

УДК 539.3

ТЕРМОМЕХАНІЧНИЙ КОНТАКТ ПРУЖНОГО ПІВПРОСТОРУ ТА ЖОРСТКОЇ ОСНОВИ ЗА КРУГОВОГО СТОКУ ТЕПЛА

Р. М. МАРТИНЯК¹, М. М. МИКИТИН^{2,3}, Н. І. МАЛАНЧУК²

¹ Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ;

² Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів;

³ Перший Інноваційний Приватний Львівський Ліцей

Оцінено безфрикційний контакт пружного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи за дії у півпросторі рівномірно розподілених по колу стоків тепла. Виявлено, що півпростір відриватиметься від основи та між ними виникатиме круговий зазор, якщо інтенсивність стоків перевищуватиме деяке критичне значення. Відповідну осесиметричну контактну задачу термопружності зведено до інтегрального рівняння Абеля. На основі його розв'язку проаналізовано залежності форми зазору між тілами і нормальних контактних напружень від інтенсивності стоків тепла та відстані від них до межі півпростору.

Ключові слова: *пружний півпростір, жорстка основа, контакт, круговий стік тепла, розшарування, зазор, контактні напруження.*

The frictionless contact of an elastic half-space, which is under the action of heat sinks uniformly distributed over a circle, and a rigid heat-insulated base, is considered. It is revealed that when the sink intensity exceeds a certain critical value, delamination of the half-space from the base with formation of a circular gap between them will occur. The corresponding axisymmetric contact problem of thermoelasticity is reduced to the Abel integral equation. Based on its solution, the dependences of the shape of the interface gap and the normal contact stresses on the intensity of heat sinks and the distance from them to the surface of the half-space are analyzed.

Keywords: *elastic half-space, rigid base, contact, circular heat sink, delamination, gap, contact stresses.*

Вступ. Під час контакту тіл з узгодженими поверхнями може відбуватися розшарування (відрив) спряжених поверхонь з утворенням між ними зазорів. Такий контакт отримав назву “receding contact” [1, 2]. У літературі вивчають відшарування поверхонь тіл за дії об'ємних зосереджених сил [3], зовнішніх навантажень [1, 4–6] і штампів [2, 7, 8].

Функціонування машин і конструкцій часто пов'язано з локальним нагрівом чи охолодженням. Тому дослідженню термічних напружень в однорідних і неоднорідних тілах за дії зосереджених джерел тепла чи джерел, локалізованих уздовж ліній і поверхонь, приділяють значну увагу [9–15]. За контакту тіл з узгодженими межами термічні напруження можуть спричинити відрив поверхонь. Вивчено термомеханічний відрив півпростору від жорсткої термоізолюваної основи за колового стоку, який може зумовити появу як кругового [16], так і кільцевого зазорів [17]. Виявлено [18, 19], що термомеханічне порушення контакту півпросторів також може спричинити локальна ділянка з термоопором на інтерфейсі.

У цій статті досліджено відрив пружного теплопровідного півпростору від жорсткої теплоізолюваної основи по круговій ділянці під дією стаціонарного

стоку тепла, рівномірно розподіленого по колу, розташованого в площині, паралельній до міжфазної поверхні.

Повний контакт тіл. Дослідимо контакт без тертя пружного півпростору та жорсткої термоізолюваної основи за термомеханічного навантаження. На нескінченності до півпростору прикладено однорідний тиск p . У площині, розташованій на відстані d від поверхні півпростору, діє стаціонарний рівномірно розподілений по колу S радіусом R стік тепла інтенсивності ω (рис. 1а). Вважаємо, що між тілами реалізується односторонній контакт, за якого через поверхню спряження передаються лише стискальні нормальні напруження. Спочатку проаналізуємо повний контакт півпростору і основи.

