

УДК 539.3: 620.198

**ВИЗНАЧЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ЦИЛІНДРИЧНИХ
ТІЛ З БАГАТОШАРОВИМИ НЕОДНОРІДНИМИ ПОКРИТТЯМИ***Б. М. КАЛИНЯК, В. А. ШЕВЧУК**Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів*

Запропоновано метод визначення термонапруженого стану у довгому циліндрі з неоднорідним у радіальному напрямі багатошаровим покриттям за сталого силового навантаження поверхні та заданого температурного поля. Відповідну задачу незв'язаної термопружності у напруженнях зведено безпосереднім інтегруванням рівнянь рівноваги та сумісності деформацій до сукупності інтегральних рівнянь відносно радіальних напружень та суми радіальних і колових напружень. Отримано наближені аналітичні розв'язки цих інтегральних рівнянь з врахуванням товщини кожного шару покриття. Методику підтверджено порівнянням з результатами, отриманими з точних розв'язків відповідної задачі термопружності для степеневі залежності термомеханічних характеристик матеріалів покриття від радіальної змінної. Метод можна застосувати для визначення термонапруженого стану порівняно товстих покриттів, які складаються з великої кількості тонких.

Ключові слова: *суцільний циліндр, неоднорідні багатошарові покриття, термонапружений стан, інтегральні рівняння, аналітичні розв'язки, товсті покриття.*

The method of determining the thermal stress state in a long cylinder with the inhomogeneous in the radial direction multilayer coating under a constant force surface load and a given temperature field is proposed. The corresponding problem of uncoupled thermoelasticity in terms of stresses is reduced by direct integration of the equations of equilibrium and compatibility to a set of integral equations relative to radial stresses and the sum of radial and circular stresses. The approximate analytical solutions to these integral equations were obtained taking into account the thickness of each coating layer. The method was verified by comparison with the results obtained from the exact solutions of the corresponding thermoelasticity problem for the power-law dependence of the thermomechanical characteristics of the coating materials on the radial variable. The method can be applied to determine the thermal stress state of the relatively thick coatings which consist of a large number of thin ones.

Keywords: *solid cylinder, inhomogeneous multilayer coatings, thermal stress state, integral equations, analytical solutions, thick coatings.*

Вступ. Для захисту елементів конструкцій від агресивного впливу зовнішнього середовища використовують спеціальні покриття. Вони є складними структурами, неоднорідними за товщиною, пористими, з різними властивостями на поверхні та в області, прилеглої до підкладки. Залежно від функціонального призначення існує широкий діапазон товщин використовуваних покриттів: від декілька мікрон до відносно товстих (сотні мікрон, зокрема, керамічних теплозахисних покриттів).

Здебільшого властивості покриттів змінюються за напрямком, ортогональним до твірної поверхні. Їх неоднорідність спричиняє як технологія виготовлення, так і функціональні вимоги.

Особливе значення мають покриття, виготовлені нашаровуванням матеріалів з різними механічними і теплофізичними характеристиками відповідно до

свого функціонального призначення. Завдяки багатошаровості можна підвищувати їх довговічність і суттєво зменшити матеріалоемність.

Задачі термopужності для тіл з неоднорідними покриттями довільної товщини розглянуто [1–5] для одно- та багатошарових покриттів.

У працях [6–8] отримано аналітичні розв'язки задач термopужності для кусково-неоднорідних тіл лише для лінійної, експоненціальної та степеневі залежностей термомеханічних властивостей від просторової координати. Їх можна застосувати і для тіл з багатошаровими покриттями. Розроблено [9] числово-аналітичну методику визначення термонапруженого стану шаруватого функціонально-градієнтного термочутливого циліндра. У цих працях не враховують можливу специфічну особливість систем покриття–підкладка – малу товщину покриття порівняно з відповідним розміром основи. Для визначення механічних та теплових напружень у тонких покриттях виявився ефективним підхід, який ґрунтується на моделюванні покриттів тонкими оболонками з відповідними узагальненими крайовими умовами [10, 11].

Практично важливим є випадок застосування багатошарових покриттів, які складаються з великої кількості тонких шарів, але зі загальною товщиною, яку вже не можна вважати малою. Показано [12] ефективність підходу, заснованого на зведенні вихідної задачі до системи інтегральних рівнянь, та розроблено ефективну процедуру отримання простих розрахункових співвідношень.

