E_a}{R(T+273)}}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = T_\partial(\mathbf{x}, t) \quad \text{на } \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

де $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ – просторові координати, ρ – щільність матеріалу, C – питома теплоємність матеріалу, k – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, Δ – оператор Лапласа, $T_0(\mathbf{x})$ – початковий розподіл температури, $T_\partial(\mathbf{x}, t)$ – межовий розподіл температури, Q – тепло, яке виділяє реакція на одиницю маси, A_0 – передекспоненціальний коефіцієнт рівняння Арреніуса, E_a – енергія активації, R – універсальна газова стала [4].

Початковий та межовий розподіли температур вносять в модель початковий стан насипу та його теплову взаємодію з навколишнім середовищем відповідно, причому $T_\partial(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$.

Введемо у розгляд безрозмірну функцію зміни температури

$$\theta(\mathbf{x}, t) = \frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)} (T(\mathbf{x}, t) - T_0(\mathbf{x})).$$

Далі вважатимемо, що на поверхні насипу підтримується стала температура. Тоді, увівши коефіцієнт температуропровідності

$$A = \frac{k}{\rho C}, \text{ позначення } B \approx B(\mathbf{x}) = \frac{QA_0}{C} e^{-\frac{E_a}{R(T_0(\mathbf{x}) + 273)}} \text{ (в припущенні, що}$$

$T_0(\mathbf{x})$ дозволяє таку заміну), використавши розкладання експоненти в законі Арреніуса [5] та обравши час моделювання $t_0 > 0$, можемо виконати перехід до розгляду початково-крайової задачі для функції зміни температури $\theta(\mathbf{x}, t)$ в перерізі насипу Ω для процесу самозаймання на часовому інтервалі $t \in [0, t_0]$, детальніше описаний в [6]:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = A\Delta \theta + B e^{\theta}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (4)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t \in (0, t_0], \quad (5)$$

$$\theta(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (6)$$

$$\theta(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, t_0]. \quad (7)$$

Параметри $A > 0$ та $B > 0$ відображають фізико-хімічні властивості насипу матеріалу та визначаються емпірично. Умова (5) має сенс в контексті розгляду функції зміни температури при екзотермічній реакції.

Метод розв'язання. Застосуємо до задачі (4)-(7) метод Рунге в поєднанні з методом двобічних наближень на основі використання функції Гріна [6, 7].

Розв'язок задачі (4)-(7), відповідно до методу Рунге, шукатимемо вздовж прямих $t = \text{const}$. Для цього введемо на часовому відрізку $[0, t_0]$ з кроком τ сітку

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, 2, \dots, m, \quad m\tau = t_0$$

у вузлах якої апроксимуємо відношенням скінченних різниць диференціальний оператор в лівій частині рівняння (4)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} \approx \frac{\theta(\mathbf{x}, t_j) - \theta(\mathbf{x}, t_{j-1})}{\tau},$$

та, позначивши $\Theta_j = \Theta_j(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}, t_j)$, $j = 0, 1, 2, \dots, m$, з похибкою $O(\tau)$ замінимо на прямій $t = t_j$ вихідне рівняння напівлінійним еліптичним рівнянням

$$-\Delta \Theta_j + \frac{1}{A\tau} \Theta_j = \frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1} + \frac{B}{A} e^{\Theta_{j-1}} \Theta_j(\mathbf{x}). \quad (8)$$

Використовуючи початкову умову (6) отримаємо значення $\theta(\mathbf{x}, t)$ на часовому шарі $t_0 = 0$: $\Theta_0(\mathbf{x}) = 0$. Рівняння (8), яким було замінене вихідне (4), також розглядається при $\mathbf{x} \in \Omega$, тому зважаючи на (7) маємо крайову умову $\Theta_j(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0$.

Отже, знаходження розв'язку вихідної початково-крайової задачі (4)-(7) зведено до розв'язання послідовності крайових задач

$$-\Delta\Theta_j + \frac{1}{A\tau}\Theta_j = \frac{1}{A\tau}\Theta_{j-1} + \frac{B}{A}e^{\Theta_j}\Theta_j(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (10)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad (11)$$

$$\Theta_j(\mathbf{x}, t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad t \in [0, t_0], \quad (12)$$

$$j = 1, 2, \dots, m; \quad \Theta_0(\mathbf{x}) = 0,$$

до кожної з яких послідовно застосуємо метод двобічних наближень на основі використання методу функції Гріна. Зауважимо, що на j -му часовому шарі ($j = 1, 2, \dots, m$) функція Θ_{j-1} буде вже знайденою.