У цьому випадку контактні-крайові умови задачі теплопровідності й термодружності для півпростору матимуть вигляд

на поверхні контакту ($z = 0$): $q_z = 0$, $\sigma_{rz}^{(0)}(r, 0) = 0$, $u_z^{(0)}(r, 0) = 0$;

на нескінченності ($z = \infty$, $r \in (0; \infty)$): $T = 0$, $\sigma_{rz}^{(0)} = 0$, $\sigma_{zz}^{(0)} = -p$.

Тут за повного контакту T – температура; $q_z = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$ – компонента вектора теплового потоку; $\sigma_{rz}^{(0)}$, $\sigma_{zz}^{(0)}$, $u_z^{(0)}$ – компоненти тензора напружень і вектора переміщень; λ – коефіцієнт теплопровідності півпростору.

Між поверхнями тіл відбуватиметься повний контакт, якщо нормальні контактні напруження недодатні:

$$\sigma_{zz}^0(r, 0) \leq 0, \quad 0 \leq r < \infty. \quad (1)$$

Якщо умова (1) порушується в деякій області ділянки контакту, то це означатиме, що стік тепла зумовлює локальний відрив півпростору від основи.

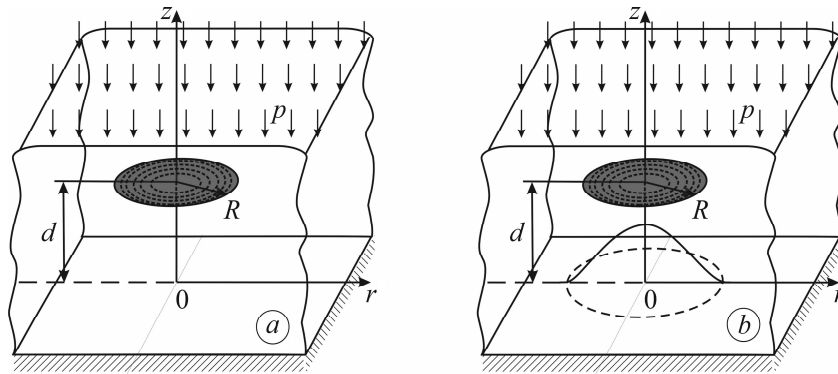


Рис. 1. Схема повного контакту пружного півпростору та жорсткої основи (а) та контакту з круговим розшаруванням між ними (б) за кругового стоку тепла.

Fig. 1. Schematic diagram of the complete contact between the elastic half-space and the rigid base (a) and the contact with circular delamination between them (b) under action of the circular heat sink.

Для визначення термонапруженого стану півпростору пропонуємо такий підхід. Кругову область зі стоками тепла розбиваємо на N кілець S_n ($n = 1, \dots, N$) з внутрішнім $R_n^{\text{in}} = (n-1)R/N$ та зовнішнім $R_n^{\text{ex}} = nR/N$ радіусами. Теплову дію кожного кільця моделюємо термічно еквівалентним колом L_n з радіусом $R_n = (R_n^{\text{ex}} + R_n^{\text{in}})/2$, вздовж якого рівномірно розподілені стоки тепла сталої ін-

тенсивності $\omega_n = \omega R/N$, загальна потужність яких дорівнює загальній потужності тепла $\Omega_n = \pi \left((R_n^{\text{ex}})^2 - (R_n^{\text{in}})^2 \right) \omega$ на кільці S_n . Наближений розв'язок задачі записуємо як суму розв'язків задач для всіх стоків тепла, розподілених по колах L_n ($n=1, \dots, N$), подаючи температуру, переміщення і напруження для одного колового стоку тепла [16]. Зокрема, нормальні напруження

$$\sigma_{zz}^{(0)}(r, z) = -p + \omega \frac{\mu \alpha_t (1+\nu) R}{\pi \lambda (1-\nu) N} \sum_{n=1}^N [R_n F_n(r, z)], \quad (2)$$