Нижче такий підхід розвинено для врахування впливу температурного поля на напружений стан системи. Ефективність запропонованого підходу проілюстровано розв'язуванням тестової задачі і порівнянням з отриманим точним аналітичним розв'язком.

Формулювання задачі. У циліндричній системі координат (r, φ, z) розглянуто суцільний довгий циліндр радіуса R з нанесеним n -шаровим неоднорідним у кожному шарі покриттям загальної товщини $h = \sum_{j=1}^n h_j$, де h_j – товщина j -го шару.

У введеній відносній координаті $\rho = r / R$ осі циліндра відповідатиме $\rho_0 = 0$, межі циліндра і поверхням поділу шарів покриття $\rho_1 = 1$, $\rho_j = 1 + \sum_{k=1}^{j-1} h_k / R$, $j = \overline{2, n+1}$.

Розглядуваний циліндр з відомим радіальним розподілом температури, визначеним з відповідної задачі теплопровідності або експериментально, перебуває під заданими сталими навантаженнями на його зовнішній поверхні. Вважаємо, що термомеханічні характеристики (модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення) складників циліндра залежать від радіальної координати.

За сталої поздовжньої деформації і відсутності масових сил основні рівняння, які описують термopужний стан такого циліндра, такі: рівняння рівноваги

$$\rho \frac{d\sigma_r^{(j)}(\rho)}{d\rho} + \sigma_r^{(j)}(\rho) - \sigma_\varphi^{(j)}(\rho) = 0, \quad j = \overline{0, n}; \quad (1)$$

фізичні співвідношення термopужності

$$e_r^{(j)}(\rho) = \frac{\sigma_r^{(j)}(\rho) - \nu^{(j)}(\rho) (\sigma_\varphi^{(j)}(\rho) + \sigma_z^{(j)}(\rho))}{E^{(j)}(\rho)} + \Phi^{(j)}(\rho),$$

$$e_\varphi^{(j)}(\rho) = \frac{\sigma_\varphi^{(j)}(\rho) - \nu^{(j)}(\rho) (\sigma_r^{(j)}(\rho) + \sigma_z^{(j)}(\rho))}{E^{(j)}(\rho)} + \Phi^{(j)}(\rho),$$

$$e_z = \frac{\sigma_z^{(j)}(\rho) - v^{(j)}(\rho) \left(\sigma_r^{(j)}(\rho) + \sigma_\phi^{(j)}(\rho) \right)}{E^{(j)}(\rho)} + \Phi^{(j)}(\rho), \quad j = \overline{0, n}; \quad (2)$$

рівняння сумісності деформацій

$$\rho \frac{de_\phi^{(j)}}{d\rho} - e_r^{(j)} + e_\phi^{(j)} = 0, \quad j = \overline{0, n}; \quad (3)$$

умови навантаження на поверхні та в перерізі

$$\sigma_r^{(n)}(\rho_{n+1}) = -p, \quad (4a)$$

$$2\pi\rho_{n+1}^2 \int_0^{\rho_{n+1}} \eta \sigma_z(\eta) d\eta = P; \quad (4b)$$

умови ідеального механічного контакту сусідніх шарів

$$u_r^{(j)}(\rho_{j+1}) = u_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}), \quad (5a)$$

$$\sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}) = \sigma_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}), \quad j = \overline{0, n-1}. \quad (5b)$$

У рівняннях та співвідношеннях (1)–(5) $E^{(j)}(\rho)$, $v^{(j)}(\rho)$, $\alpha^{(j)}(\rho)$ – залежні від координати модуль пружності, коефіцієнти Пуассона та лінійного температурного розширення матеріалу j -го шару ($j = \overline{0, n}$, $j = 0$ відповідає циліндру-основі); $\Phi^{(j)}(\rho) = \alpha^{(j)}(\rho) \left(T^{(j)}(\rho) - T_0 \right)$ – суто тепла деформація, $T^{(j)}(\rho)$ – встановлене експериментально або обчислене на основі відповідної моделі температурне поле j -го шару, T_0 – відлікова температура, за якої відсутні термонапруження, $\sigma_r^{(j)}(\rho)$, $\sigma_\phi^{(j)}(\rho)$, $\sigma_z^{(j)}(\rho)$ і $e_r^{(j)}(\rho)$, $e_\phi^{(j)}(\rho)$, e_z – радіальна, колова та осьова компоненти тензорів напружень і деформацій у j -му шарі відповідно, $u_r^{(j)}(\rho)$ – радіальна компонента вектора переміщень j -го шару, p – заданий сталий тиск на поверхні покриття, P – задане стале зусилля у перерізі.