Запишемо еквівалентне задачі (9)-(12) інтегральне рівняння Гаммерштейна

$$\Theta_j(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{1}{A\tau}\Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A}e^{\Theta_j(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s}, \quad (13)$$

де $G(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ – функція Гріна першої крайової задачі для оператора Гельмгольца $-\Delta u + \frac{1}{A\tau}u$ ($A > 0$) на $\bar{\Omega}$. Наприклад, функція Гріна для кругової області з радіусом R має вигляд

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{2}{\pi R^2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}})J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}})\cos n(\varphi - \psi)}{(1 + \delta_{n0})[J'_n(\mu_{nm})]^2(\lambda_{nm} + \kappa^2)},$$

де $J_n(\mu)$ – функція Бесселя, μ_{nm} – m -й додатний корінь рівняння

$$J_n(\mu) = 0, \quad \lambda_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2}{R^2}, \quad \kappa = \frac{1}{\sqrt{A\tau}}, \quad \delta_{n0} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad \text{а для півкрової області з радіусом } R$$

$$G(r, \varphi, \rho, \psi) = \frac{4}{\pi R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_n(r\sqrt{\lambda_{nm}})J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}})\sin n\varphi \sin n\psi}{[J'_n(\mu_{nm})]^2(\lambda_{nm} + \kappa^2)}.$$

Тут полярні (r, φ) , (ρ, ψ) та декартові (x_1, x_2) , (s_1, s_2) координати точок $\mathbf{x}$, $\mathbf{s}$ пов'язані відповідно як $x_1 = r \cos \varphi$, $x_2 = r \sin \varphi$, $s_1 = \rho \cos \psi$, $s_2 = \rho \sin \psi$.

Зафіксуємо надалі j та розглянемо на j -му часовому шарі рівняння (13) у банаховому просторі $C(\bar{\Omega})$ з введеною напівоупорядкованістю за допомогою конуса $\mathcal{K}_+$ невід'ємних неперервних функцій.

Нелінійний інтегральний оператор у правій частині рівняння

$$(13) \quad T_j(u)(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \left(\frac{1}{A\tau} \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) + \frac{B}{A} e^{u(\mathbf{s})} \right) d\mathbf{s} \in \text{ізотонним}.$$

Інваріантний конусний відрізок для оператора T_j шукатимемо у вигляді $\langle v_j^0, w_j^0 \rangle = \langle 0, \beta_j \rangle$, де для знаходження $\beta_j > 0$, після введення $u_0(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) d\mathbf{s}$ маємо нерівність

$$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} M e^{\beta} \leq \beta,$$

$$\text{де } \varphi_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{A\tau} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \Theta_{j-1}(\mathbf{s}) d\mathbf{s}, \quad M = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} u_0(\mathbf{x}).$$

Отже, можемо побудувати двобічний ітераційний процес для знаходження розв'язку крайової задачі (11)-(15) на j -му часовому шарі:

$$v^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{v^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

$$w^{(k+1)}(\mathbf{x}) = \varphi_j(\mathbf{x}) + \frac{B}{A} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{w^{(k)}(\mathbf{s})} d\mathbf{s}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (15)$$

$$v^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad w^{(0)}(\mathbf{x}) = \beta_j, \quad (16)$$

з умовою завершення його проведення $\frac{1}{2} \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}} (w^{(k)}(\mathbf{x}) - v^{(k)}(\mathbf{x})) < \varepsilon$, що впливає із апостеріорної оцінки похибки. При цьому наближенням до розв'язку рівняння Гаммерштейна (а отже, і крайової задачі (9)-(12)) на k -й ітерації вважатимемо функцію $\Theta_j^{(k)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (w^{(k)}(\mathbf{x}) + v^{(k)}(\mathbf{x}))$.

Достатніми умовами збіжності ітераційного процесу (14)-(16) є виконання для кожного $j = 1, 2, \dots, m$, нерівності $\beta_j < 1$ або $M \cdot \frac{B}{A} e^{\beta_j} < 1$.