$$\text{де } F_n(r, z) = \frac{K \left(4rR_n / (D_n^-)^2 \right)}{D_n^-} + \frac{K \left(4rR_n / (D_n^+)^2 \right)}{D_n^+} - \frac{(z-d)^2 E \left(4rR_n / (D_n^-)^2 \right)}{\left((r-R_n)^2 + (z-d)^2 \right) D_n^-} - \frac{(z+d)^2 E \left(4rR_n / (D_n^+)^2 \right)}{\left((r-R_n)^2 + (z+d)^2 \right) D_n^+}, \quad D_n^\pm(r, z) = \sqrt{(r \pm R_n)^2 + (z \pm d)^2};$$

ν – коефіцієнт Пуассона; μ – модуль зсуву; α_t – коефіцієнт лінійного теплового розширення; $K(m) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1-m(\cos x)^2}}$ та $E(m) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-m(\sin x)^2} dx$ – повні еліптичні інтеграли I і II роду, відповідно.

Для обчислення ввели безрозмірні величини:

$$\bar{d} = \frac{d}{R}, \quad \bar{r} = \frac{r}{R}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega \alpha_t (1+\nu) R}{\lambda}, \quad \bar{p} = \frac{p(1-\nu)}{\mu}, \quad \bar{\sigma}_{zz}^0 = \frac{\sigma_{zz}^0 (1-\nu)}{\mu}. \quad (3)$$

Рис. 2 ілюструє загасання контактних напружень за повного налягання поверхонь тіл для різної інтенсивності стоку тепла $\bar{\omega}$ та $\bar{p} = 0,01$, $\bar{d} = 0,2$ і $N = 6$ (тут штрихова лінія – сталі напруження $\bar{\sigma}_{zz}^0(\bar{r}, 0) = -0,01$ за відсутності стоку тепла ($\bar{\omega} = 0$)). Напруження $\bar{\sigma}_{zz}^0(\bar{r}, 0)$ досягають максимумів у точці $\bar{r} = 0$. Зі збільшенням інтенсивності стоку вони зростають. За перших трьох її значень контактні напруження задовольняють умову (1). Коли ж діють стоки з інтенсивністю $\bar{\omega} = 0,0055$ і $0,006$, то ці напруження набувають додатних значень у деякому околі початку координат, тобто умова (1) порушується. Це свідчить про розшарування поверхонь тіл.

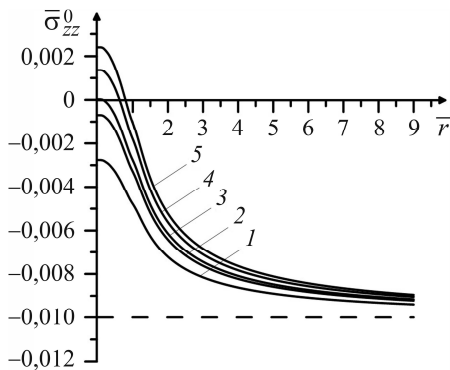


Рис. 2. Контактні нормальні напруження під час повного контакту півпростору та основи за різної інтенсивності кругового стоку тепла $\bar{\omega}$: 1 – 0,0035; 2 – 0,0045; 3 – 0,00485; 4 – 0,0055; 5 – 0,006.

Fig. 2. Normal contact stresses for the complete contact of the half-space and the base for different intensity of the circular heat sink $\bar{\omega}$: 1 – 0.0035; 2 – 0.0045; 3 – 0.00485; 4 – 0.0055; 5 – 0.006.

Задовольнивши за допомогою подання (2) умову $\sigma_{zz}^{(0)}(0,0) = 0$, отримаємо рівняння, з якого визначаємо критичну інтенсивність стоку ω_{cr} . Коли $\omega > \omega_{cr}$, то поверхня півпростору відриватиметься від основи.

Формулювання задачі про розшарування. Проаналізуємо розшарування півпростору і жорсткої основи по колу радіусом a (рис. 1b) за дії потоків тепла, інтенсивність яких перевищує критичне значення ($\omega > \omega_{cr}$).