Система інтегральних рівнянь. Використовуючи підхід, запропонований у працях [13, 14], зведемо вихідну систему рівнянь до системи інтегральних рівнянь для радіальної компоненти тензора напружень $\sigma_r^{(j)}$ і сумарного напруження $\sigma^{(j)}$:

$$\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\phi^{(j)}. \quad (6)$$

Перепишемо рівняння рівноваги (1), застосувавши подання (6) у вигляді

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2 \sigma_r^{(j)}(\rho)) = \rho \sigma^{(j)}(\rho), \quad (7)$$

тоді $\rho^2 \sigma_r^{(j)}(\rho) - \rho_j^2 \sigma_r^{(j)}(\rho_j) = \int_{\rho_j}^{\rho} \eta \sigma^{(j)}(\eta) d\eta$, і, враховуючи умову контакту (5b)

для напружень, отримуємо рівняння для радіальних та сумарних напружень у j -му шарі

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[(1 - \delta_{j0}) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta \sigma^{(j)}(\eta) d\eta \right], \quad j = \overline{0, n}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}. \quad (8)$$

З виразу (8) для $\rho = \rho_{n+1}$ та врахувавши умови на межі (4a), отримаємо інтегральну умову рівноваги для сумарних напружень

$$-\rho_{n+1}^2 p = \sum_{k=0}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta. \quad (9)$$

Використовуючи формули (2) і (6) та рівняння рівноваги у вигляді (7), подамо рівняння суцільності (3) в напруженнях σ і σ_r :

$$\frac{d}{d\rho} \left[\frac{\sigma^{(j)}(\rho)}{E_1^{(j)}(\rho)} - v^{(j)}(\rho) e_z + (1 + v^{(j)}(\rho)) \Phi^{(j)}(\rho) \right] = \sigma_r^{(j)}(\rho) \frac{d\varphi^{(j)}(\rho)}{d\rho}, \quad (10)$$

де $E_1^{(j)}(\rho) = \frac{E^{(j)}(\rho)}{1 - (v^{(j)}(\rho))^2}$, $\varphi^{(j)}(\rho) = \frac{1 + v^{(j)}(\rho)}{E^{(j)}(\rho)}$. Інтегруючи рівняння (10) для j -го

шару в межах $[\rho_j, \rho]$, отримуємо вираз для сумарних напружень $\sigma^{(j)}$ через радіальні $\sigma_r^{(j)}$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{(j)}(\rho)}{E_1^{(j)}(\rho)} - \frac{\sigma^{(j)}(\rho_j)}{E_1^{(j)}(\rho_j)} &= \int_{\rho_j}^{\rho} \sigma_r^{(j)}(\eta) \frac{d\varphi^{(j)}(\eta)}{d\eta} d\eta + [v^{(j)}(\rho) - v^{(j)}(\rho_j)] e_z - \\ &- [(1 + v^{(j)}(\rho)) \Phi^{(j)}(\rho) - (1 + v^{(j)}(\rho_j)) \Phi^{(j)}(\rho_j)], \quad j = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Звідси отримуємо співвідношення, які пов'язують значення $\sigma^{(j)}$ у межах точках:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{(j)}(\rho_{j+1})}{E_1^{(j)}(\rho_{j+1})} - \frac{\sigma^{(j)}(\rho_j)}{E_1^{(j)}(\rho_j)} &= \int_{\rho_j}^{\rho_{j+1}} \sigma_r^{(j)}(\eta) \frac{d\varphi^{(j)}(\eta)}{d\eta} d\eta + [v^{(j)}(\rho_{j+1}) - v^{(j)}(\rho_j)] e_z - \\ &- [(1 + v^{(j)}(\rho_{j+1})) \Phi^{(j)}(\rho_{j+1}) - (1 + v^{(j)}(\rho_j)) \Phi^{(j)}(\rho_j)], \quad j = \overline{0, n}. \end{aligned} \quad (12)$$

