

О.П.Кривенко, П.П.Лізунов,
Ю.В.Ворона, О.Б.Калашніков

**МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ,
ВТРАТИ СТІЙКОСТІ ТА КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК
НЕОДНОРІДНОЇ СТРУКТУРИ**

*Київський національний університет будівництва і архітектури;
просп. Повітряних сил, 31, 03037, Київ, Україна; e-mail: olakor@ukr.net*

Abstract. The fundamentals of the methodology for studying the processes of nonlinear deformation, stability loss, and natural vibrations of thin elastic shells under thermo-mechanical loading are outlined. The shells may have a complex shape of the middle surface, a smoothly variable and stepwise variable thickness, holes, and multilayer material structure. This method is based on the geometrically nonlinear relations of the three-dimensional theory of thermoelasticity, using the moment finite-element scheme and the developed universal 3D finite element. Modeling the behavior of shells with different thickness features is possible within the framework of the same universal finite element. The modal characteristics of the shell are determined taking into account the prestressed deformed state. The reliability of the proposed approach is illustrated and confirmed.

Key words: inhomogeneous shell, buckling, natural vibrations, thermo-mechanical load, universal 3D finite element, moment finite-element scheme.

Вступ.

Оболонкові конструкції мають практично невичерпне різноманіття геометричних форм. Це пов'язано з вимогами забезпечення їхньої міцності та надійності, архітектурними рішеннями, економічними факторами, технологічними потребами. Вони можуть поєднувати у собі різні конструктивні неоднорідності: ребра та накладки, підкріплені та непідкріплені отвори, виїмки, канали, місцеві потовщення та стоншення, злами серединної поверхні, багат шарову структуру матеріалу та інші особливості, а також мати складну форму серединної поверхні, яка не описується простими аналітичними виразами. При експлуатації конструкції можуть знаходитись у складних умовах дії навантажень різної природи, у тому числі механічних і температурних.

Дослідження різних аспектів поведінки оболонок мають глибоку історію та далекі від свого повного завершення. Задачі стійкості тонких пружних оболонок продовжують привертати підвищену увагу [9, 20, 21, 24, 25, 27 – 29, 31 – 34]. Розвиток техніки привів до використання у оболонках більш міцних матеріалів, зменшення товщини та ускладнення геометричних форм самих оболонок. У той же час удосконалення математичної теорії та обчислювальної техніки дало змогу уточнити результати, що були знайдені раніше за теорією пологих оболонок. При цьому виявилось, що експерименти та чисельні обчислення не збігаються. Але більшість цих протиріч з новими експериментами можна усунути в рамках використання нелінійної тривимірної теорії термопружності. Такий тривимірний підхід є сучасним і надає можливість створювати уточнені моделі розрахунку на базі використання просторових скінченних елементів [2 – 4, 16, 19, 20, 22, 33, 35].

Серед питань динаміки, що також піддаються інтенсивному вивченню в останні роки, важливе місце займає проблема визначення власних частот і форм коливань оболонок, оскільки ці параметри є однією з головних динамічних характеристик будь-якої пружної системи. Власні коливання оболонок без урахування початкових сил і зсувів були досліджені в багатьох роботах. Відомо, що наявність механічних статичних навантажень суттєво впливає на частоти і моди коливань [1, 7, 9, 19, 23, 26, 30]. Питання впливу температурних полів на коливання оболонки досліджені набагато менше [4, 10, 18, 19, 31]. При цьому відомо, що цей вплив є помітнішим при наявності напружень, які викликані додатковою дією механічних навантажень [18]. Найчутливішими до дії статичних навантажень є тонкостінні конструкції.

Робота присвячена питанням поширення розробленого методу дослідження геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки неоднорідних оболонок [2, 3, 20] на задачі власних коливань з урахуванням переднапруженого стану, коли модальні характеристики оболонки обчислюються на кожному кроці термомеханічного навантаження [1, 4, 19]. Наведено приклади задач, що демонструють ефективність розробленого методу.

1. Постановка задачі.

Розглянемо тонкі пружні оболонки, що одночасно можуть мати складну форму серединної поверхні, гладко- і східчасто-змінну товщину, гранованість, неоднорідні умови закріплення контуру, багатошарову структуру матеріалу та знаходитись під дією статичного неоднорідного термомеханічного навантаження. У подальшому такі оболонки будемо називати: неоднорідними оболонками, оболонками неоднорідної структури, оболонками неоднорідної жорсткості, оболонками складної геометрії та оболонками зі змінними за товщиною параметрами.

Обшивка оболонки і ребра, що її підкріплюють, можуть складатися з довільної заданої кількості шарів m , що з'єднані між собою в єдиний пакет і деформуються спільно без проковзування та відриву по поверхнях контактів, де виконується вимога рівності компонент вектора переміщень. Під обшивкою розуміється тіло оболонки без геометричних особливостей за товщиною. Кожен шар оболонки може мати різні товщини, матеріал шарів може бути різним, у загальному випадку анізотропним. При реалізації методики моделювання анізотропних властивостей неоднорідного матеріалу оболонки виконується з використанням у шарах ізотропної, трансверсально-ізотропної та ортотропної симетрії [2, 3]. На рис. 1 наведено приклад фрагмента скінченно-елементної моделі оболонки (СЕМО), яка має неоднорідну структуру, та пояснено методику моделювання ділянок оболонки східчасто-змінної товщини за допомогою універсального тривимірного скінченного елемента. На рисунку введені такі позначення: 1 – ділянки оболонки східчасто-змінної товщини, 2 – обшивка сталої товщини, 3 – виїмка, 4 – накладка, 5 – шари матеріалу, 6 – верхнє та нижнє ребра, 7 – отвір, 8 – обшивка лінійно-змінної товщини. Пояснення інших позначень надано нижче.

Дослідження процесів геометрично нелінійного деформування оболонки базується на загальній лагранжевій постановці варіаційної задачі у приростах [14, 15]. У цьому разі траєкторія зміни векторів деформацій та напружень будується на основі компонентів приростів скінченних деформацій і напружень у базисі лагранжової (відлікової) системи координат. Задача полягає у знаходженні нового напружено-деформованого стану (НДС) від дії крокових приростів механічних і температурних полів. Таким чином, у розглядуваних конфігураціях навантаження НДС оболонки є відомим, а процес деформування подається як послідовність рівноважних станів. Такий підхід дозволяє ще на початку побудови методики виконати дискретизацію континуальної оболонки, застосувавши метод скінченних елементів.

Для опису НДС оболонки використовуються дві системи координат: фіксована глобальна декартова $x^{k'}$ та місцева криволінійна x^i . Звичайно, вибір декартової системи як глобальної визначений тим, що її використання полегшує задавання вихідних даних, спрощується виведення розв'язувальних рівнянь та розробка алгоритмів і програм тощо. Вибір місцевої системи координат безпосередньо пов'язаний з побудовою СЕМО.