Контактно-крайові умови цієї задачі матимуть вигляд на ділянці контакту ($z = 0, a < r < \infty$):

$$q_z = 0; \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0; \quad u_z(r, 0) = 0; \quad (4)$$

на ділянці зазору ($z = 0, 0 < r < a$):

$$q_z = 0; \quad \sigma_{rz}(r, 0) = 0; \quad \sigma_{zz}(r, 0) = 0; \quad (5)$$

на нескінченності ($z = \infty, r \in (0; \infty)$): $T = 0, \sigma_{rz} = 0; \sigma_{zz} = -p$.

Радіус розшарування a заздалегідь невідомий. Його визначаємо з умови рівності нулю контактних напружень на контурі зазору:

$$\sigma_{zz}(a, 0) = 0. \quad (6)$$

Методика розв'язування задачі про розшарування. Розв'язок задачі про розшарування між півпростором і основою подаємо як суму розв'язків задач про повний контакт тіл і про збурення, зумовлене міжконтактним зазором, яке позначимо верхнім індексом (1): $\sigma_{zz} = \sigma_{zz}^{(0)} + \sigma_{zz}^{(1)}, u_z = u_z^{(0)} + u_z^{(1)}$.

Для визначення поля локальних збурень використовуємо інтегральне подання компонент вектора переміщень і тензора напружень для півпростору з вільною від дотичних напружень межею [20]:

$$u_z^{(1)}(r, z) = \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2(1-\nu)} z\xi + 1 \right] \xi B(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) d\xi; \quad (7)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)}(r, z) = \frac{\mu}{1-\nu} \int_0^\infty \left[(-z\xi + 1) \xi^2 B(\xi) e^{-\xi z} J_0(\xi r) \right] d\xi, \quad (8)$$

де $B(\xi)$ – невідома функція. Задовольнивши з допомогою подань (7), (8) крайові умови (4) та (5), для функції $B(\xi)$ отримуємо парні інтегральні рівняння:

$$\int_0^\infty \xi B(\xi) J_0(\xi r) d\xi = 0, \quad a < r < \infty; \quad (9)$$

$$\int_0^\infty \xi^2 B(\xi) J_0(\xi r) d\xi = \frac{(1-\nu)p}{\mu} - \frac{\omega \alpha_t (1+\nu) R}{\pi \lambda N} \sum_{n=1}^N [R_n F_n(r, 0)], \quad 0 < r < a. \quad (10)$$

Для їх розв'язування застосуємо метод підставлянь, згідно з яким функція

$$B(\xi) = \frac{1}{\xi} \int_0^a \varphi(t) \sin(\xi t) dt. \quad (11)$$

Функція (11) задовольняє рівняння (9) тотожно. Підставляючи її в рівняння (10), дістанемо для $\varphi(r)$ інтегральне рівняння Абеля:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \int_0^r \frac{t \varphi(t) dt}{\sqrt{r^2 - t^2}} = \frac{1-\nu}{\mu} p - \omega \frac{\alpha_t (1+\nu) R}{\pi \lambda N} \sum_{n=1}^N [R_n F_n(r, 0)]. \quad (12)$$

Застосувавши до рівняння (12) формулу обернення [21], знаходимо:

$$\varphi(r) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1-\nu}{\mu} pr - \omega \frac{\alpha_t(1+\nu)R}{\pi\lambda N} \sum_{n=1}^N \left[R_n \int_0^r \frac{tF_n(t,0)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \right] \right). \quad (13)$$

