

О.В.Константинов¹, О.С.Лимарченко²

ДИНАМІКА МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ «РЕЗЕРВУАР – РІДИНА З
ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ» ПРИ ВЕРТИКАЛЬНИХ КОЛИВАННЯХ
РЕЗЕРВУАРА У РІЗНИХ ДІАПАЗОНАХ ЧАСТОТ

¹Інститут математики НАН України,

вул. Терещенківська, 3, 01001, Київ, Україна; e-mail: akonst.im@ukr.net

²Київський національний університет ім. Тараса Шевченка,

просп. акад. Глушкова, 4е, 03127, Київ, Україна; e-mail: olelim2010@yahoo.com

Abstract. The stability diagram of parametric resonance for the mechanical system «reservoir – liquid with free surface» in the classical Faraday problem is obtained in the analytical form. In contrast to the known research results, the stability diagram is built based on the nonlinear equation of free surface fluctuations of the liquid transformed into the Ince-Strett form. The perturbation theory, in particular, the small parameter method, is used to construct the stability margin equations. The research results showed that the presence of cubic nonlinearities in the equation of parametric oscillations of a liquid-free surface affects significantly only the location of the first zone of instability (parametric resonance). To calculate the impact of nonlinearities of the third order of smallness in the equations of the boundaries of the zones of the second and third resonances, it is necessary to take into account the nonlinearities of higher orders of smallness.

Keywords: Faraday problem, parametric resonance, parametric oscillations, reservoir with liquid with a free surface, stability area.

Вступ.

Задача дослідження динаміки системи резервуар-рідина при наявності заданого вертикального руху резервуара або, в розширеній постановці, при наявності поздовжнього збудження руху резервуара є актуальною і на даний час до кінця не розв'язаною. Як відомо з історії механіки, параметричний резонанс в рідині вперше був виявлений в 1831 році Фарадеєм [4, 5], який експериментально досліджував коливання вільної поверхні рідини в резервуарі, що рухається за гармонічним законом, і встановив, що перша резонансна частота вільної поверхні рідини дорівнює половині частоти збудження резервуара. Матіссен [13] за результатами власних експериментів стверджував, що резонансна частота вільної поверхні рідини і зовнішнього збудження співпадають. Для вирішення цієї суперечності Релей [15] почав в 1877 році власні дослідження, маючи за мету як вдосконалення постановки експерименту, так і створення математичної теорії, яка б була спроможна пояснити це явище. При цьому він використовував результати Мать'є [14] з теорії лінійних диференціальних рівнянь з періодичними коефіцієнтами. Бенджамін та Урсел [3], напевне, були першими, хто показав, що аналіз хвиль Фарадея в ідеальній рідині у вертикальному циліндричному резервуарі призводить до необхідності розв'язку класичного рівняння Мать'є. Вільна поверхня в їх роботі представлена як сума незалежних функцій (мод), амплітуди яких залежать від часу і є розв'язками рівняння Мать'є. Для кожної із мод в площині параметрів «амплітуда зовнішнього збурення H – частота зовнішнього збурення Ω » було побудовано області стійкості та нестійкості (так звані «резонансні» язички) та

з'ясовано, що на площині «Н-Ω» вони чергуються. Ці області розділені кривими, на яких розв'язки є гармонічними або субгармонічними, тим самим узгоджуючи спостереження Фарадея та Матіссена.

Надалі проблемою дослідження параметричного резонансу для випадку ідеальної рідини займалися Льюїс, Тейлор, Майлс, Хокін, Неволін, Секерж-Зенькович та ін. В цих роботах теоретично якісно та кількісно вивчались субгармонічні коливання (з частотою близькою до половини частоти збурення), а також гармонічні та супергармонічні коливання (з частотою, яка перевищує частоту збурення) в резервуарах різної форми. Дуже детальний огляд робіт з параметричного резонансу, опублікованих до 2005 року, наведено в монографії Ібрагіма [6]. Різні варіанти комбінацій параметричного і вимушеного розвитку коливань рідини розглянуто в [16].