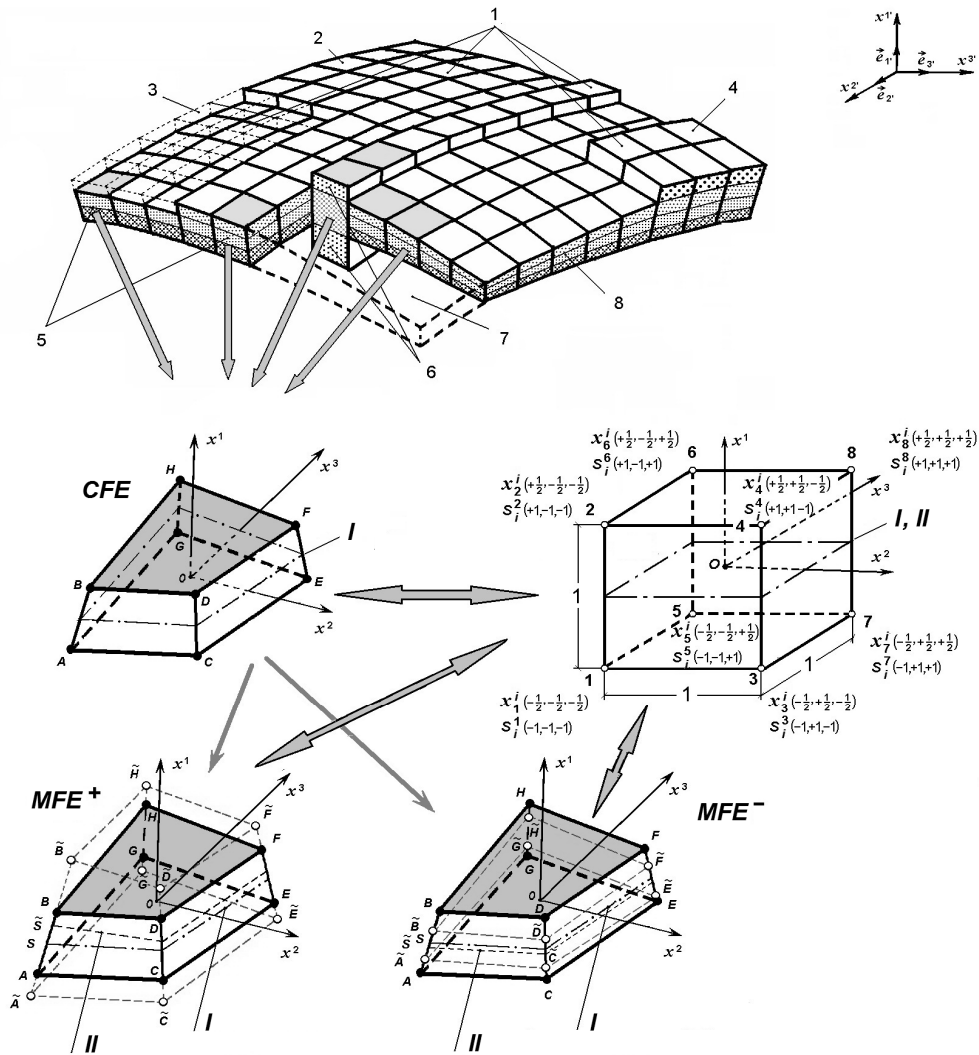


Рис. 1

Розв'язувальні рівняння отримуються у тензорній формі на основі співвідношень теорії термопружності [6, 12]. Використовується модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля – Неймана при великих переміщеннях і малих деформаціях [2, 3, 12, 15, 20]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C^{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^T \right) = C^{ijkl} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} T) = \bar{\sigma}^{ij} - \sigma^T{}^{ij}; \quad (1)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(C_j^{k'} \partial u^{k'} / \partial x^i + C_i^{k'} \partial u^{k'} / \partial x^j \right) + \frac{1}{2} \partial u^{k'} / \partial x^i \cdot \partial u^{k'} / \partial x^j, \quad (2)$$

де ε_{kl}^e – тензор пружних деформацій, які пов'язані з появою внутрішніх напружень σ^{ij} ; ε_{kl}^T – тензор температурних деформацій, обумовлених зміною температури тіла на величину T відносно початкової температури T_0 ; ε_{kl} – тензор скінченних (повних) деформацій Коші – Гріна; $\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}$ – напруження, що залежать від повних деформацій

цій; $\sigma^{ij} = C^{ijkl} \alpha_{kl} T$ – напруження, що залежать від температурних деформацій; C^{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей; α_{kl} – компоненти тензора коефіцієнтів термічного розширення; $C_i^{k'} = \partial x^{k'} / \partial x^i$ – компоненти тензора перетворення координат; $u^{k'}$ – переміщення в декартовій системі координат.

Для тонких оболонок характерним є лінійний розподіл переміщень вздовж товщини [13]. Тому за достатню прийнята апроксимація оболонки за товщиною одним просторовим скінченним елементом (СЕ) (рис. 1). Тобто, застосовується так звана одношарова за товщиною апроксимація оболонки СЕ. Використовується тривимірний «стандартний» ізопараметричний 8-ми вузловий СЕ з полілінійними функціями форми, який є класичним просторовим елементом обшивки.

Прийнятий для просторового СЕ лінійний розподіл координат і переміщень вздовж товщини відповідає неklasичній кінематичній гіпотезі деформівної прямої, що застосовується у роботі. За цією гіпотезою пряма, яка у напрямку товщини оболонки є прямою до деформування, залишається прямою і після деформування, скорочуючись або подовжуючись при цьому. Ця пряма не обов'язково є нормаллю до серединної поверхні оболонки. Вона напрямлена вздовж осі x^1 місцевої системи координат скінченно-елементної моделі оболонки.

Для врахування особливостей НДС неоднорідної оболонки крім неklasичної кінематичної гіпотези застосовується статична гіпотеза щодо напружень обтиснення волокон шарів оболонки за її товщиною [2, 3, 15, 20]. Напруження σ_n^{11} прийняті сталими вздовж товщини n -го шару

$$\partial \sigma_n^{11} / \partial x^1 = 0. \quad (3)$$

Прийнята статична гіпотеза (3) не позбавляє напружений стан неоднорідної оболонки тривимірних властивостей, але потребує коригування закону (1). Для цього компоненти напружень σ_n^{ij} подаються як лінійні функції від координати x^1

$$\sigma_n^{ij}(x^p) = \sigma_n^{ij}(x^\eta) + \sigma_n^{ij}(x^\eta)(x^1 - x_{O_n}^1) \quad (p = 1, 2, 3; \eta = 2, 3), \quad (4)$$

де $x_{O_n}^1$ – місцева координата x^1 серединної поверхні шару n ;

$$\sigma_n^{ij}(x^\eta) = \left(\sigma_n^{ij}(x^p) \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1} = C_n^{ijkl} \varepsilon_n^0{}_{kl}(x^\eta); \quad \sigma_n^{ij}(x^\eta) = \left(\frac{\partial \sigma_n^{ij}(x^p)}{\partial x^1} \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1} = C_n^{ijkl} \varepsilon_n^1{}_{kl}(x^\eta);$$

$$\varepsilon_n^0{}_{kl}(x^\eta) = \left(\varepsilon_n^{}_{kl}(x^p) \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1}; \quad \varepsilon_n^1{}_{kl}(x^\eta) = \left(\frac{\partial \varepsilon_n^{}_{kl}(x^p)}{\partial x^1} \right) \Big|_{x^1=x_{O_n}^1},$$

$C_n^{ijkl} = \text{const}$ за об'ємом n -го шару СЕ.

З урахуванням подання (4) узагальнений закон Дюамеля – Неймана (1) для шару набуває вигляду

$$\sigma_n^{ij}(x^p) = C_n^{ijkl} \varepsilon_n^0{}_{kl}(x^\eta) + B_n^{ijkl} \varepsilon_n^1{}_{kl}(x^\eta)(x^1 - x_{O_n}^1); \quad B_n^{ijkl} = C_n^{ijkl} - \frac{C_n^{ij11} C_n^{11kl}}{C_n^{1111}}. \quad (5)$$

Прийняті лінійні апроксимації координат і переміщень вздовж товщини скінченного елемента оболонки дають можливість розповсюдити методику розрахунку гладкої оболонки на оболонки з наведеними вище геометричними особливостями. Для цього в характеристики просторового «стандартного» СЕ вводяться додаткові змінні параметри. Перший тип параметрів є топологічним. Він задає ознаку необхідності перетворення СЕ обшивки (СЕО) у СЕ модифікований (СЕМ) зі зміненими геометричними параметрами (рис. 1). На рис. 1 СЕО має позначення «CFE» (the casing finite element), СЕМ має позначення «MFE» (the modified finite element). Другий змінний параметр (геометричний) призначений для збільшення або зменшення розмірів СЕ у напрямку товщини, третій – для зсуву його серединної поверхні за товщиною. Для реалізації цих процедур використовується наданий у роботах [2, 3] спосіб лінійного перетворення координат вузлів просторового СЕ в напрямку товщини оболонки. На рис. 1 цим діям відповідає перетворення ребра AB , що належить СЕО, в ребро $\tilde{A}\tilde{B}$ зміненого розміру і зі зсувом його на $S\tilde{S}$ для СЕМ. Таким чином, на ділянках оболонки зі східчато-збільшеною товщиною СЕО трансформується в $СЕМ^+$ для моделювання ребер і накладок, а на ділянках зі східчато-зменшеною товщиною (з каналами, виймками) – в $СЕМ^-$. На рис. 1 введено такі додаткові позначення: $\bullet$ та I – вузли та серединна поверхня СЕО, відповідно; $\circ$ та II – вузли та серединна поверхня СЕМ.

Отже, єдиний універсальний скінченний елемент у рамках лінійних апроксимацій може описувати геометрію різних ділянок оболонки (обшивка, ребра, канали та інше). Введені додаткові параметри надають можливість виконувати опис кінематичних властивостей та НДС східчато-змінних ділянок оболонки за допомогою одних і тих самих співвідношень на основі єдиного тривимірного СЕ. При такому підході зберігається неперервність функцій координат і переміщень на криволінійних поверхнях прилягання суміжних елементів.