З іншого боку, використовуючи зв'язки між коловими деформаціями і радіальними переміщеннями $e_\varphi^{(j)} = u_r^{(j)} / \rho$ та вирази (2), запишемо контактні умови (5а) через сумарні та радіальні напруження з урахуванням умови неперервності (5б)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{(j+1)}(\rho_{j+1})}{E_1^{(j+1)}(\rho_{j+1})} &= \frac{\sigma^{(j)}(\rho_{j+1})}{E_1^{(j)}(\rho_{j+1})} + \beta^{(j)} \sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}) + [v^{(j+1)}(\rho_{j+1}) - v^{(j)}(\rho_{j+1})] e_z - \\ &- F^{(j+1)}(\rho_{j+1}) + F^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad j = \overline{0, n-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

де $\beta^{(j)} = \varphi^{(j+1)}(\rho_{j+1}) - \varphi^{(j)}(\rho_{j+1})$,

$$F^{(j)}(\rho) = (1 + v^{(j)}(\rho)) \Phi^{(j)}(\rho) - (1 + v^{(0)}(\rho_0)) \Phi^{(0)}(\rho_0).$$

Щоб вилучити присутні у інтегральних рівняннях (11) для $j = \overline{1, n}$ невідомі значення сумарних напружень $\sigma^{(j)}(\rho_j)$ на межах контакту сусідніх шарів, підставимо вирази (13) у рівняння (11) з подальшою послідовною заміною значень $\sigma^{(j)}(\rho_{j+1})$ виразами (12). В результаті отримаємо n інтегральних рівнянь, які у сукупності з першим рівнянням (11) ($j = 0$) запишемо у вигляді

$$\frac{\sigma^{(j)}(\rho)}{E_1^{(j)}(\rho)} = \int_{\rho_j}^{\rho} \sigma_r^{(j)}(\eta) \frac{d\varphi^{(j)}(\eta)}{d\eta} d\eta + (1 - \delta_{j0}) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \left[\sigma_r^{(k)}(\eta) \frac{d\varphi^{(k)}(\eta)}{d\eta} d\eta + \beta^{(k)} \sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) \right] +$$

$$+\frac{\sigma^{(0)}(\rho_0)}{E_1^{(0)}(\rho_0)} + [v^{(j)}(\rho) - v^{(0)}(\rho_0)]e_z - F^{(j)}(\rho), \quad j = \overline{0, n}. \quad (14)$$

Отже, для визначення сумарних та радіальних напружень у циліндрі та всіх n шарах покриття потрібно розв'язати $2(n+1)$ інтегральних рівнянь (8), (14) та скористатись інтегральними умовами (46) та (9) для визначення невідомих сталих e_z та $\sigma^{(0)}(\rho_0)$, присутніх у виразах знайдених напружень. Колові напруження визначаємо за формулами $\sigma_\phi^{(j)} = \sigma^{(j)} - \sigma_r^{(j)}$, осьові напруження $\sigma_z^{(j)}$ та радіальні $e_r^{(j)}$ і колові $e_\phi^{(j)}$ деформації – зі зв'язків між деформаціями та напруженнями (2).

Методика побудови розв'язків інтегральних рівнянь. Розглянемо суцільний циліндр з покриттям, яке складається з n тонких шарів із різних матеріалів. Під тонкими розуміємо шари такої товщини, для яких за обчислення в інтегральних рівняннях (8) і (14) інтегралів, які містять в підінтегральних виразах $Y(\eta)$ невідомі напруження, із задовільною точністю справджується формула трапецій

$$\int_{\rho_j}^{\rho} Y(\eta) d\eta \approx \frac{\rho - \rho_j}{2} [Y(\rho) + Y(\rho_j)]. \quad (15)$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо основу (підкладку) також тонкою (якщо основа не тонка, то її можна розбити на l тонких шарів). Тоді перший шар покриття матиме номер $l+1$, а n -й – $l+n$.

З рівнянь (8) і (14) після використання формули (15) отримуємо рівності

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2} \left[(1 - \delta_{j0}) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \sigma^{(k)}(\eta) d\eta + \frac{\rho - \rho_j}{2} [\rho \sigma^{(j)}(\rho) + \rho_j \sigma^{(j)}(\rho_j)] \right], \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^{(j)}(\rho)}{E_1^{(j)}(\rho)} &= (1 - \delta_{j0}) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \left[\sigma_r^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) \right] + \frac{\sigma^{(0)}(\rho_0)}{E_1^{(0)}(\rho_0)} + \\ &+ \frac{\rho - \rho_j}{2} [\sigma_r^{(j)}(\rho) (\varphi^{(j)}(\rho))' + \sigma_r^{(j)}(\rho_j) (\varphi^{(j)}(\rho_j))'] + [v^{(j)}(\rho) - v^{(0)}(\rho_0)] e_z - F^{(j)}(\rho), \\ &j = \overline{0, n}, \end{aligned} \quad (17)$$

де $(\varphi^{(j)}(\eta))' = d\varphi^{(j)}(\eta) / d\eta$.