Ікеда в роботах [8, 9] експериментально досліджував коливання пружної конструкції, на якій закріплено два прямокутні резервуари, частково заповнені рідиною, під дією вертикального гармонічного збудження. Частота зовнішнього гармонічного збудження відповідає частоті першого параметричного резонансу – вона вдвічі більша власної частоти коливань будь-якого з резервуарів. В роботі розглядаються в теоретичному аспекті тільки двовимірні (в одній площині) поверхневі хвилі Фарадея і резервуари скінченної глибини. Модальні рівняння руху системи отримані на основі методу Гальоркіна з урахуванням нелінійності гідродинамічної сили. Потім на основі методу Ван дер Поля побудовані графіки кривих амплітудно-частотної характеристики. Досліджено вплив рівня заповнення резервуарів та відхилення частот у співвідношенні внутрішнього резонансу. Встановлено, що в залежності від рівня рідини та частоти збудження можуть виникати два типи коливань: одномодові (коливання рідини в одному резервуарі) та двомодові (коливання рідини в обох резервуарах). Коливання вільної поверхні рідини в обох резервуарах при наявності амплітудної та фазової модуляції, а також хаотичні коливання відносяться до тих ділянок кривих амплітудно-частотної характеристики, які відповідають одномодовим рішенням при наявності відхилення частот у резонансному частотному співвідношенні.

В роботі [9] досліджуються поздовжні коливання пружної конструкції з частково заповненим рідиною циліндричним резервуаром під дією вертикального синусоїдального збудження. Ця система «конструкція – резервуар» є автопараметричною системою. Власна частота цієї конструкції дорівнює подвійній частоті першої осесиметричної форми коливань вільної поверхні рідини. На основі методу Ван дер Поля побудовано амплітудно-частотні характеристики системи. Встановлено, що при зменшенні рівня рідини тип нелінійності змінюється з м'якої на жорстку. І ще один дуже детальний огляд результатів з параметричного резонансу зроблено в статті [7].

У всіх названих роботах дослідження умов параметричного резонансу виконувалось на основі лінійних рівнянь параметричного збурення резервуара з рідиною, наприклад, на основі рівнянь Мать'є. В даній роботі поставлено задачу побудувати діаграму стійкості параметричних коливань системи резервуар-рідина на основі нелінійної багатомодової (12 форм коливань) моделі, яка описує спільний рух резервуара та рідини під дією активного силового збудження або заданого кінематичного збурення руху резервуара.

1. Математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Розглянемо циліндричний резервуар, частково заповнений рідиною. Резервуар вважаємо абсолютно твердим тілом, яке може рухатись поступально під дією активних зовнішніх сил. Рідину вважаємо ідеальною, нестисливою, однорідною, а її початковий рух безвихровим. Відповідно до методики роботи [1], математична модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» будується на основі

варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського $\delta I = 0$, де $I = \int_{t_1}^{t_2} L dt$, при

цьому функція Лагранжа задається у класичному вигляді Гамільтона – Остроградського як різниця між кінетичною та потенціальною енергіями системи

$$L = \frac{1}{2} \rho \int_{\tau} (\vec{\nabla}_3 \varphi + \dot{\vec{\varepsilon}})^2 d\tau + \frac{1}{2} M_T (\dot{\vec{\varepsilon}})^2 - (M_T + M_F) g \varepsilon_z - \frac{1}{2} \rho g \int_S (\xi^2 - H^2) dS + \vec{F} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де ρ – густина рідини; τ – область, яку займає рідина; r, θ, z – циліндричні координати, при цьому вісь Oz спрямована протилежно вектору прискорення вільного падіння $\vec{g}$, а система координат пов'язана з нерухомим резервуаром; $\vec{\nabla}_3 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial z}$; $\vec{\nabla}_2 = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial r} + \vec{i}_2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$; φ – потенціал швидкостей рідини; ξ – збурення вільної поверхні; S – поперечний переріз циліндричного резервуара; H – глибина рідини в резервуарі; M_T – маса резервуара; M_F – маса рідини; $\vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z)$ – вектор переміщення резервуара у поступальному русі; $\vec{F}$ – головний вектор зовнішніх сил, які діють на резервуар, відносно початку координат.