Застосовуючи до послідовності крайових задач (9)-(12) метод двобічних наближень, отримаємо набір функцій

$$\Theta_0(\mathbf{x}) = 0, \quad \Theta_1^{(k_1)}(\mathbf{x}), \quad \Theta_2^{(k_2)}(\mathbf{x}), \quad \dots, \quad \Theta_m^{(k_m)}(\mathbf{x}).$$

За отриманим набором функцій за допомогою апарату теорії інтерфлетації [8] можна побудувати наближений розв'язок $u_m(\mathbf{x}, t)$

задачі (4)-(7) у вигляді функції, визначеної при всіх $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in [0, t_0]$. Він матиме точність $O(\tau)$. Провівши повторно ітераційний процес з кроком $\frac{\tau}{2}$ його можна уточнити відповідно до правила Рунге до порядку $O(\tau^2)$.

Обчислювальний експеримент. Обчислювальний експеримент проведено для початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рівняння теплопровідності (4)-(7), що моделює процес самозаймання у циліндричному насипі з круговою основою

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\} \quad (17)$$

при $R=1$ та циліндричному насипі з півкруговою основою

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq R^2, x_2 \geq 0\} \quad (18)$$

при $R=\sqrt{2}$, обравши час моделювання $t_0=1$, значення параметрів $A=1$, $B=\frac{5}{4}$ та крок сітки на часовому інтервалі $\tau=\frac{1}{3}$.

На рис. 3 та рис. 4 наведено ітераційний процес на першому часовому шарі $t=\tau=\frac{1}{3}$ для областей (17) та (18) відповідно (пунктиром зображено верхні наближення $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$, суцільною лінією – наближення $\Theta_1(\mathbf{x})$, пунктиром з точкою – верхні наближення $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$), що демонструє його двобічний характер збіжності.

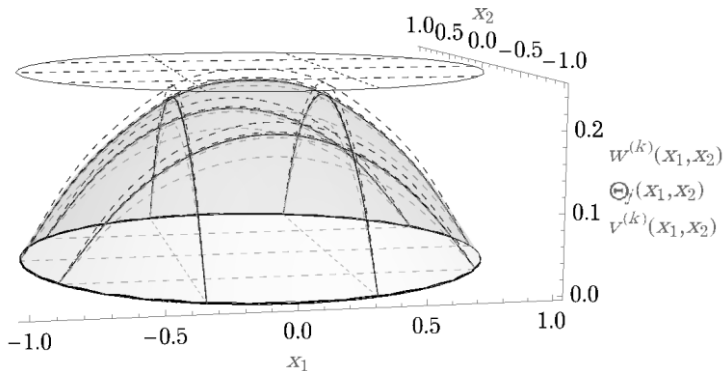


Рис. 3. Графіки $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$, $\Theta_1(\mathbf{x})$ та $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$

на часовому шарі $t=\frac{1}{3}$ для круга радіуса $R=1$

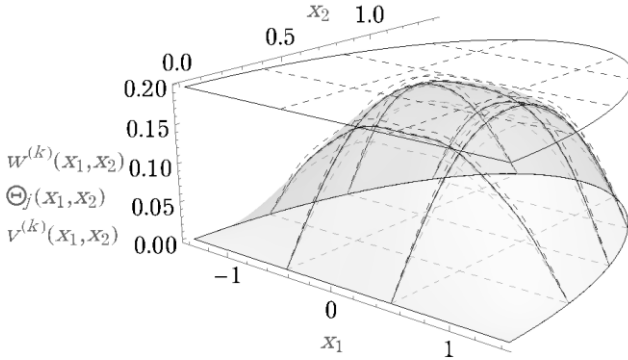


Рис. 4. Графіки $\{w^{(k)}(\mathbf{x})\}$, $\Theta_1(\mathbf{x})$ та $\{v^{(k)}(\mathbf{x})\}$

на часовому шарі $t = \frac{1}{3}$ для півкруга радіуса $R = \sqrt{2}$

На рис. 5 та рис. 6 наведено графіки наближень $\Theta_j(\mathbf{x})$, $j = \overline{0,3}$ для областей (17) та (18) відповідно. На обох спостерігається зростання наближення зі збільшенням номеру часового шару.