Враховуючи вираз (13) у рівняннях (9), (10), відшукаємо висоту зазору між тілами $h(r)$ та контактні нормальні напруження $\sigma_{zz}(r,0)$ ззовні зазору:

$$h(r) = \int_r^a \frac{\varphi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, \quad 0 < r < a, \quad (14)$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = -p + \frac{\omega\mu\alpha_t(1+\nu)R}{\pi\lambda(1-\nu)N} \sum_{n=1}^N [R_n F_n(r,0)] - \frac{\mu}{(1-\nu)r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \int_0^r \frac{t\varphi(t)dt}{\sqrt{r^2-t^2}} \right), \quad a < r < \infty. \quad (15)$$

$$\text{Об'єм зазору } V = 2\pi \int_0^a rh(r)dr.$$

Інтеграли у формулах (13)–(15), як і в праці [16], визначаємо, апроксимуючи функцію $F_n(t,0)$ скінченним степеневим рядом за парними степенями аргументу t .

Рівняння для розрахунку радіуса зазору a отримаємо, задовольнивши за допомогою подання (15) умову (6).

Числові результати. Обчислювали, використовуючи безрозмірні величини (3) та $\bar{a} = a/R$, $\bar{h} = h/R$, $\bar{V} = V/R^3$ за фіксованого значення заданого на нескінченності тиску $\bar{p} = 0,001$.

Відносний радіус зазору $\bar{a}$ монотонно спадає з віддаленням стоку від поверхні півпростору (рис. 3a), причому залежність $\bar{a}$ від $\bar{d}$ нелінійна. Максимальна висота зазору $\bar{h}(0)$ (рис. 3b) та його об'єм $\bar{V}$ (рис. 3c) зі заглибленням стоку в півпростір синхронно зменшуються.

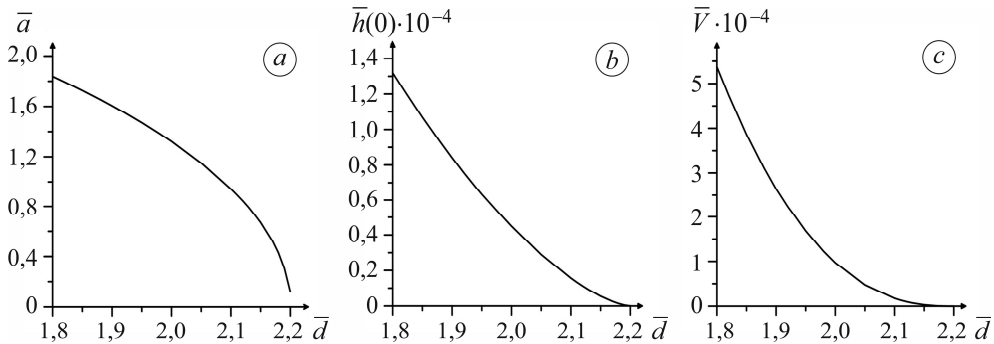


Рис. 3. Залежність радіуса зазору $\bar{a}$ (a), максимальної його висоти $\bar{h}(0)$ (b) та об'єму $\bar{V}$ (c) від відстані від стоку тепла до поверхні півпростору $\bar{d}$ для інтенсивності стоку тепла $\bar{\omega} = 1,205 \cdot 10^{-3}$.

Fig. 3. Dependence of the gap radius $\bar{a}$ (a), the maximum height of the gap $\bar{h}(0)$ (b) and the gap volume $\bar{V}$ (c) on the distance from the heat sink to the half-space surface $\bar{d}$ for the heat sink intensity $\bar{\omega} = 1.205 \cdot 10^{-3}$.

Форму зазору $\bar{h}(\bar{r})$ та розподіл контактних напружень $\bar{\sigma}_{zz}(\bar{r}, 0)$ для різної інтенсивності стоку тепла $\bar{\omega}$ та за фіксованої відстані від стоку до поверхні півпростору $\bar{d}=1$ зображено на рис. 4. Зі збільшенням інтенсивності стоку і висота, і радіус зазору зростають (рис. 4a). На ділянці зазору напруження $\bar{\sigma}_{zz}(\bar{r}, 0)$ (рис. 4b) дорівнюють нулю (горизонтальні лінії на ділянках $0 < \bar{r} < \bar{a}$), а з віддаленням від нього монотонно спадають, асимптотично прямуючи до значення заданих на нескінченності стискальних напружень $\bar{\sigma}_{zz} = -\bar{p}$. Що більший зазор, то менший модуль контактних напружень.