Для ефективного застосування варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського поставлено задачу ввести у розгляд мінімальну кількість незалежних змінних, що описують рух резервуара з рідиною, тобто фактично будуються розклади шуканих змінних, які задовольняють наперед усі кінематичні граничні умови. Оскільки безвихровий рух ідеальної однорідної нестисливої рідини відповідно до теореми Лагранжа повністю визначається рухом її границь, то збурення вільної поверхні рідини ξ та радіус-вектор $\vec{\varepsilon}(t)$ повністю характеризують рух самої рідини, і тому потенціал швидкостей φ потрібно вважати залежною змінною.

Відповідно до методики роботи [1], розклади шуканих змінних представимо у вигляді

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_i a_i(t) \psi_i(r, \theta); \quad \varphi = \sum_i b_i(t) \varphi_i(r, \theta, z),$$

де $a_i(t)$ – амплітуди форм коливань збуреної вільної поверхні рідини ξ . Системи функцій ψ_i і $\varphi_i = \psi_i \frac{\cosh \kappa_i(z+H)}{\kappa_i \sinh \kappa_i H}$ є розв'язком лінійної спектральної задачі [1] та мають вигляд

$$\psi_n(r, \theta) = \frac{J_n \left(\frac{\kappa_n^{(m)}}{R} r \right)}{J_n(\kappa_n^{(m)})} \sin n\theta \quad (n=0, 1, 2, \dots; m=1, 2, \dots),$$

де $\kappa_n^{(m)}$ – корінь кратності n рівняння $J'_n(\kappa_n^{(m)}) = 0$.

У роботі [1] розроблено метод виключення кінематичних граничних умов на вільній поверхні рідини, який дозволяє отримати дискретну модель механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» мінімальної розмірності. На основі розробленого методу, варіаційних методів математичної фізики та асимптотичних методів нелінійної механіки у роботі [1] побудовано математичну модель, яка дозволяє дослідити поступальні та кутові рухи механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового та моментного) збудження. Ця модель представляє собою систему нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку відносно незалежних параметрів a_i – коефіцієнтів розкладу в ряд збурення вільної поверхні рідини ξ за формами коливань вільної поверхні ψ_i та ε_i – компонент вектора переміщень центру незбуреної вільної поверхні рідини відносно деякої нерухомої системи відліку:

$$\begin{aligned} \sum_i \ddot{a}_i \left\{ \beta_{ri}^q + \sum_j a_j \gamma_{rij}^q + \sum_{i,j} a_i a_j \delta_{rijk}^q \right\} + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i \bar{B}_{ri}^2 + \sum_{i,j} a_i a_j \bar{B}_{rij}^3 + \sum_{i,j,k} a_i a_j a_k \bar{B}_{rijk}^4 \right\} = \\ = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j (\gamma_{ijr}^q - 2\gamma_{rij}^q) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k (\delta_{ijk}^q - 2\delta_{rijk}^q) - \frac{1}{2} g \alpha_r^s - g N_r a_r + \\ + \ddot{\varepsilon} \cdot \left\{ \bar{B}_r^1 + \sum_i a_i (\bar{B}_{ir}^2 - \bar{B}_{ri}^2) + \sum_{i,j} \dot{a}_i a_j 2(\bar{B}_{ijr}^3 - \bar{B}_{rij}^3) + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i a_j a_k 3(\bar{B}_{ijk}^4 - \bar{B}_{rijk}^4) \right\}; \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left\{ \sum_i \ddot{a}_i \left[\bar{B}_i^1 + \sum_j a_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{j,k} a_j a_k \bar{B}_{ijk}^3 \right] \right\} + (M_T + M_F) \ddot{\varepsilon} = \\ = \bar{F} - (M_T + M_F) g \bar{k} - \rho \left\{ \sum_{i,j} \dot{a}_i \dot{a}_j \bar{B}_{ij}^2 + \sum_{i,j,k} \dot{a}_i \dot{a}_j a_k 2 \bar{B}_{ijk}^3 \right\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Система (1) – (2) містить $N+3$ рівнянь (N – кількість форм коливань рідини, що розглядаються) та описує динаміку сумісного руху резервуара та рідини при різних видах кінематичного збурення та динамічного (силового) збудження. Рівняння (1) описують динаміку амплітуд форм коливань вільної поверхні рідини, а рівняння (2) – динаміку резервуара, однак ці рівняння взаємозв'язані та містять сили взаємодії між компонентами механічної системи. Модель отримана аналітично для довільної кількості форм коливань вільної поверхні рідини.