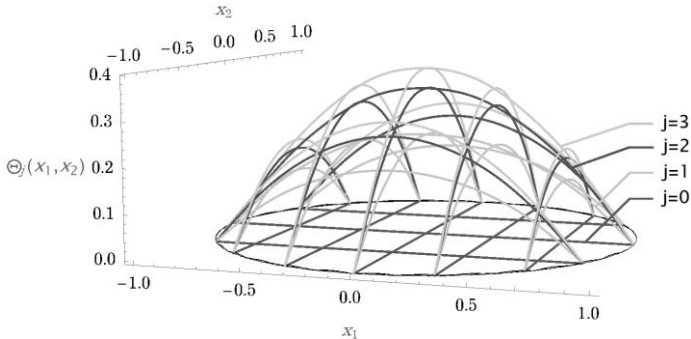


Рис. 5. Графіки наближених розв'язків $\Theta_j(\mathbf{x})$

до розв'язку задачі (4)-(7) для круга радіуса $R = 1$

на часових шарах $t = \frac{1}{3}j$, $j = 0, 1, 2, 3$

До такого ж висновку можна прийти, аналізуючи дані, наведені в табл. 1 та табл. 2: максимальне значення кожного наближення, аргумент максимізації, різниця між максимумами наближень на поточному та попередньому часовому шарі, значення інтегралу наближення по області Ω , поділене на міру області: $\bar{\theta}_j = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_{\Omega} \Theta_j(\mathbf{x}) ds$,

що відображає середнє значення наближення, та різниця між цими значеннями на поточному та попередньому часових шарах $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$ для областей (17) та (18) відповідно. Повертаючись до фізичного сенсу задачі (4)-(7), такі значення як максимум та інтеграл наближення, розділений на міру області, відображають відповідно максимально накопичене в точці перерізу насипу тепло та середнє його значення на цьому часовому шарі. Як бачимо, різниця цих значень на поточному та попередньому шарах у обох випадках зменшується зі збільшенням номеру шару, тобто при обраних параметрах з часом зменшується кількість накопиченого тепла за однакові часові проміжки.

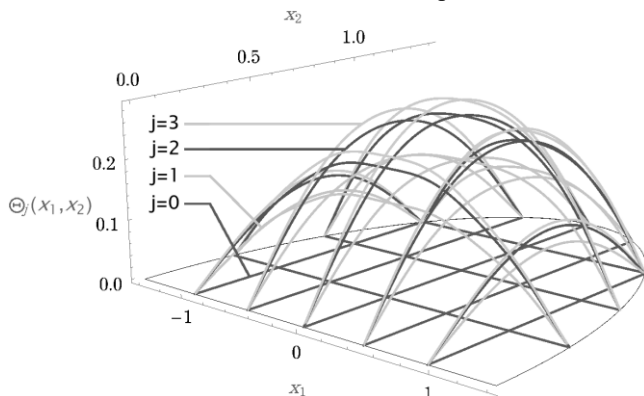


Рис. 6. Графіки наближених розв'язків $\Theta_j(\mathbf{x})$ до розв'язку задачі (4)-(7)

для півкруга радіуса $R = \sqrt{2}$ на часових шарах $t = \frac{1}{3}j$, $j = 0, 1, 2, 3$

Таблиця 1

Дані про максимум $\Theta_j(\mathbf{x})$, $j = \overline{0, 3}$, аргумент максимізації

та різницю максимумів $\Theta_j(\mathbf{x})$ і $\Theta_{j-1}(\mathbf{x})$, значення $\bar{\theta}_j$

та $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$ для круга радіуса $R = 1$, $j = \overline{1, 3}$.

j	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x}) - \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_{j-1}(\mathbf{x})$	$\bar{\theta}_j$	$\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$
0	0	Ω	—	0	—
1	0,236553	(0; 0)	0,236553	0,122866	0,122866
2	0,345951	(0; 0)	0,109398	0,171881	0,049016
3	0,393307	(0; 0)	0,047356	0,192370	0,020489

Таблиця 2

Дані про максимум $\Theta_j(\mathbf{x})$, $j = \overline{0,3}$, аргумент максимізації
та різницю максимумів $\Theta_j(\mathbf{x})$ і $\Theta_{j-1}(\mathbf{x})$, значення $\bar{\theta}_j$
та $\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$ для півкруга радіуса $R = \sqrt{2}$, $j = \overline{1,3}$

j	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\arg \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x})$	$\max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_j(\mathbf{x}) - \max_{\mathbf{x} \in \Omega} U_{j-1}(\mathbf{x})$	$\bar{\theta}_j$	$\bar{\theta}_j - \bar{\theta}_{j-1}$
0	0	Ω	—	0	—
1	0,189873	(0; 0,644555)	0,189873	0,096102	0,096102
2	0,262983	(0; 0,655525)	0,073110	0,127208	0,031106
3	0,288949	(0; 0,658226)	0,025966	0,137668	0,010460

Теплокарти наближень $\Theta_j(\mathbf{x})$ до розв'язку задачі (4)-(7) на часових шарах $j \cdot \tau$, $j = \overline{0,3}$, для області (17) зображено на рис. 7, а для області (18) – на рис. 8. У обох випадках накопичення тепла відбувається біля центрів областей, які, повертаючись до даних в табл. 1 та табл. 2, є «найтеплішими» точками.