З алгебричних рівнянь (16), (17) знаходимо радіальні $\sigma_r^{(j)}$ і сумарні $\sigma^{(j)}$ напруження

$$\sigma^{(j)}(\rho) = \gamma_{10}^{(j)}(\rho) \sigma^{(0)}(\rho_0) + \gamma_{20}^{(j)}(\rho) e_z + \gamma_{00}^{(j)}(\rho), \quad (18)$$

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \gamma_{1r}^{(j)}(\rho) \sigma^{(0)}(\rho_0) + \gamma_{2r}^{(j)}(\rho) e_z + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho), \quad j = \overline{0, n}, \quad (19)$$

$$\text{де} \quad \gamma_{10}^{(j)}(\rho) = \frac{\chi_1^{(j)}(\rho) / E_1^{(0)}(\rho_0) + I_1^{(j-1)}(\rho)}{\psi^{(j)}(\rho)} + \frac{\rho}{4} \frac{(\varphi^{(0)}(\rho))'}{\psi^{(0)}(\rho)} \delta_{j0},$$

$$\gamma_{20}^{(j)}(\rho) = \frac{v^{(j)}(\rho) - v^{(j)}(\rho_j) + [v^{(j)}(\rho_j) - v^{(0)}(\rho_0)] \chi_1^{(j)}(\rho) + I_2^{(j-1)}(\rho)}{\psi^{(j)}(\rho)},$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{00}^{(j)}(\rho) &= \frac{-F^{(j)}(\rho) + F^{(j)}(\rho_j) \left(1 - \chi_1^{(j)}(\rho)\right) + I_0^{(j-1)}(\rho)}{\psi^{(j)}(\rho)}, \\
\psi^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{E_1^{(j)}(\rho)} - \left(\frac{\rho - \rho_j}{2}\right)^2 \frac{1}{\rho} (\varphi^{(j)}(\rho))', \quad I_s^{(j-1)}(\rho) = (1 - \delta_{j0}) \times \\
&\times \left[\gamma_{sr}^{(j-1)}(\rho_j) \chi_2^{(j)}(\rho) + \sum_{k=0}^{j-1} \left(\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{sr}^{(k)}(\eta) (\varphi^{(k)}(\eta))' d\eta + \beta^{(k)} \gamma_{sr}^{(k)}(\rho_{k+1}) \right) \chi_1^{(j)}(\rho) \right], \\
\chi_1^{(j)}(\rho) &= 1 + \left(\frac{\rho - \rho_j}{2}\right)^2 (\varphi^{(j)}(\rho))' \frac{\rho_j}{\rho^2} E_1^{(j)}(\rho), \\
\chi_2^{(j)}(\rho) &= \frac{\rho - \rho_j}{2} \left[\frac{\rho_j^2}{\rho^2} (\varphi^{(j)}(\rho))' + (\varphi^{(j)}(\rho_j))' \right]; \\
\gamma_{sr}^{(j)}(\rho) &= \frac{1}{\rho^2} \left[(1 - \delta_{j0}) \sum_{k=0}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{s0}^{(k)}(\eta) d\eta + \frac{\rho - \rho_j}{2} \rho \gamma_{s0}^{(j)}(\rho) + \rho_j \gamma_{s0}^{(j)}(\rho_j) \right], \quad s=1, 2, 0. \quad (20)
\end{aligned}$$