Подання оболонок з позицій тривимірної теорії термопружності та відмова від використання класичних гіпотез теорії оболонок щодо геометрії та НДС дало можливість на базі універсального просторового СЕ з додатковими змінними параметрами створити єдину розрахункову модель, що враховує геометричні особливості конструктивних елементів і неоднорідності матеріалу оболонки. Прийнятий уніфікований підхід дав змогу досліджувати деформування оболонкових конструкцій різних класів у рамках єдиної методології, значно розширивши коло об'єктів вивчення.

При розробці методу застосовано моментну схему скінченних елементів (МССЕ), основи якої були розроблені у роботах О.С. Сахарова [15]. МССЕ була поширена на задачі деформування багатошарових оболонок при термомеханічних навантаженнях [2, 3, 20]. Згідно з процедурою МССЕ для ізопараметричного СЕ з полілінійними функціями форми функції повних деформацій подаються в межах елемента як відрізки рядів Маклорена в центрі СЕ, визначаючи цим компоненти ε_{ij} як лінійні функції від місцевих координат x^i

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0f} \omega_{(ij)}^{(ff)} x^f + \varepsilon_{ij}^{0fh} \delta_{(i)}^{(j)} \omega_{(ffh)}^{(hii)} x^f x^h, \quad (6)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = (\varepsilon_{ij})|_{(0)}; \quad \varepsilon_{ij}^{0f} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^f} \right) \Big|_{(0)}; \quad \varepsilon_{ij}^{0fh} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x^f \partial x^h} \right) \Big|_{(0)};$$

$$\omega_{ff...}^{hi...} = \omega_f^h \omega_f^i \omega_f^{...}; \quad \omega_f^h = \begin{cases} 0, & \text{при } f = h \\ 1, & \text{при } f \neq h \end{cases}.$$

Оскільки розглядається температурний процес, що встановився, температурне поле T за об'ємом оболонки вважається відомою та незалежною від НДС функцією координат, яка визначається значеннями температури T_n у вузлових точках шару. При

цьому розподіл температури в СЕ за товщиною пакета приймається у вигляді ламаної, а в площині шарів – лінійним. Відповідно до цього температурні деформації, які залежать як від температури, так і від властивостей матеріалу шару, визначаються в межах СЕ як лінійні функції координат x^2, x^3 і, на відміну від функцій ε_{ij} (6), як кусково-лінійні за координатою x^1 . Вони подаються у межах n -го шару як відрізок ряду Тейлора в околі його центру точки O_n з координатами $x_{O_n}^1 = d_n, x_{O_n}^2 = x_{O_n}^3 = 0$:

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}^{0p}(x^p - x_{O_n}^p)\omega_{(ij)}^{(pp)} + \varepsilon_{ij}^{0ph}(x^p - x_{O_n}^p)(x^h - x_{O_n}^h)\delta_{(i)}^{(j)}\omega_{(pph)}^{(hii)}, \quad (7)$$

де

$$\varepsilon_{ij}^0 = \left(\varepsilon_{ij}^T \right)_{(O_n)}; \quad \varepsilon_{ij}^{0p} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^p} \right)_{(O_n)}; \quad \varepsilon_{ij}^{0ph} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^p \partial x^h} \right)_{(O_n)}.$$

Функції напружень $\bar{\sigma}^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}$ та $\sigma_T^{ij} = C^{ijkl}\alpha_{kl}T$ (1) у відповідності до (6) і (7) подаються у вигляді лінійних частин рядів Тейлора за місцевими координатами в околі центру n -го шару СЕ.

Зазвичай для тривимірного СЕ як шукані невідомі використовуються переміщення вузлів на його обмежувальних поверхнях $u_{s_1s_2s_3}^{k'}$ в декартовій системі координат. Для тонких оболонок доцільніше за розв'язувальні функції приймати переміщення $v_{s_2s_3}^{k'}$ у вузлах серединної поверхні СЕ та різницю переміщень $v_{s_2s_3}^{k'}$ у вузлах на обмежувальних поверхнях (узагальнені вузлові повороти ребер СЕ):

$$v_{s_2s_3}^{k'} = \frac{u_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} + u_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}}{2}; \quad v_{s_2s_3}^{k'} = u_{s_1=+1s_2s_3}^{k'} - u_{s_1=-1s_2s_3}^{k'}. \quad (8)$$

Введену в такий спосіб заміну $u_{s_1s_2s_3}^{k'} = v_{s_2s_3}^{k'} + \frac{s_1}{2}v_{s_2s_3}^{k'}$ можна інтерпретувати, як перехід від 8-ми вузлового тривимірного СЕ (з трьома переміщеннями у вузлах $u_{s_1s_2s_3}^{k'}$) до 4-х вузлового оболонкового СЕ з шістьма узагальненими переміщеннями вузлів $v_{s_2s_3}^{k'}, v_{s_2s_3}^{k'}$, які віднесені до серединної поверхні елемента.

Застосовані апроксимації параметрів НДС для СЕ (функцій координат, переміщень, деформацій, напружень) дали змогу після інтегрування записати в явному вигляді матриці реакцій, жорсткості, геометричної жорсткості, еквівалентних температурних навантажень. Одержані для просторового СЕ співвідношення є універсальними, оскільки вони отримані в місцевій системі координат для загального (єдиного) СЕ та є інваріантними відносно вузлових координат і переміщень, кількості шарів, технічних сталих матеріалів шарів (рис. 1). Отже, співвідношення для відповідних матриць, що отримані для СЕ на ділянках обшивки (тобто для СЕО) і східчасто-змінної товщини (для СЕМ), є однаковими за формою подання і різними за суттю. Необхідно враховувати, що при отримуванні матриць для універсального СЕ за поверхні відліку прийнято його серединну поверхню. Тому відповідні узагальнені вузлові переміщення $v_{s_2s_3}^{k'}, v_{s_2s_3}^{k'}$ на різних ділянках оболонки розуміються як різні змінні, що віднесені до серединної поверхні свого СЕ (СЕО чи СЕМ). При формуванні системи розв'язувальних рівнянь СЕМО для узгодження цих різних змінних за єдину поверхню відліку приймається серединна поверхня обшивки оболонки і виконується корегування відповідних коефіцієнтів матриць. Оскільки просторовий СЕ є ізопараметричним з полілінійними функціями форми, перехід від узагальнених вузлових переміщень СЕМ на ділянках східчасто-змінної товщини (їх будемо позначати значком «тильда»

$\tilde{v}_{s_2s_3}^{k'}, \tilde{r}_{s_2s_3}^{k'}$) до узагальнених вузлових переміщень CEO $v_{s_2s_3}^{k'}, r_{s_2s_3}^{k'}$, що віднесені до поверхні відліку, виконується за формулами, які є ідентичними формулам перетворення вузлових координат CEO в координати СЕМ:

$$\tilde{v}_{s_2 s_3}^{i'} = v_{s_2 s_3}^{i'} + a_{s_2 s_3} v_{s_2 s_3}^{i'}; \quad \tilde{v}_{s_2 s_3}^{i'} = b_{s_2 s_3} v_{s_2 s_3}^{i'}; \quad \tilde{u}_{s_1 s_2 s_3}^{i'} = \tilde{v}_{s_2 s_3}^{i'} + \frac{S_1}{\gamma} \tilde{v}_{s_2 s_3}^{i'},$$

де $b_{s_2s_3}$ – коефіцієнт зміни довжини ребра СЕ в напрямку товщини (другий додатковий параметр універсального СЕ); $a_{s_2s_3}$ – відношення величини зміщення за товщиною ребра СЕ до його довжини (третій додатковий параметр СЕ).

Задача геометрично нелінійного деформування та втрати стійкості пружної оболонки розв'язується інкрементальним (кроковим) методом. Згідно з цим підходом кожному кроку відповідає прирощення (додатне або від'ємне) параметра зовнішніх навантажень P . Розв'язком статичної нелінійної задачі стійкості є знайдений зв'язок параметра зовнішніх навантажень P з полем переміщень скінченно-елементної моделі оболонки U , яке визначається на кожному кроці приросту узагальненого навантаження ΔP . Цей зв'язок зазвичай характеризується діаграмами «навантаження P – прогин U » (« $P-U$ ») характерної точки оболонки (рис. 2, крива І). Ця крива відображає поведінку оболонки в процесах нелінійного деформування та втрати стійкості.