Сукупність коефіцієнтів, які входять до системи рівнянь (1) – (2), у рамках прийнятої моделі визначає властивості механічної системи, яка розглядається, та особливості прояву в ній внутрішніх лінійних та нелінійних механізмів взаємодії. Ці коефіцієнти визначаються через квадратури від розв'язку крайової задачі із визначення форм коливань вільної поверхні рідини. При цьому коефіцієнти $\beta_{ir}^q, \gamma_{ijr}^q, \delta_{ijk}^q, \alpha_r^s, N_r$ відповідають випадку коливань рідини у нерухомому резервуарі, а коефіцієнти $\bar{B}_r^1, \bar{B}_{ri}^2, \bar{B}_{rij}^3, \bar{B}_{rijk}^4$ відображають взаємозв'язок коливань рідини та поступального руху резервуара. Повне отримання системи рівнянь (1) – (2) і формули для обчислення коефіцієнтів для загального випадку сумісного руху (поступального і кутового) циліндричного резервуара і рідини з вільною поверхнею наведено у роботі [1].

2. Побудова діаграми стійкості системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею».

Рівняння (1) – (2) описують процес розвитку параметричних коливань в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», коли система рухається вертикально за заданим гармонічним законом $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$. Як відомо із теорії параметричних коливань [2, 10 – 12], існують області в площині параметрів (p, H_z) , коли розв'язки рівнянь (1) – (2) будуть необмежено зростати, тобто області динамічної нестійкості. Побудова діаграми стійкості (або областей нестійкості) буде відповіддю на питання: при яких значеннях параметрів зовнішнього силового збурення резервуара (p, H_z) система «резервуар – рідина з вільною поверхнею» при наявності будь-якого малого початкового збурення вільної поверхні рідини вийде на режим параметричного резонансу.

Спочатку розглянемо випадок так званої класичної задачі Фарадея [2, 10], коли резервуар рухається вертикально за заданим гармонічним законом, а от горизонтальні коливання резервуара, які виникають внаслідок коливань вільної поверхні рідини,

унеможливаються за рахунок жорсткого закріплення резервуара. З теорії параметричних коливань відомо [2], що побудова діаграми стійкості здійснюється на основі лінеаризованих рівнянь руху коливальної системи.

Запишемо лінеаризоване диференціальне рівняння для форми з нижчою частотою – першої антисиметричної форми a_1 – при наявності зовнішнього вертикального збурення резервуара $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ у вигляді рівняння Мат'є

$$\ddot{a}_1 + \omega_1^2 (1 - \nu H_z p^2 \cos(pt)) a_1 = 0, \quad (3)$$

де введено позначення: $\nu = (B_{11}^{2z}) / (gN_1)$, $\omega^2 = (gN_1) / (\beta_{11}^q)$ – власна частота першої антисиметричної форми a_1 . Заміною змінних $2\tau = pt$ приведемо рівняння (3) до класичної форми Айнса – Стретта

$$\ddot{a}_1 + \lambda^2 (1 - \Lambda \cos(2\tau)) a_1 = 0, \quad (4)$$

де частотний параметр $\lambda = 2\omega/p$ приймає тільки цілі значення 1, 2, ... , які відповідають областям динамічної нестійкості системи для будь яких частот ω і p . При цьому вважаємо, що частотна поправка $\Lambda = \nu H_z p^2 = \mu \nu \tilde{H}_z p^2$ є величиною більш високого порядку малості у порівнянні з частотним параметром λ^2 і містить малий параметр μ .