Сталі $\sigma^{(0)}(\rho_0)$ та e_z визначаємо з інтегральних умов (9) і (46). В результаті отримуємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь з двома невідомими

$$\sigma^{(0)}(\rho_0) d_{11} + e_z d_{12} = c_1, \quad \sigma^{(0)}(\rho_0) d_{21} + e_z d_{22} = c_2, \quad (21)$$

$$\text{де} \quad d_{1s} = \sum_{k=0}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{s0}^{(k)}(\eta) d\eta, \quad s=1, 2, \quad d_{21} = \sum_{k=0}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta v^{(k)}(\eta) \gamma_{10}^{(k)}(\eta) d\eta,$$

$$\begin{aligned}
d_{22} &= \sum_{k=0}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \left(E^{(k)}(\eta) + v^{(k)}(\eta) \gamma_{20}^{(k)}(\eta) \right) d\eta, \quad c_1 = -\rho_{n+1}^2 P - \sum_{k=0}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \gamma_{00}^{(k)}(\eta) d\eta, \\
c_2 &= \frac{P}{2\pi \rho_{n+1}^2} + \sum_{k=0}^n \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta \left[E^{(k)}(\eta) \Phi^{(k)}(\eta) - v^{(k)}(\eta) \gamma_{00}^{(k)}(\eta) \right] d\eta. \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\text{Розв'язком системи (21) є } \sigma^{(0)}(\rho_0) = \frac{c_1 d_{22} - c_2 d_{12}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}, \quad e_z = \frac{c_2 d_{11} - c_1 d_{21}}{d_{11} d_{22} - d_{21} d_{12}}.$$

За плоского деформованого стану ($e_z = 0$) замість системи алгебричних рівнянь (21) матимемо одне рівняння

$$\sigma^{(0)}(\rho_0) d_{11} = c_1. \quad (23)$$

Тестові приклади. Визначимо напружений стан рівномірно навантаженого та рівномірно нагрітого ($t = T^{(j)} - T_0 = \text{const}$) суцільного однорідного циліндра з багат шаровим неоднорідним покриттям для $e_z = 0$. Модулі пружності та коефіцієнти лінійного температурного розширення у кожному шарі покриття змінюються за степеневим законом стосовно радіальної координати ($E^{(i)}(\rho) = E_0^{(i)} \rho^{m_E^{(i)}}$, $\alpha^{(i)}(\rho) = \alpha_0^{(i)} \rho^{m_\alpha^{(i)}}$, де $E_0^{(i)}$, $\alpha_0^{(i)}$, $m_E^{(i)}$, $m_\alpha^{(i)}$ – константи, $m_E^{(i)} \neq 1, 2$, $i = \overline{1, n}$), а коефіцієнти Пуассона $\nu^{(i)}$ – сталі у кожному шарі. В основі-циліндрі $m_E^{(i)} = m_\alpha^{(i)} = 0$, $\nu^{(0)} = \text{const}$. Для цього випадку отримано точний аналітичний розв'язок відповідної задачі термопружності:

$$\sigma_r^{(j)} = C_1^{(j)} \rho^{\lambda_1^{(j)}} + C_2^{(j)} \rho^{\lambda_2^{(j)}} + f^{(j)} \rho^{m_\alpha^{(j)} + m_E^{(j)}},$$

$$\sigma_\phi^{(j)} = C_1^{(j)} (\lambda_1^{(j)} + 1) \rho^{\lambda_1^{(j)}} + C_2^{(j)} (\lambda_2^{(j)} + 1) \rho^{\lambda_2^{(j)}} + f^{(j)} (m_\alpha^{(j)} + m_E^{(j)} + 1) \rho^{m_\alpha^{(j)} + m_E^{(j)}}, \quad (24)$$

де

$$\lambda_{1,2}^{(j)} = 0.5 \left(m_E^{(j)} \pm \sqrt{\left(m_E^{(j)} \right)^2 + 4 \left(1 - m_E^{(j)} \frac{v^{(j)}}{1 - v^{(j)}} \right)} \right) - 1,$$

$$f^{(j)} = - \frac{E_0^{(j)} m_\alpha^{(j)} \alpha_0^{(j)} t}{(1 - v^{(j)}) (m_\alpha^{(j)} + 2) m_\alpha^{(j)} + m_E^{(j)}},$$

а константи $C_1^{(j)}$ і $C_2^{(j)}$ визначають зі системи алгебричних рівнянь, отриманої з крайових умов, які враховують ідеальний механічний контакт між шарами та зовнішнє навантаження.

Точний розв'язок, обчислений за формулами (24), позначатимемо верхнім індексом ex , а отриманий на основі формул (18)–(20), (22), (23) – верхнім індексом IE .