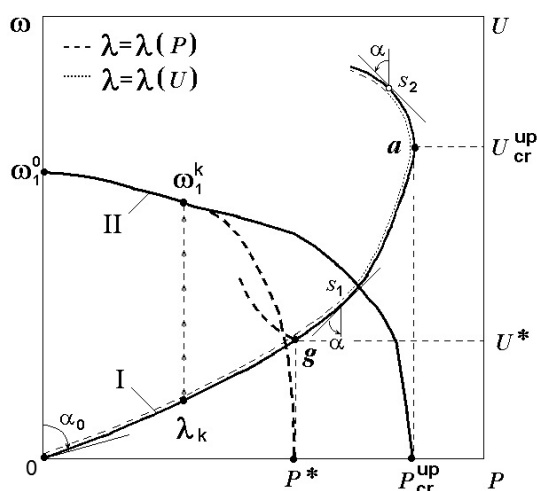


Рис. 2

У реальних умовах оболонкові конструкції можуть знаходитись під дією статичних навантажень різної природи: механічних та температурних (теплових). Тому в розробленому алгоритмі дія на оболонку різних статичних механічних Q і теплових T полів розглядається, загалом, як спільний процес навантаження, що характеризується параметром навантаження $P = P(Q, T)$. В алгоритмі ця залежність задається як функція, що описує дію прикладеного термомеханічного навантаження. Такий підхід дозволяє розглядати різні режими термомеханічного навантаження, що зустрічаються на практиці, незалежно від їх складності.

Нелінійний розв'язок задачі отримується за комбінованим алгоритмом, що поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром λ із ітераційною процедурою Ньютона – Канторовича на кожному кроці навантаження. Кроковий алгоритм описується рекурентною формулою

$$\begin{bmatrix} K_k^1 \end{bmatrix} \left\{ u_k^{m+1} \right\} = \begin{bmatrix} K_k^1 \end{bmatrix} \left\{ u_k^m \right\} - \left\{ R^m \left(\lambda(t_k) \right) \right\} \Delta t_k, \quad (9)$$

де $[K_k^1]$ – лінеаризована матриця жорсткості СЕМО, що обчислюється на першій ітерації поточного k -го кроку; $\{R^m(\lambda(t_k))\} = \{f(\{u_k^m\}, \lambda(t_k))\}$ – вектор нев’язок системи нелінійних розв’язувальних рівнянь на кроці $\lambda_k = \lambda(t_k)$; $\Delta t_k = 1$ – крок за фіктивним часом t , який пов’язується з кроком навантаження k (моментом часу $t = k$).

Після кожного приросту параметра λ_k за схемою (9) виконується ітераційна процедура, яка за формою збігається з ітераційною процедурою модифікованого методу Ньютона – Канторовича. Якщо уточнений на ітерації розв’язок $\{u_k^{m+1}\}$ задовольняє умові збіжності, тоді він стає розв’язком вихідної нелінійної системи на кроці k .

Особливістю розробленого алгоритму розв’язання нелінійної задачі стійкості є автоматизоване керування процесом зміни типу параметра продовження розв’язку, що дозволяє проходити всю діаграму « $P-U$ » незалежно від її виду та складності [2, 3, 20]. Як параметр продовження розв’язку λ може застосовуватись або параметр поля зовнішніх вузлових навантажень P (наприклад, інтенсивність тиску, значення зосередженої сили, параметр теплового поля, параметр комбінованого термомеханічного навантаження тощо), або вибране алгоритмом переміщення U характерного вузла СЕМО, у якому на попередньому кроці приріст модуля вектора вузлового переміщення був найбільшим. Необхідність зміни параметра продовження розв’язку виникає в околі особливих точок діаграм « $P-U$ », що пояснено на рис. 2. Ділянки діаграми « $P-U$ », на яких як параметр продовження розв’язку визначено параметр навантаження $\lambda = \lambda(P)$, супроводжуються пунктирною лінією $(0-s_1, s_2)$, а ділянки, де параметром продовження розв’язку є переміщення характерного вузла $\lambda = \lambda(U)$ – точками (s_1-s_2) .

Для аналізу стійкості та коливань оболонок при дії статичних термомеханічних навантажень використовується комплексний підхід. Він побудований як двохетапний алгоритм, що реалізується на кожному кроці k приросту термомеханічного навантаження (рис. 2).

На першому етапі розв’язується статична задача геометрично нелінійного деформування оболонки. На цьому етапі при відповідному прирості термомеханічного навантаження, що характеризується параметром навантаження $\lambda_k = \lambda_k(P, U)$, визначається НДС оболонки: її деформована форма (нові координати) та прирости полів переміщень і напружень.

На другому етапі перевіряється умова, чи потрібно (замовлено) проводити розрахунки на власні коливання. Якщо умова виконується, тоді у загальному алгоритмі розв’язання задачі відбувається перехід у модуль, що реалізує модальний аналіз оболонки. Якщо умова не виконується, тоді відбувається перехід у модуль продовження загального крокового алгоритму розв’язування нелінійної задачі стійкості. На початку другого етапу при визначенні на першому етапі новій формі оболонки та наявності її переднапруженого стану навантаження приймається рівним нулю (тобто «знімається»), і розв’язується задача на власні коливання [1]. Отриманий НДС приймається як початковий рівноважний стан, відносно якого відбуваються малі коливання оболонки.

Визначаються « i » власних частот ω_i^k (ω_1^k на рис. 2) і відповідних форм коливань оболонки [1, 4, 19]. Звичайно, необхідна кількість частот коливань задається заздалегідь як вихідна інформація. При проведенні модального аналізу оболонки у скінченно-елементних співвідношеннях враховуються як деформований стан конструкції, так і накопичені на попередніх $k-1$ кроках напруження $\sigma_{k-1}^{ij} = \sum_{s=1}^{k-1} \Delta_s \sigma^{ij}$.

Такий підхід дає змогу дослідити вплив переднапруженого стану оболонки на частоти та форми власних коливань конструкції, що деформується. Алгоритм щодо визначення спектру нижчих частот і векторів власних коливань оболонок неоднорідної структури реалізується методом ітерацій у підпросторі [5, 11]. Модальний аналіз виконується до появи нульового (від'ємного) значення основного тону, оскільки за динамічним критерієм параметр навантаження, при якому значення частоти дорівнює нулю, відповідає моменту втрати стійкості оболонки. Це значення навантаження приймається за критичне. Звичайно, надалі, на наступних кроках навантаження, модальний аналіз оболонки не здійснюється. Досліджується лише її закритична поведінка. Точність розрахунку на власні коливання оболонки з урахуванням переднапруженого стану підтверджується збігом величини верхнього критичного навантаження з отриманим в інший спосіб.

Результат модального аналізу подається як діаграма «навантаження P – нижча частота ω_1 » (« $P - \omega_1$ ») (рис. 2, крива II). Якщо на кривій « $P - U$ » виявляється точка розгалуження « g », якій відповідає значення навантаження P^* , при якому $\omega_1 = 0$, тоді, згідно з динамічним критерієм, це навантаження P^* можна прийняти за верхнє критичне. При відсутності точки розгалуження точка максимуму « a » кривої « $P - U$ » відповідає верхньому критичному навантаженню P_{cr}^{up} як за статичним критерієм, так і за динамічним ($\omega_1 = 0$).

2. Результати розрахунку.

Можливості розробленої методики демонструються на прикладі дослідження поведінки квадратних у плані сферичних панелей, які виготовлені з ізотропного матеріалу (E – модуль пружності; ν – коефіцієнт Пуассона; α – коефіцієнт лінійного теплового розширення). Властивості матеріалу вважаються сталими та незалежними від температури. Кривизна панелі визначається параметром $K = 2a^2/(Rh)$ [8], де h – товщина обшивки оболонки; a – розмір у плані; R – радіус серединної поверхні.

Отримано залежності характеристик власних коливань оболонок від величини прикладеного механічного навантаження. Для розглянутих панелей аналіз стійкості та закритичної поведінки наведено в [3, 4]. У даній роботі приведені нові дані щодо процесу втрати стійкості оболонок, що розглядаються, акцент робиться на модальний аналіз оболонок.

2.1. Розглянемо оболонку сталої товщини. На краях панель, згідно з [8], шарнірно скріплена з ребрами, що абсолютно жорсткі на згин у напрямку нормалі та гнучкі у площинах, дотичних до серединної поверхні оболонки. Точки на контурі панелі вільно зміщуються вздовж ребер. Прийнято такі вихідні дані: $K = 24$; $h = 0,01$ м; $a = 200h$; $E = 6,963 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $\alpha = 0,25 \cdot 10^{-4}$ град $^{-1}$.