Введемо позначення $x = a_1$ і, відповідно до методики роботи [2], використовуватимемо методи теорії збурень для побудови рівняння (4). Для цього розкладатимемо розв'язок $x(\tau)$ та частотний параметр λ^2 по ступеням малого параметра μ

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \mu^3 x_3(\tau) + \dots; \quad \lambda^2 = n^2 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \mu^3 \alpha_3 + \dots$$

включно до величин третього порядку малості (у роботі [2] використовуються розклади до величин другого порядку малості), де $x_i(\tau)$ є періодичними функціями часу періоду π ; $n = 1, 2, 3, \dots$ – номер області нестійкості; α_i – деякі поки що невідомі, але постійні величини, значення яких буде знайдено в процесі розв'язання задачі.

Для побудови границь першої області нестійкості (якій відповідає $n = 1$) розв'язуватимемо рівняння

$$\ddot{x} + \lambda^2 (1 + \mu \Lambda \cos(2\tau)) x = 0,$$

вважаючи

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \mu^3 x_3(\tau); \quad \lambda^2 = 1 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \mu^3 \alpha_3$$

і після підстановки та приведення відповідних доданків отримаємо систему взаємно зв'язаних рівнянь для функцій $x_i(\tau)$

$$\ddot{x}_0 + x_0 = 0; \quad \ddot{x}_1 + x_1 + \alpha_1 x_0 + \Lambda \cos(2\tau) x_0 = 0;$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 + \alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1 + \Lambda (\alpha_1 x_0 + x_1) \cos(2\tau) = 0; \quad (5)$$

$$\ddot{x}_3 + x_3 + \alpha_3 x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \Lambda (\alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1 + x_2) \cos(2\tau) = 0.$$

Отримаємо відразу ж розв'язок першого рівняння системи (5) у вигляді

$$x_0 = A \cos(\tau) + B \sin(\tau)$$

і конкретизуємо систему рівнянь (5) у вигляді

$$\ddot{x}_1 + x_1 + A \left(\alpha_1 + \frac{\Lambda}{2} \right) \cos(\tau) + B \left(\alpha_1 - \frac{\Lambda}{2} \right) \sin(\tau) + \frac{A\Lambda}{2} \cos(3\tau) + \frac{B\Lambda}{2} \sin(3\tau) = 0;$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 + \alpha_1 x_1 + A \left(\alpha_2 + \frac{\Lambda \alpha_1}{2} \right) \cos(\tau) + B \left(\alpha_2 - \frac{\Lambda \alpha_1}{2} \right) \sin(\tau) + \Lambda \cos(2\tau) x_1 + \\ + \frac{A \Lambda \alpha_1}{2} \cos(3\tau) + \frac{B \Lambda \alpha_1}{2} \sin(3\tau) = 0; \quad (6)$$

$$\ddot{x}_3 + x_3 + \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + A \left(\alpha_3 + \frac{\Lambda \alpha_2}{2} \right) \cos(\tau) + B \left(\alpha_3 - \frac{\Lambda \alpha_2}{2} \right) \sin(\tau) + \Lambda (\alpha_1 x_1 + x_2) \cos(2\tau) + \\ + \frac{A \Lambda \alpha_2}{2} \cos(3\tau) + \frac{B \Lambda \alpha_2}{2} \sin(3\tau) = 0.$$

Оскільки потрібно знайти періодичні розв'язки системи (6), необхідно таким чином підібрати значення коефіцієнтів A, B, α_i , щоб виключити резонансні члени. Виконаємо послідовно необхідні підстановки, після ітераційного розв'язку системи рівнянь (6) отримаємо дві групи коефіцієнтів

$$\alpha_1 = -\frac{\Lambda}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{7\Lambda^2}{32}; \quad \alpha_3 = -\frac{39\Lambda^3}{512} \quad \text{і} \quad \alpha_1 = \frac{\Lambda}{2}; \quad \alpha_2 = \frac{7\Lambda^2}{32}; \quad \alpha_3 = \frac{39\Lambda^3}{512},$$