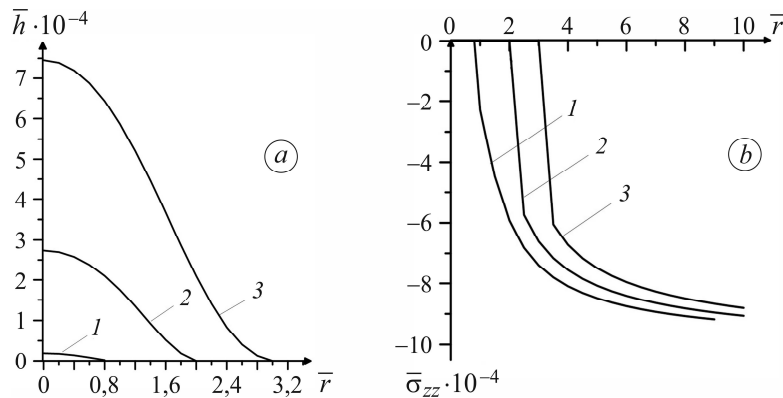


Рис. 4. Висота зазору $\bar{h}(\bar{r})$ (a) та розподіл нормальних контактних напружень $\bar{\sigma}_{zz}$ (b) для різної інтенсивності стоку тепла $\bar{\omega}$:

1 – $0,1884 \cdot 10^{-4}$ ($\bar{a} = 0,8$); 2 – $0,9295 \cdot 10^{-3}$ ($\bar{a} = 2$); 3 – $1,171 \cdot 10^{-3}$ ($\bar{a} = 3$).

Fig. 4. The gap height $\bar{h}(\bar{r})$ (a) and the distribution of normal contact stresses $\bar{\sigma}_{zz}$ (b) for different intensity of the heat sink $\bar{\omega}$:

1 – $0,1884 \cdot 10^{-4}$ ($\bar{a} = 0,8$); 2 – $0,9295 \cdot 10^{-3}$ ($\bar{a} = 2$); 3 – $1,171 \cdot 10^{-3}$ ($\bar{a} = 3$).

ВИСНОВКИ

Розглянуто задачу термопружності про взаємодію пружного півпростору і жорсткої термоізолюваної основи з урахуванням кругового зазору між ними. Локальне порушення контакту спричинене стоком тепла, розподіленим по колу, що розташований на певній відстані від поверхні півпростору. Задачу зведено до парних інтегральних рівнянь, які трансформовано в інтегральне рівняння Абеля. Радіус зазору визначено з умови рівності нулю контактних напружень на його контурі. Проаналізовано залежності радіуса, об'єму, форми зазору та нормальних контактних напружень від інтенсивності стоку тепла та відстані від нього до поверхні півпростору. Виявлено, що висота і радіус зазору зростають зі збільшенням інтенсивності стоку тепла. Нормальні контактні напруження ззовні зазору за віддалення від нього монотонно спадають до напружень, прикладених на нескінченності.

1. Keer L. M., Dundurs J., and Tsai K. C. Problems involving a receding contact between a layer and a half space // J. Appl. Mech. – 1972. – **39**, № 4. – P. 1115–1120.
2. Civelek M. and Erdogan F. The axisymmetric double contact problem for a frictionless elastic layer // Int. J. Solids Struct. – 1974. – **10**, № 6. – P. 639–659.
3. Selvadurai A. P. S. On an invariance principle for unilateral contact at a bimaterial elastic interface // Int. J. Eng. Sci. – 2003. – **41**, № 7. – P. 721–739.
4. Lopes J. P. and Hills D. A. The axisymmetric frictional receding contact of a layer pressed against a half-space by a point force // Int. J. Solids Struct. – 2019. – **171**. – P. 47–53.