Порівнюється поведінка оболонки (рис. 3) при трьох видах термомеханічного навантаження, що визначається безрозмірним параметром $p^* = p^*(q^*, T^*)$:

- 1) рівномірний нормальний тиск інтенсивністю q (пунктирна крива 1);
- 2) нерівномірний за товщиною нагрів (суцільна крива 2);
- 3) спільна дія тиску та нагріву (штрих-пунктирна крива 3).

Для зручності порівняння результати розрахунку наводяться у безрозмірному вигляді: $q^* = q/k$; $T^* = T/1^\circ\text{C}$; $\bar{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}/E$; $\bar{u}^{1'} = u^{1'}/h$ – прогин в центрі панелі. Коефіцієнт k визначається з умови, що при дії тільки тиску або тільки нагріву величини q_{cr}^{*up} і T_{cr}^{*up} є чисельно однаковими.

При нерівномірному нагріві температура вздовж товщини оболонки змінюється за лінійним законом так, що зовнішня поверхня панелі охолоджується на таку саму вели-

чину $T^{\circ}\text{C}$, на яку нагрівається її внутрішня поверхня. Температура серединної поверхні оболонки залишається незмінною.

Спільне термомеханічне навантаження виконується так, щоб при нагріві на 1°C безрозмірні параметри q^* та T^* одночасно зростали на одиницю.

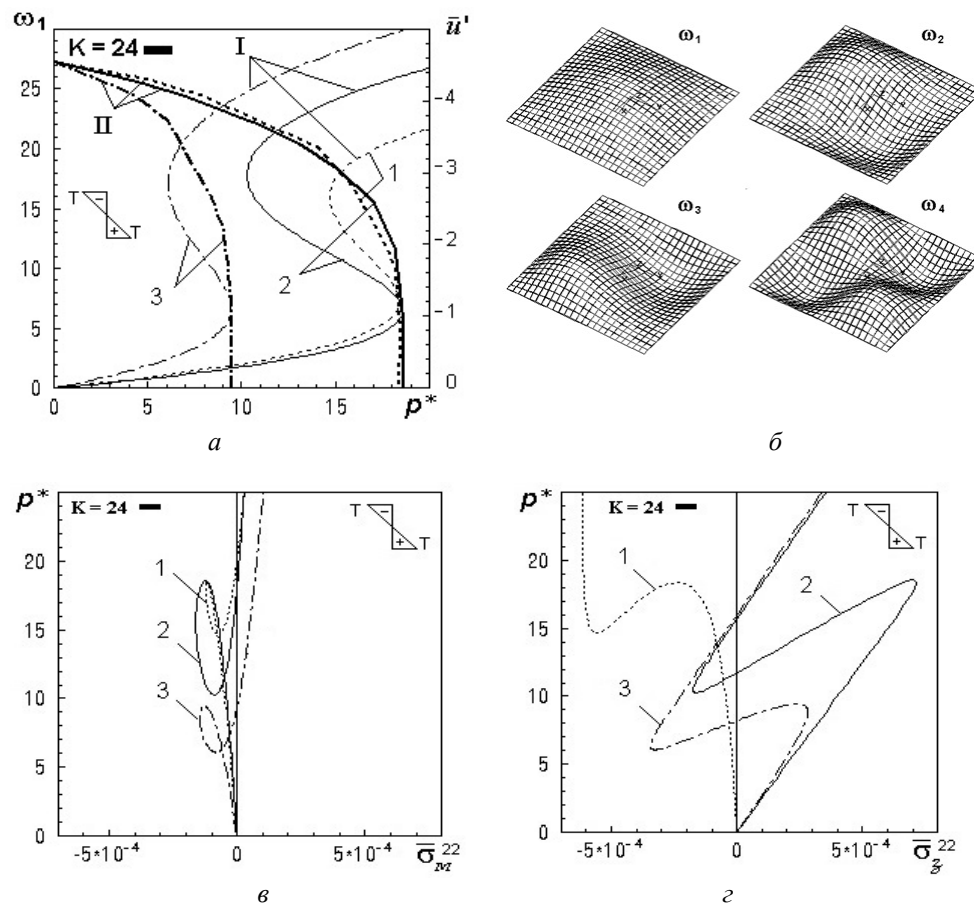


Рис. 3

При дії лише тиску, $p^* = p^*(q^*, 0)$, втрата стійкості панелі відбувається за величини критичного навантаження $q_{cr}^{up} = 2,660 \cdot 10^{-3}$ МПа. Цей результат у докритичній і на початку закритичної областей добре збігається з нелінійним розв'язком Вольміра [8] (розходження за величиною q_{cr}^{up} становить 1,7% [2]).

При нерівномірному нагріві, $p^* = p^*(0, T^*)$, втрата стійкості панелі відбувається за критичної температури $T_{cr}^{up} = 18,548^{\circ}\text{C}$. Тому приймається, що $k = q_{cr}^{up} / T_{cr}^{up} = 1,4341 \cdot 10^{-4}$ МПа. Це забезпечує рівність безрозмірних критичних навантажень першого і другого варіантів впливу.

Втрата стійкості оболонки від дії комбінованого термомеханічного навантаження, $p^* = p^*(q^*, T^*)$, відбувається при величині, яка у два рази менша за критичні навантаження при окремій дії кожного з них, $p^* = 9,429$. Таке зниження величини критичного навантаження пояснюється тим, що напрямки одночасної дії тиску та температурного поля збігаються.

Для всіх трьох видів навантаження у докритичній області на діаграмах « $p^* - \bar{u}$ » (рис. 3, а; криві I) точки розгалуження відсутні, прогини центра панелі в критичних точках практично рівні, а відповідні форми деформування та втрати стійкості носять однаковий характер – просідання центральної частини оболонки. Мембранні напруження $\bar{\sigma}_m^{22}$, обчислені в центрі панелі, у всіх варіантах навантаження ведуть себе однаково (рис. 3, в). Згинальні напруження $\bar{\sigma}_3^{22}$ в центрі панелі у докритичній і закритичній областях на більшості ділянок змінюються лінійно, приймаючи вигляд Z-подібних кривих (рис. 3, з). У процесі проклацування панелі для температурних навантажень характерним є зменшення напружень згину.

Діаграми « $p^* - \omega_1$ » для різних варіантів навантаження наведено на рис. 3, а (криві II). Криві, що відповідають першому і другому варіантам навантаження збігаються. Аналіз результатів показав, що для всіх видів навантаження p^* та на всіх ділянках їхнього зростання перші форми власних коливань панелі мають однаковий вигляд (рис. 3, б). Власні частоти коливань $\omega_2 = \omega_3$ є кратними, а відповідні форми повернуті одна відносно іншої на 90° . На рисунку характерні перші чотири форми власних коливань панелі для наочності надано у збільшеному масштабі.

Оскільки у докритичній області для усіх варіантів навантаження p^* відсутні точки розгалуження розв'язків, за статичним і динамічним критеріями отримано практично рівні відповідні величини критичних навантажень.

2.2. Дослідження стійкості та власних коливань ребристих оболонок надано прикладами пологої і непологої сферичних панелей, шарнірно опертих по контуру, при дії рівномірного нормального тиску. Панелі підкріплено ребрами, розташованими нахрест з боку увігнутості: $h_r = 2h$ – висота ребра без товщини обшивки; $b_r = 2h$ – ширина ребра. Матеріал обшивки і ребер однаковий: $E = 19,6 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $h = 0,01$ м. Для оцінки впливу наявності ребер на процеси втрати стійкості і коливань оболонок розв'язки для ребристих панелей (на рисунках суцільна лінія, що має значок «■») порівняні з даними, отриманими для відповідної гладкої оболонки (пунктирна лінія, що має значок «—»). Результати досліджень подані з використанням безрозмірних параметрів для навантаження $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$ та прогину оболонки $\bar{u}^1 = u^1 / h$.

Для всіх панелей, що розглядаються, маємо гарний збіг величин верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{cr}^{up}$ з відповідними розрахунками, отриманими за допомогою програмного комплексу (ПК) ЛІРА-САПР [17].

2.2.1. Полога панель ($a = 60h$; $R = 225h$; $K = 32$). З аналізу отриманих результатів і порівняння діаграм « $\bar{q} - \bar{u}$ » (рис. 4, а; криві I) та « $\bar{q} - \omega_1$ » (криві II) для гладкої та ребристої панелей можна зробити наступні висновки.