Приклад 1. Для дослідження впливу товщини покриття на застосовність запропонованої методики розглянемо задачу Ляме для циліндра з тришаровим покриттям. Коефіцієнти Пуассона підкладки та покриття є $v^{(0)} = 0,3$; $v^{(1)} = 0,2$; $v^{(2)} = 0,35$; $v^{(3)} = 0,4$. Товщини та модулі пружності матеріалів покриттів і основи задовольняють співвідношення: $h_1 = h_2 = 0,5h_3 = 0,25h$; $E_0^{(1)} : E_0^{(2)} : E_0^{(3)} = 4:15:2$; $E_0^{(1)} / E^{(0)} = 0,1$. Результати обчислень за відсутності теплових деформацій з використанням формул (24) (тут $f^{(j)} = 0$) та (18)–(20), (22), (23) ($\Phi^{(j)} = 0$) подані у табл. 1.

Таблиця 1. Колові напруження на межах шарів покриття для різних товщин і показників степеня неоднорідності модуля Юнга

$m_E^{(i)}$	i	$h / R = 0,01$		$h / R = 0,1$		$h / R = 1$	
		$\sigma_\phi^{ex}(\rho) / p$	$\sigma_\phi^{IE}(\rho) / p$	$\sigma_\phi^{ex}(\rho) / p$	$\sigma_\phi^{IE}(\rho) / p$	$\sigma_\phi^{ex}(\rho) / p$	$\sigma_\phi^{IE}(\rho) / p$
0	0	1,003801	1,003800	1,0338683	1,0338694	1,112008	1,112209
	1	0,3070623	0,3070633	0,3318006	0,3318012	0,4775149	0,477614
	2	0,7721321	0,7721331	0,8695395	0,8695301	1,406856	1,407861
	3	0,7015826	0,7015830	0,7334638	0,7334644	0,8688197	0,8688953
3	0	1,003815	1,003817	1,034776	1,034782	0,9810391	0,9810461
	1	0,3058761	0,3058771	0,3225263	0,3226322	0,4580481	0,4581481
	2	0,7689770	0,7689779	0,8531012	0,8532311	1,981937	1,982037
	3	0,7016432	0,7016444	0,7390975	0,7391321	1,155200	1,155311
5	0	1,003824	1,003832	1,035236	1,035301	0,8134761	0,8134812
	1	0,3051000	0,305112	0,3174503	0,3175352	0,4310273	0,4311273
	2	0,7669011	0,7669107	0,8448570	0,8449447	2,589424	2,592011
	3	0,7016842	0,7016962	0,7435109	0,7436221	1,679109	1,681121

Примітка. Курсивом тут виділені значущі цифри у наближених значеннях напружень, які не збігаються з відповідними цифрами точного розв'язку.

З результатів обчислень видно дуже добрий збіг числових результатів за наближеними та точними формулами за порівняно великих товщин покриттів та показників степеневих функцій.

Приклад 2. Застосуємо запропонований метод для обчислення термонапружень з характеристиками матеріалів з табл. 2, якщо $h/R = 0,002$, $m_E^{(i)} = 5$, $m_\alpha^{(i)} = 5$, $v^{(0)} = 0,3$, $v^{(i)} = 0,2$, $i = \overline{1, 10}$, а навантаження на поверхнях циліндра з десятишаровим покриттям за однакових товщин шарів відсутні.

Таблиця 2. Співвідношення характеристик матеріалів підкладки і шарів покриття

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$E_0^{(i)} / E_0^{(0)}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
$\alpha_0^{(i)} / \alpha_0^{(0)}$	2	4	1	0,5	0,2	5	2	1	3	0

Подано (табл. 3) результати обчислень відносних колових напружень.

Таблиця 3. Колові напруження $\tilde{\sigma}_\Phi^{IE}(\rho) = \sigma_\Phi^{IE}(\rho) / (E_0^{(0)} \alpha_0^{(0)} t)$ на поверхнях поділу шарів неоднорідного покриття

ρ	1	1,0002	1,0004	1,0006	1,0008
$\tilde{\sigma}_\Phi^{IE}(\rho)$	0,11434	0,73056	-0,031205	-0,29259	-0,55467
ρ	1,0010	1,0012	1,0014	1,0016	1,0018
$\tilde{\sigma}_\Phi^{IE}(\rho)$	2,97021	0,58268	-0,039520	0,73280	-0,27392

Детальний аналіз показує, що для таких характеристик матеріалів і товстоті покриттів різниця між точними та наближеними значеннями напружень не перевищує тисячних часток відсотка. Дослідження залежностей точності обчислень напружень у покриттях від товщини для незмінних характеристик матеріалів з табл. 2 вказують на задовільну точність запропонованого методу. Зрозуміло, що зі збільшенням загальної товщини покриття для незмінної кількості шарів, похибка обчислень зростатиме. Для загальної відносної товщини покриття $h/R = 0,45$ похибка обчислень компонент тензора напружень не перевищує 10%.