5. *Parel K. S.* Plane frictional receding contact of a thin layer pressed onto a substrate by finite pressure distributions // *Eur. J. Mechanics-A/Solids*. – 2021. – **90**. – Article number 104309. DOI: 10.1016/j.euromechsol.2021.104309
6. *Kipnis O. L.* Receding contact of two elastic strips on semi-infinite interval // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – **60**. – P. 163–170.
7. *Ostryk V. I.* Pressing semi-infinite punch into elastic strip under its separation from rigid base // *Int. Appl. Mech.* – 2024. – **60**. – P. 356–369.
8. *Yan J. and Mi C.* On the receding contact between an inhomogeneously coated elastic layer and a homogeneous half-plane // *Mech. Mater.* – 2017. – **112**. – P. 18–27.
9. *Hematiyan M. R., Mohammadi M., and Aliabadi M. H.* Boundary element analysis of two and three-dimensional thermo-elastic problems with various concentrated heat sink // *J. Strain Anal. Eng.* – 2011. – **46**, № 3. – P. 227–242.
10. *Kit H. S. and Andriychuk R. M.* Thermoelastic state of a half space with fixed boundary under the conditions of heat generation in a circular domain parallel to the boundary // *Materials Science*. – 2017. – **53**, № 3. – P. 398–406.
11. *Kit H. S. and Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**. – P. 561–577.
12. *Stationary theory of heat-conductivity for an axi-symmetrical piece homogeneous space with circular inclusion* / S. M. Mkhitarian, L. A. Shekhan, S. V. Verlinski, D. Aidun, and P. Marzocca // *J. Thermal Stresses*. – 2012. – **35**, № 5. – P. 424–447.
13. *Mohammadi M., Hematiyan M. R., and Khosravifard A.* Analysis of two- and three-dimensional steady-state thermo-mechanical problems including curved line/surface heat sources using the method of fundamental solutions // *Eur. J. Comput. Mech.* – 2019. – **28**, № 1–2. – P. 51–80.
14. *Wang X. and Sudak L.* 3D Green's functions for a steady point heat source interacting with a homogeneous imperfect interface // *J. Mech. Mater. Struct.* – 2006. – **1**, № 7. – P. 1269–1280.
15. *Peng-Fei Hou, Hai-Yang Jiang, and Qiu-Hua Li.* Three-dimensional steady-state general solution for isotropic thermoelastic materials with applications I: general solutions // *J. Thermal Stresses*. – 2013. – **36**, № 7. – P. 727–747.
16. *Serednyts'ka K. I., Mykytyn M. M., and Martynyak R. M.* Breaking of contact between an elastic half space and a rigid base in a circular region under the action of a circular heat sink // *Materials Science*. – 2019. – **55**, № 3. – P. 320–326.
17. *Микитин М. М., Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Трансформація кільцевого зазору між півпростором і жорсткою основою під дією розподілених по колу потоків тепла // *Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій*. – 2021. – Вип. 33. – С. 126–136.
18. *Krishtafovich A. A. and Martynyak R. M.* Lamination of anisotropic half-spaces in the presence of contact thermal resistance // *Int. Appl. Mech.* – 1999. – **35**. – P. 159–164.
19. *Martynyak R. M. and Chumak K. A.* Thermoelastic delamination of bodies in the presence of a heat-conducting filler of the intercontact gap // *Materials Science*. – 2009. – **45**, № 4. – P. 513–522.
20. *Kim G. S., Монастирський Б. Є.* Контактна задача для півпростору та жорсткої основи з осесиметричною виїмкою // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 1998. – **41**, № 4. – С. 7–11.
21. *Курант Р.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – Т. 2. – 672 с.

Одержано 04.10.2024