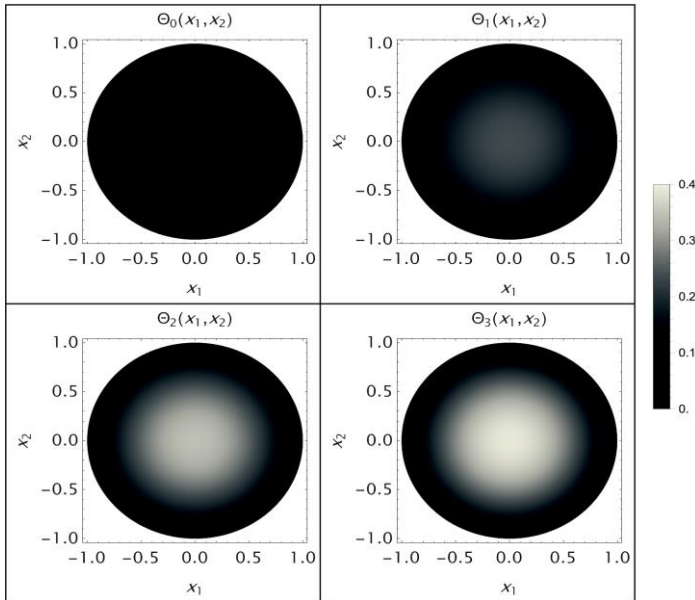


Рис. 7. Графіки теплокарт для до розв'язку задачі (4)-(7)
 $\Theta_j(\mathbf{x})$ для круга радіуса $R = 1$, $j = \overline{0,3}$

Аналізуючи та порівнюючи дані з табл. 1 та табл. 2 з даними, отриманими при моделюванні процесів самозаймання у насипі циліндричної форми з прямокутною основою, описаними в [6], можна зробити висновок, що у насипі, перерізом якого є прямокутна область з довжинами сторін $a = \pi$ та $b = 1$ накопичується менше тепла як в одній точці перерізу так і взагалі, оскільки середнє значення та максимум наближення до шуканої функції зміни температури для цього випадку є найменшими на останньому часовому шарі моделювання. Насипи з перерізами у вигляді напівкруга з радіусом $\sqrt{2}$ та круга з радіусом 1 займають друге та третє місце за цими параметрами. Ці результати корелюються з ранжуванням областей за зростанням довжини межі відповідно, що пояснюється збільшенням ділянки, на якій підтримується стала температура, при збереженні тої ж кількості матеріалу. Повертаючись до практичного сенсу задачі, зокрема можна стверджувати, що транспортні контейнери з прямокутною основою є більш оптимальними для попередження самозаймання сипучих матеріалів.

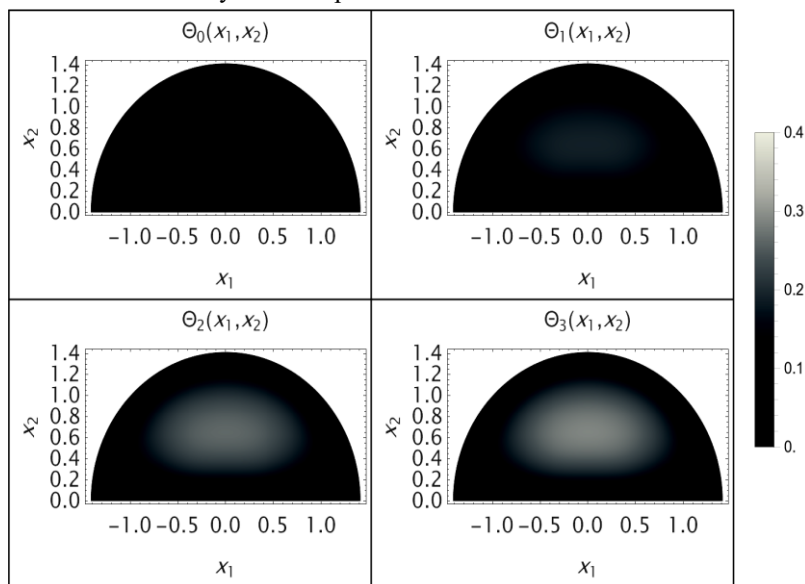


Рис. 8. Графіки теплокарт для до розв'язку задачі (4)-(7)