які визначають першу область нестійкості за допомогою нерівностей

$$1 - \frac{\Lambda}{2} \mu + \frac{7\Lambda^2}{32} \mu^2 - \frac{39\Lambda^3}{512} \mu^3 + \dots \leq \lambda^2 \leq 1 + \frac{\Lambda}{2} \mu + \frac{7\Lambda^2}{32} \mu^2 + \frac{39\Lambda^3}{512} \mu^3 + \dots \quad (7)$$

Для побудови границь другої області нестійкості (якій відповідає $n = 2$) вважаємо

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \mu^3 x_3(\tau); \quad \lambda^2 = 4 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \mu^3 \alpha_3$$

і після підстановки та приведення відповідних доданків отримаємо систему взаємозв'язаних рівнянь для функцій $x_i(\tau)$

$$\ddot{x}_0 + 4x_0 = 0; \quad \ddot{x}_1 + 4x_1 + \alpha_1 x_0 + 4\Lambda \cos(2\tau) x_0 = 0;$$

$$\ddot{x}_2 + 4x_2 + \alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1 + (\alpha_1 \Lambda x_0 + 4\Lambda x_1) \cos(2\tau) = 0;$$

$$\ddot{x}_3 + 4x_3 + \alpha_3 x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + (\Lambda \alpha_2 x_0 + \Lambda \alpha_1 x_1 + 4\Lambda x_2) \cos(2\tau) = 0,$$

періодичним розв'язкам якої відповідають групи коефіцієнтів

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \frac{5\Lambda^2}{2}; \quad \alpha_3 = 0 \quad \text{і} \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = -\frac{\Lambda^2}{2}; \quad \alpha_3 = 0,$$

які визначають другу область нестійкості за допомогою нерівностей

$$4 - \frac{\Lambda^2}{3} \mu^2 + \dots \leq \lambda^2 \leq 4 + \frac{5\Lambda^2}{3} \mu^2 + \dots$$

Для побудови границь третьої області нестійкості (якій відповідає $n = 3$) вважаємо

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \mu^3 x_3(\tau); \quad \lambda^2 = 9 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \mu^3 \alpha_3$$

і після підстановки та приведення відповідних доданків отримаємо систему взаємозв'язаних рівнянь для функцій $x_i(\tau)$

$$\ddot{x}_0 + 9x_0 = 0, \quad \ddot{x}_1 + 9x_1 + \alpha_1 x_0 + 9\Lambda \cos(2\tau) x_0 = 0;$$

$$\ddot{x}_2 + 9x_2 + \alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1 + (\alpha_1 \Lambda x_0 + 9\Lambda x_1) \cos(2\tau) = 0;$$

$$\ddot{x}_3 + 9x_3 + \alpha_3 x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + (\Lambda \alpha_2 x_0 + \Lambda \alpha_1 x_1 + 9\Lambda x_2) \cos(2\tau) = 0,$$

періодичним розв'язкам якої відповідають групи коефіцієнтів

$$\alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \frac{81\Lambda^2}{64}; \quad \alpha_3 = \frac{759\Lambda^2}{512} \quad \text{і} \quad \alpha_1 = 0; \quad \alpha_2 = \frac{81\Lambda^2}{64}; \quad \alpha_3 = -\frac{759\Lambda^2}{512},$$

які визначають третю область нестійкості за допомогою нерівностей

$$9 + \frac{81\Lambda^2}{64} \mu^2 - \frac{729\Lambda^3}{512} \mu^3 + \dots \leq \lambda^2 \leq 9 + \frac{81\Lambda^2}{64} \mu^2 + \frac{729\Lambda^3}{512} \mu^3 + \dots \quad (8)$$