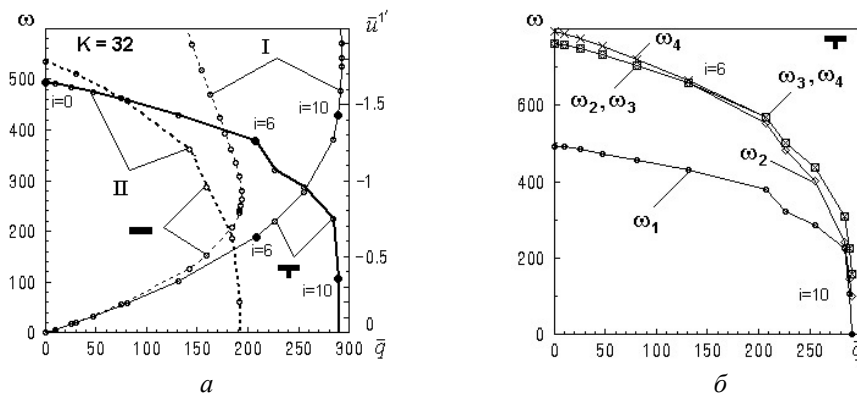


Рис. 4

Збільшення маси панелі на 19,3% за рахунок встановлення двох ребер збільшує значення критичного навантаження $\bar{q}_{cr}^{up}$ в 1,5 рази порівняно з гладкою панеллю і приводить до зниження частоти коливань у вихідному стані ($\bar{q}^{i=0}$) на 7,5%. Кружечками на діаграмах відмічені моменти навантаження $\bar{q}^i$, при яких виконувався розрахунок на власні коливання. Починаючи з величини навантаження $\bar{q} \approx 80 > \bar{q}^{i=4}$, частота ω_1 для ребристої панелі є більшою за відповідну частоту для гладкої оболонки.

Характер перших форм власних коливань для гладкої панелі «■» не залежить від величини навантаження $\bar{q}$. Перші чотири форми коливань цієї панелі наведено на рис. 5 для вихідного ненавантаженого стану $\bar{q}^{i=0}$. Тут і далі значення частот надано в Гц. При всіх рівнях навантаження частоти $\omega_1 = \omega_2$ залишаються кратними.

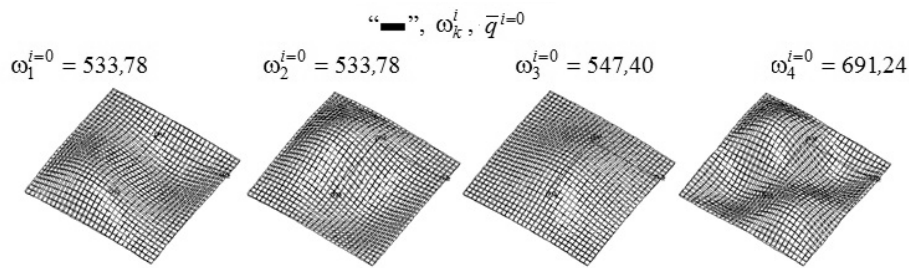


Рис. 5

Для ребристої панелі «■» у моменти навантаження $\bar{q}^{i=6}$ і $\bar{q}^{i=10}$ спостерігається перебудова характеру форм коливань (рис. 6). У вихідному стані $i = 0$ та при $i < 6$ кратними є частоти $\omega_2 = \omega_3$ (рис. 4, б). При $i \geq 6$ кратними стають частоти $\omega_3 = \omega_4$.

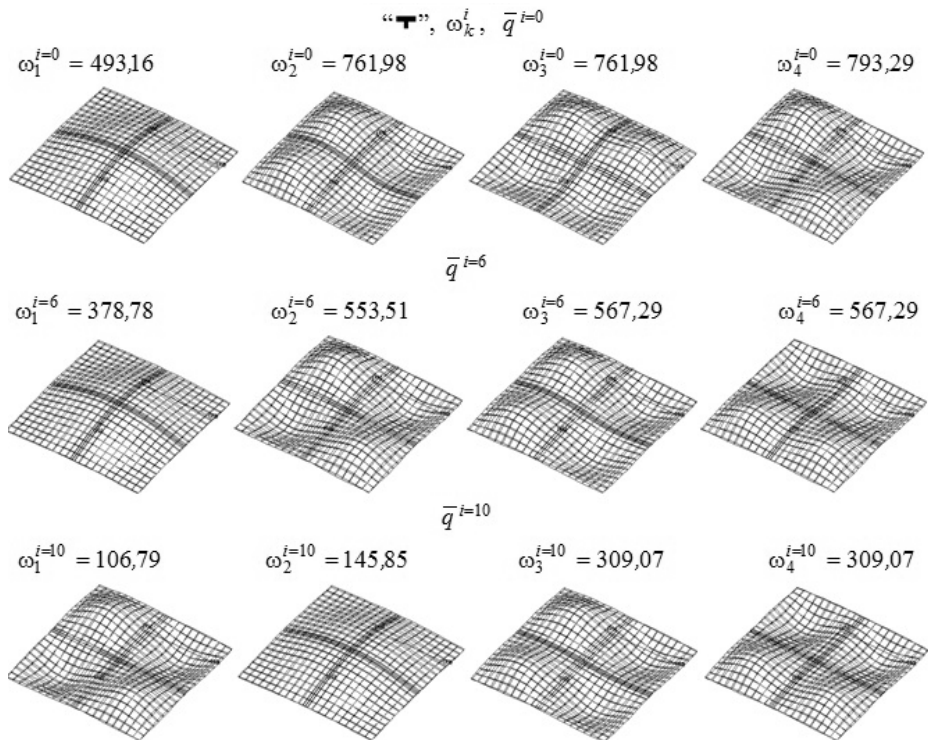


Рис. 6

Для обох оболонок у докритичній області відсутні точки розгалуження розв'язків. Тому за статичним і динамічним критеріями отримано практично рівні величини критичних навантажень для відповідних оболонок. Для гладкої панелі цим значенням є $\bar{q}_{cr}^{up} = 191,6$, а для ребристої панелі – $\bar{q}_{cr}^{up} = 291,4$.

2.2.2 Неполога панель ($a = 120h$; $R = 450h$; $K = 64$). Порівняння діаграм « $\bar{q} - \bar{u}$ » для гладкої панелі «■» (пунктирна крива) і панелі, що підкріплена ребрами «■» (суцільна крива), виконано для характерних точок « o » та « b » (рис. 7, а, б). Для обох оболонок втрата стійкості відбувається однаково, реалізуючись за два етапи. Спершу різко зростає прогин у середині чвертей панелі у точках « b ». В той же час у центрі оболонки, точці « o », панель практично не деформується. Реалізується місцева втрата стійкості обшивки між ребрами та опорним контуром. Відповідні форми наведено на рис. 8, б. На діаграмах « $\bar{q} - \bar{u}$ » (рис. 7) цьому моменту відповідає точка «1» з такими характеристиками діаграм: для гладкої панелі маємо навантаження $\bar{q} = 777,7$, прогин у точці « o » $\bar{u}_o^{1'} = -0,1445$, прогин у точці « b » $\bar{u}_b^{1'} = -0,6677$; для ребристої панелі відповідно маємо: $\bar{q} = 804,4$, $\bar{u}_o^{1'} = -0,3470$, $\bar{u}_b^{1'} = -0,7087$.

Потім настає загальна втрата стійкості панелі (точка «2») з проклацуванням центра: при $\bar{q} = 815,0$ (для гладкої оболонки) і $\bar{q} = 1012,0$ (для ребристої оболонки).

Алгоритм МССЕ дає змогу знаходити точки розгалуження розв'язків і визначати суміжні форми деформування в їх околі. Для цього застосовується якісна теорія. Для обох непологих оболонок у докритичній області було виявлено можливу точку розгалуження «*». Для її точного визначення в ідеальну форму серединної поверхні оболонки було внесено мале несиметричне збурення. Внесена початкова недосконалість форми серединної поверхні оболонки точно ідентифікувала точку «*» як точку біфуркації панелі ідеальної форми, розв'язок якої має розгалуження. На рис. 7 (в прямокутниках) пунктирною лінією для гладкої панелі «■», як приклад, показано криву відгалуження з точки «*» при навантаженні $\bar{q}^* = 775,6 < \bar{q}_{cr}^{up}$. Для ребристої панелі також виявлено точку розгалуження при $\bar{q}^* = 800,2$. Порівняння з даними, отриманими за допомогою ПК ЛІРА-САПР (жирна крива), показало повний збіг кривих « $\bar{q} - \bar{u}$ » у докритичній області.