$\Theta_j(\mathbf{x})$ для півкруга радіуса $R = \sqrt{2}$, $j = 0, 3$

Висновки. У роботі вперше застосовано метод Роте у поєднанні з методом двобічних наближень до знаходження розв'язку початково-крайової задачі для двовимірного напівлінійного рів-

няння теплопровідності, що виникає при моделюванні процесів самозаймання насипів сипучого матеріалу циліндричної форми з основою круг та напівкруг. Отримані чисельні результати дозволили сформулювати рекомендації щодо бажаної геометрії циліндричного насипу, що можуть бути використані для запобігання пожежі при зберіганні та транспортуванні сипучих матеріалів, схильних до самозаймання.

Список використаних джерел:

1. Semenoff N. Zur Theorie des Verbrennungsprozesses. *Zeitschrift für Physik*. 1928. Bd. 48. Nr. 7-8. S. 571-582.
2. Франк-Каменецкий Д. А. Распределение температур в реакционном сосуде и стационарная теория теплового взрыва. *Докл. АН СССР*. 1938. Т. 18. № 7. С. 411-412.
3. Matthew B. Modelling the Self-Heating of Steel Stockpiles. Wollongong: University of Wollongong, 2023. 210 p.
4. Bowes P. C. Self-heating: Evaluating and controlling the hazards. London: Department of the Environment, Building Research Establishment, 1984. 500 p.
5. Франк-Каменецкий Д. А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 2008. 408 с.
6. Калініченко А. Дослідження процесів самозаймання у насипі з прямокутним перерізом методами Роте та двобічних наближень. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*. 2024. № 25. С. 96-106.
7. Сидоров М. В. Метод Роте у комбінації з методом двобічних наближень розв'язання початково-крайових задач для напівлінійного рівняння теплопровідності. *Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки*. 2018. № 1. С. 108-127.
8. Литвин О. М. Інтерлінація та інтерфлетация функцій і структурний метод В.Л. Рвачова. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2007. Т. 50, № 4. С. 61-82.

MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESSES OF SPONTANEOUS IGNITION IN A STOCKPILE WITH A CIRCULAR AND SEMICIRCULAR SECTION BY ROTHE'S AND TWO-SIDED APPROXIMATIONS METHODS

Self-ignition of a stockpile of materials such as peat, coal, and grain occurs due to the accumulation of heat released by an exothermic oxidation reaction, so the stockpile can be considered as a body with an internal heat source. The research of self-ignition processes using mathematical modeling is reduced to the need to find a solution to the initial boundary value problem for the two-dimensional semi-linear heat conduction equation.

Since it is not always possible to find an analytical solution, it makes sense to use numerical analysis methods.

The aim of this article is a numerical study of the initial boundary value problem for a two-dimensional semilinear heat conduction equation that arising in the mathematical modelling of self-ignition processes of a stockpile of bulk material of cylindrical shape with a circular and semicircular base using the Rothe's method in combination with the method of two-sided approximations based on the Green's function.

To achieve this goal, the original initial boundary value problem for the semilinear heat conduction equation using the Rothe's method was replaced by a sequence of boundary value problems for the semilinear elliptic equation with the Helmholtz operator, each of which was reduced to the nonlinear Hammerstein integral equation. An iterative process of the two-sided approximations method was constructed for it with a stopping condition obtained through a posteriori error estimation. The power of the internal heat source was approximated using an exponential dependence.

The results of the conducted computational experiment are presented in the form of graphs of approximations to the solution on different time layers and graphs of heat maps. The resulting approximate solutions for a stockpile of cylindrical shape with a circular and semicircular base were compared with each other and with a known solution for a stockpile of cylindrical shape with a rectangular base.

Key words: *mathematical modeling, two-dimensional semilinear heat conduction equation, two-sided approximations method, Rothe's method, self-ignition processes, Hammerstein equation, Green's function.*

Отримано: 14.12.2024