З'ясуємо, як нелінійності в системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею» впливають на діаграму стійкості. Для цього на основі системи (1) – (2) випишемо нелінійне диференціальне рівняння для форми з нижчою частотою – першої антисиметричної форми a_1 – при наявності зовнішнього вертикального збурення резервуара $\varepsilon_z = H_z \cos(pt)$ у вигляді

$$\begin{aligned} & \left(\beta_{11}^q + \gamma_{111}^q a_1 + \delta_{1111}^q a_1^2 \right) \ddot{a}_1 - \left(B_1^{1z} + B_{11}^{2z} a_1 + B_{111}^{3z} a_1^2 + B_{1111}^{4z} a_1^3 \right) H p^2 \cos(pt) + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{111}^q \dot{a}_1^2 + \delta_{1111}^q \dot{a}_1^2 a_1 + g N_1 a_1 = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

та за допомогою раніш використаних трансформацій запишемо це рівняння у канонічній формі Айнса – Стретта

$$\begin{aligned} & \ddot{x} + \lambda^2 \left(1 + \mu \Lambda_1 \cos(2\tau) + \mu^2 \Lambda_2 \cos(2\tau) x + \mu^3 \Lambda_3 \cos(2\tau) x^2 \right) x + \\ & + \mu^2 \left(C_{21} \dot{x}^2 + C_{22} x^2 \right) + \mu^3 \left(C_{31} \dot{x}^2 x + C_{32} x^3 \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для побудови границь першої області нестійкості для нелінійного параметричного збурення будемо розклади амплітуди і частотного параметра у вигляді, аналогічному лінійному, тобто

$$x(\tau) = A \cos(\tau) + B \sin(\tau) + \mu x_1(\tau) + \mu^2 x_2(\tau) + \mu^3 x_3(\tau); \quad \lambda^2 = 1 + \mu \alpha_1 + \mu^2 \alpha_2 + \mu^3 \alpha_3$$

і після підстановки та приведення відповідних доданків отримаємо систему взаємозв'язаних рівнянь для функцій $x_i(\tau)$

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_0 + x_0 = 0; \quad \ddot{x}_1 + x_1 + \alpha_1 x_0 + \Lambda_1 \cos(2\tau) x_0 = 0; \\ & \ddot{x}_2 + x_2 + \alpha_2 x_0 + \alpha_1 x_1 + \left(\Lambda_2 x_0^2 + \alpha_1 \Lambda_1 x_0 + \Lambda_1 x_1 \right) \cos(2\tau) + C_{21} \dot{x}_0^2 + C_{22} x_0^2 = 0; \\ & \ddot{x}_3 + x_3 + \alpha_3 x_0 + \alpha_2 x_1 + \alpha_1 x_2 + \left(\Lambda_3 x_0^3 + \alpha_1 \Lambda_2 x_0^2 + 2\Lambda_2 x_0 x_1 + \alpha_2 \Lambda_1 x_0 + \alpha_1 \Lambda_1 x_1 + \right. \\ & \left. + \Lambda_1 x_2 \right) \cos(2\tau) + 2C_{21} \dot{x}_0 \dot{x}_1 + 2C_{21} x_0 x_1 + C_{31} \dot{x}_0^2 x_0 + C_{32} x_0^3 = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отримаємо відразу ж розв'язок першого рівняння системи (11) у вигляді

$$x_0 = A_0 \cos(\tau) + B_0 \sin(\tau),$$

підставимо його в друге рівняння системи (11) і отримаємо

$$\ddot{x}_1 + x_1 + A_0 \left(\alpha_1 + \frac{\Lambda_1}{2} \right) \cos(\tau) + B_0 \left(\alpha_1 - \frac{\Lambda_1}{2} \right) \cos(\tau) + \frac{A_0 \Lambda_1}{2} \cos(3\tau) + \frac{B_0 \Lambda_1}{2} \sin(3\tau) = 0,$$

періодичним розв'язкам якого відповідають значення коефіцієнтів $\alpha_1 = -\Lambda/2$, $A_0 = 1$, $B_0 = 0$. Із визначеними значеннями параметрів друге рівняння системи (11) має вигляд