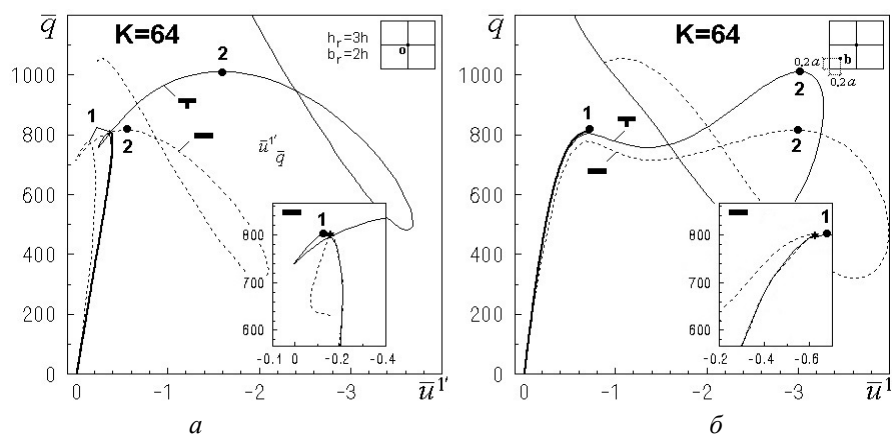


Рис. 7

На діаграмах « $\bar{q} - \bar{u}$ » (рис. 8, криві I) та « $\bar{q} - \omega_1$ » (криві II) кружечками позначено моменти навантаження, при яких відбувається перебудова мод коливань. Ця перебудова істотно залежить від зміни кратності частот у процесі навантаження. Діапазон зміни власних частот ω_k^i для обох панелей при різних рівнях навантаження $\bar{q}^i$ досить

щільний (рис. 9, 10). На рисунках для обох оболонок показана перебудова в різні моменти навантаження перших чотирьох форм власних коливань.

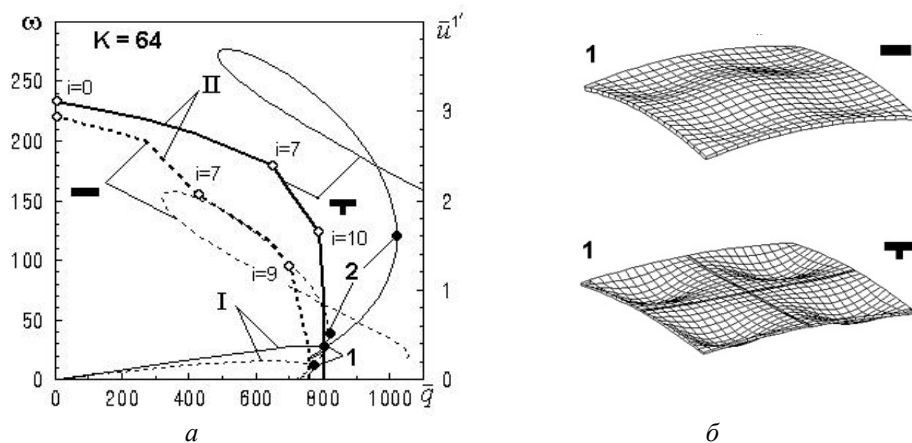


Рис. 8

Для гладкої панелі «■» (рис. 9) у вихідному (ненавантаженому) стані $\bar{q}^{i=0}$ частоти $\omega_1 = \omega_2$ є кратними. При $\bar{q} \geq \bar{q}^{i=7}$ характер коливань першої моди не змінюється. При навантаженнях $\bar{q}^{i=7}$ та $\bar{q}^{i=9}$ спостерігається перебудова вищих форм коливань у відповідності до характеру значень $\omega_2, \omega_3, \omega_4$.

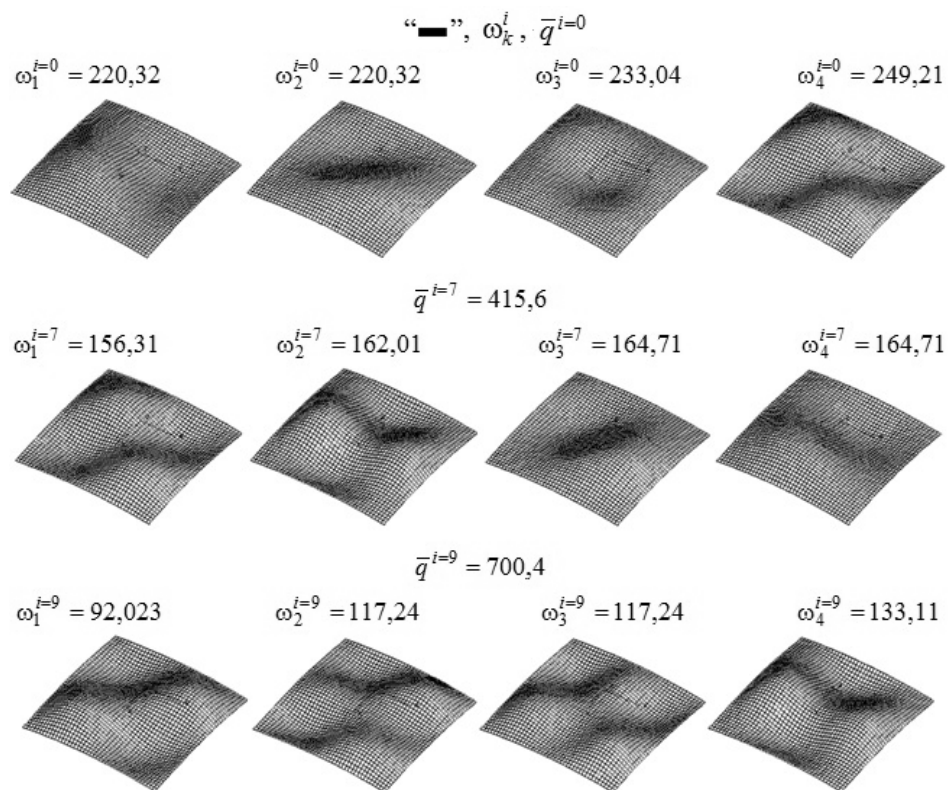


Рис. 9

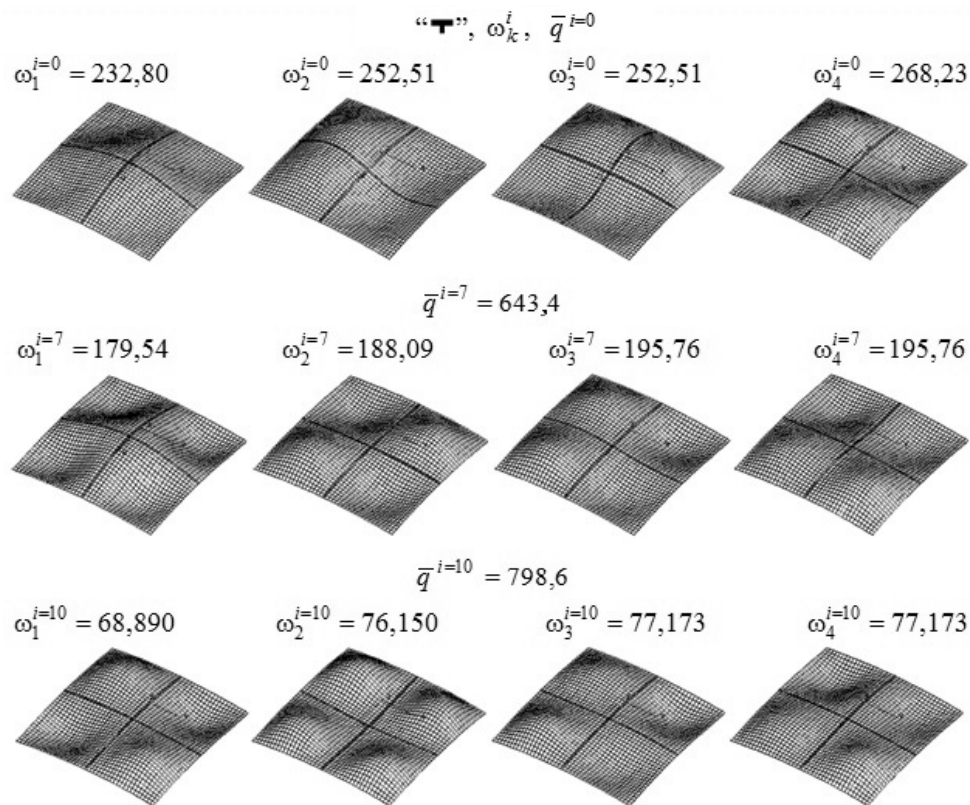


Рис. 10

Для ребристої панелі «Т» (рис. 10) при навантаженнях $\bar{q}^{i=0} \leq \bar{q} < \bar{q}^{i=7}$ кратними є частоти $\omega_2 = \omega_3$. При навантаженнях $\bar{q}^{i=7} \leq \bar{q}$ кратними стають частоти $\omega_3 = \omega_4$. Перебудова форм коливань відбувається при навантаженнях $\bar{q}^{i=7}$ та $\bar{q}^{i=10}$.