ВИСНОВКИ

Запропоновано методику отримання наближених виразів для розрахунку термонапружень у циліндрі з неоднорідним багатошаровим покриттям зведенням відповідної задачі термопружності до розв'язування інтегральних рівнянь. Задовільну точність обчислень можна досягнути незалежно від товщини покриття. Підхід застосовний до довільної кількості тонких шарів незалежно від їх сумарної товщини та уможливорює використання отриманих виразів для врахування впливу неоднорідності характеристик матеріалу основи на термонапружений стан покриття. Методика також придатна для визначення термонапруженого стану товстих покриттів.

Дослідження виконано за часткової фінансової підтримки гранту № 0124U002858 у межах українсько-польського науково-дослідного проєкту “Ідентифікація термомеханічних параметрів неоднорідних композитних матеріалів та захисних покриттів”.

1. Afsar A. M., Go J., and Song J. I. A mathematical analysis of thermoelastic characteristics of a rotating circular disk with an fgm coating at the outer surface // *Adv. Compos. Mater.* – 2010. – **19**, № 3. – P. 269–288. <https://doi.org/10.1163/092430410X490482>
2. Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J., and Bajkowski A. S. Semi-analytical solution of three-dimensional thermoelastic problem for half-space with gradient coating // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – **41**, № 9. – P. 1169–1181. <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1460227>
3. Shodja H. M., Haftbaradaran H., and Asghari M. A thermoelasticity solution of sandwich structures with functionally graded coating // *Compos. Sci. Technol.* – 2007. – **67**, № 6. – P. 1073–1080. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2006.06.001>
4. Yang Q. and Gao C.-F. Analysis of thermal stress in a functionally graded coating on a parabolic substrate // *J. Therm. Stresses.* – 2013. – **36**, № 11. – P. 1141–1155. <https://doi.org/10.1080/01495739.2013.81889>
5. Zhao J., Li Y., and Ai X. Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings // *Thin Solid Films.* – 2008. – **516**, № 21. – P. 7581–7587. <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2008.03.028>
6. Ootao Y. Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow cylinder with piecewise power law nonhomogeneity // *J. Solid Mech. Mater. Eng.* – 2010. – **4**, № 8. – P. 1167–1177. <https://doi.org/10.1299/jmmp.4.1167>
7. Ootao Y. Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow sphere with piecewise power law nonhomogeneity // *Compos. Struct.* – 2011. – **93**, № 7. – P. 1717–1725. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.12.008>
8. Ootao Y. Transient thermoelastic analysis for a multilayered thick strip with piecewise exponential nonhomogeneity // *Compos. B: Eng.* – 2011. – **42**, № 4. – P. 973–981. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2010.12.011>
9. Процюк Б. В. Статичні задачі термопружності для шаруватого функціонально-градієнтного термочутливого циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 2. – С. 70–81. <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.2.70-81>
10. Shevchuk V. A. Analysis of the stressed state of bodies with multilayer thin coatings // *Strength Mater.* – 2000. – **32**, № 1. – P. 92–102. <https://doi.org/10.1007/BF02511512>
11. Shevchuk V. A. Methodology of investigations of the thermal stressed state of bodies with thin multilayer coatings // *Math. Sci.* – 2024. – **278**, № 5. – P. 780–794. <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06961-0>
12. Shevchuk V. A. and Kalynyak B. M. Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // *Mater. Sci.* – 2011. – **46**, № 6. – P. 747–756. <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9348-y>
13. Візак В. М., Калиняк Б. М. Зведення одновимірних задач пружності та термопружності для неоднорідних та термочутливих тіл до інтегральних рівнянь другого роду // *Доп. НАН України.* – 1998. – № 11. – С. 60–67.
14. Tokovyy Y. and Ma C.-C. The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids. – Newcastle: Cambridge Scholars Publishing, 2021. – 346 p.

Одержано 01.10.2024