Висновок.

Наведено скінченно-елементний метод комплексного дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості, закритичної поведінки та власних коливань тонкостінних оболонкових конструкцій, що знаходяться під дією статичних термомеханічних навантажень. Оболонки можуть мати ребра, накладки, отвори, виїмки, канали, злами серединної поверхні, багатошарову структуру матеріалу та інші особливості. Метод дослідження ґрунтується на єдиних методологічних позиціях просторової геометрично нелінійної теорії термопружності та моментної схеми скінченних елементів. На базі застосування універсального тривимірного скінченного елемента з додатковими змінними параметрами розроблена єдина розрахункова модель, що враховує різні особливості конструктивних елементів неоднорідної оболонки. Прийнятий підхід дає можливість досліджувати поведінку оболонкових конструкцій в рамках єдиної методології. В роботі детально розглядаються питання, пов'язані з поширенням методу аналізу стійкості неоднорідних оболонок на задачі власних коливань конструкції з урахуванням переднапруженого стану. Модальні характеристики оболонки обчислюються на кожному кроці термомеханічного навантаження. За прийнятим підходом момент втрати стійкості конструкції може бути визначений одночасно за статичним і динамічним критеріями. Можливості методики продемонстровані на прикладах квадратних у плані сферичних панелей. Отримано залежності характеристик власних коливань оболонок від величини прикладеного статичного навантаження. Проаналізовано вплив трьох видів навантаження (механічного, температурного та термомеханічного).

ного) на стійкість і власні коливання гладкої оболонки. Досліджено стійкість, закритична поведінка та власні коливання ребристих пологої і непологої панелей. Для оцінки впливу наявності ребер на розглядувані процеси розв'язки для ребристих панелей порівняні з даними, отриманими для відповідної пологої і непологої гладкої оболонки.

РЕЗЮМЕ. Викладено основи методу дослідження процесів нелінійного деформування, втрати стійкості та власних коливань тонких пружних оболонок при термомеханічному навантаженні. Оболонки можуть мати складну форму серединної поверхні, гладко- і східчасто-змінну товщину, отвори та багатопорову структуру матеріалу. Метод ґрунтується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, застосуванні моментної схеми скінченних елементів та розробленого універсального просторового скінченного елемента. Метод надає можливість за допомогою єдиного універсального скінченного елемента моделювати поведінку оболонок з різними особливостями за товщиною. Модальні характеристики оболонок визначаються з урахуванням переднапруженого деформованого стану. Проілюстровано надійність і ефективність запропонованого підходу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: неоднорідна оболонка, стійкість, власні коливання, термомеханічне навантаження, універсальний тривимірний скінченний елемент, моментна схема скінченних елементів.

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д.* Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – Київ: КНУБА – 2015. – Вип. 95. – С. 96 – 113.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – Київ: ЗАТ Віпол, 2010. – 316 с.
3. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – Москва: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2013. – 336 с.
4. *Баженов В.А., Кривенко О.П.* Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях. – Київ: Каравела, 2020. – 187 с.
5. *Бате К., Вилсон Р.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – Москва: Стройиздат, 1982. – 448 с.
6. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
7. *Болотин В.В.* О влиянии безмоментного напряженного состояния на спектр собственных колебаний тонких упругих оболочек // *Изв. АН СССР: Механика и машиностроение.* – 1962. – № 4. – С. 52 – 60.
8. *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. – Москва: Наука, 1967. – 984 с.
9. *Гавриленко Г.Д., Трубицина О.А.* Колебания и устойчивость ребристых оболочек вращения. – Днепропетровськ: ТОВ Барвікс, 2008. – 155 с.
10. *Киричок И.Ф.* Влияние начальных температурных напряжений на собственные колебания ортотропных цилиндрических оболочек // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1970. – Вып. 9. – С. 281 – 290.
11. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
12. *Новачкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
13. *Новожилов В.В.* Теория тонких оболочек. – Л.: Судпромгиз, 1962. – 431 с.
14. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
15. *Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища шк. Голов. изд-во, 1982. – 480 с.
16. *Соловей М.О.* Модифікований просторовий скінченний елемент для моделювання тонких неоднорідних оболонок // *Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн.* – К.: КНУБА. – 2006. – Вип. 80. – С. 96-113.
17. *Стрелец-Стрелецкий Е.Б., Боговис В.Е., Гераймович Ю.Д. и др.* ЛИРА 9.4. Руководство пользователя. Основы. Учебное пособие. – Киев: Факт, 2008. – 164 с.
18. *Флячок В.М., Швець Р.Н.* Влияние неравномерного нагрева на собственные колебания анизотропных цилиндрических оболочек // *Тепловые напряжения в элементах конструкций.* – 1981. – Вып. 9. – С. 48-53.
19. *Bazhenov Victor, Krivenko Olga.* Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2018. – 97 p.

20. *Bazhenov V.A., Solovei N.A.* Nonlinear Deformation and Buckling of Elastic Inhomogeneous Shells under Thermomechanical Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, № 9. – P. 923-953.
21. *Bespalova E.I., Yaremchenko N.P.* Stability of Systems Composed of Shells of Revolution // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 5. – P. 545 – 555.
22. *Cinefra M.* Formulation of 3D finite elements using curvilinear coordinates // *Mechanics of Advanced Materials and Struct.* – 2020. – P. 1 – 10.
23. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I.* Effect of the Parameters of Ribs and the Type of Load on the Frequencies of Vibration of Imperfect Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2015. – **51**, N 4. – P. 420 – 424.
24. *Gavrilenko G.D., Matsner V.I.* Stability of Reinforced Cylindrical Shells under Combined Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, N 12. – P. 1372 – 1376.
25. *Gotsulyak E.A., Luk'yanchenko O.O., Kostina E.V. et al.* Geometrically Nonlinear Finite-Element Models for thin Shells with Geometric Imperfections // *Int. Appl. Mech.* – 2011. – **47**, N 3. – P. 302 – 312.
26. *Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boychuk O.V. et al.* Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of Closed Corrugated Cylindrical Shells // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 5. – P. 520 – 532.
27. *Hutchinson J.W.* Buckling of spherical shells revisited // *Proc. R. Soc.* – 2016. – A 472 – 20160577.
28. *Hutchinson J.W., Thompson J.M.T.* Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces // *J. Appl. Mech.* – 2017. – **84**, N 6. – 061001.
29. *Ismail M.S., Mahmud J., Jailani A.* Buckling of an imperfect spherical shell subjected to external pressure // *Ocean Engng.* – 2023. – **275**. – 114118.
30. *Kirichok I.F.* Dynamics of prestressed thin elastic shells // *Soviet Appl. Mech.* – 1970. – **6**, N 3. – P. 241 – 247.
31. *Li C., Miao Y., Wang H., Feng Q.* Thermal buckling of thin spherical shells under uniform external pressure and non-linear temperature // *Thin-Walled Struct.* – 2017. – **119**. – P. 782 – 794.
32. *Marthelot J., Jiménez F.L., Lee A., John W., Hutchinson J.W., Reis P.M.* Buckling of a Pressurized Hemispherical Shell Subjected to a Probing Force // *J. Appl. Mech.* – 2017. – **84**, N 12. – 121005.
33. *Podvornyi A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M.* Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shells under Distributed External Pressure in a Three-Dimensional Statement // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 6. – P. 623 – 638.
34. *Semenyuk N.P., Zhukova N.B.* Stability and Postcritical Behavior of Corrugated Cylindrical Panels Under External Pressure // *Int. Appl. Mech.* – 2013. – **49**, N 6. – P. 702 – 714.
35. *Shariyat M., Behzad H., Shaterzadeh A.R.* 3D thermomechanical buckling analysis of perforated annular sector plates with multiaxial material heterogeneities based on curved B-spline elements // *Composite Struct.* – 2018. – **188**. – P. 89 – 103.

Надійшла 11.07.2023

Затверджена до друку 16.04.2024