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \frac{\Lambda_1}{2} \cos(3\tau) = 0$$

і, відповідно, розв'язок

$$x_1 = A_1 \cos(\tau) + B_1 \sin(\tau) + \frac{\Lambda_1}{2} \cos(3\tau) = 0.$$

Для отримання періодичного розв'язку третього рівняння системи (11) призначаємо значення параметру $A_1 = 0$, підставляємо вираз для x_1 у третє рівняння системи (11) і отримаємо такий його вираз:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 + \left(\alpha_2 - \frac{7\Lambda_1^2}{32} \right) \cos(\tau) + \frac{1}{2} (\Lambda_2 + C_{22} - C_{21}) \cos(2\tau) + \left(\frac{1}{2} \Lambda_1 B_1 - \frac{9}{32} \Lambda_1^2 \right) \cos(2\tau) + \\ + \frac{\Lambda_2}{4} \cos(4\tau) + \frac{\Lambda_1^2}{32} \cos(5\tau) + \frac{1}{2} (\Lambda_2 + C_{22} + C_{21}) = 0. \end{aligned}$$

В третьому рівнянні усуваємо резонансні члени, призначаючи значення параметру $\alpha_2 = (7\Lambda_1^2)/32$. Здійснивши таку ж саму процедуру для четвертого рівняння системи (11), отримаємо значення параметру $\alpha_3 = -\frac{39\Lambda_1^3}{512} - \frac{\Lambda_3}{2} - \frac{C_{31}}{4} - \frac{3C_{32}}{4}$. Параметри для другої границі області стійкості знаходяться ідентично, тому в результаті визначимо першу область нестійкості у нелінійному випадку за допомогою нерівностей

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Lambda_1}{2} \mu + \frac{7\Lambda_1^2}{32} \mu^2 - \left(\frac{39\Lambda_1^3}{512} + \frac{\Lambda_3}{2} + \frac{C_{31}}{4} + \frac{3C_{32}}{4} \right) \mu^3 + \dots \leq \lambda^2 \leq 1 + \\ + \frac{\Lambda_1}{2} \mu + \frac{7\Lambda_1^2}{32} \mu^2 + \left(\frac{39\Lambda_1^3}{512} + \frac{\Lambda_3}{2} - \frac{C_{31}}{4} - \frac{3C_{32}}{4} \right) \mu^3 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Для побудови границь зон другого та третього резонансу у нелінійному випадку необхідно врахування членів більш високих порядків малості, тому отримані результати не відрізняються від рівнянь, побудованих на основі рівняння Мать'є.

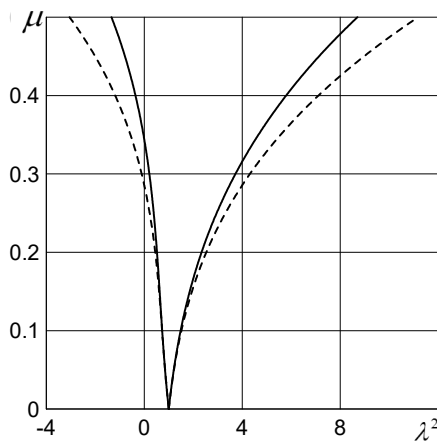


Рис. 1

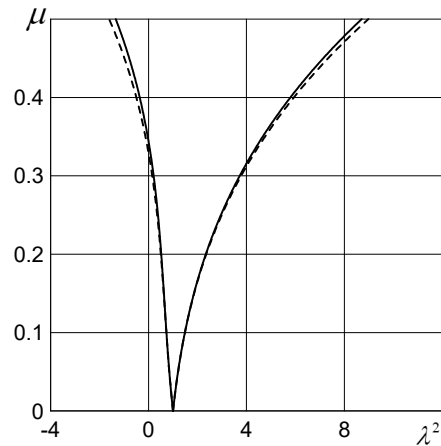


Рис. 2

Побудуємо графіки діаграми стійкості параметричних коливань в системі з використанням отриманих формул (7) та (12). Порівняємо отримані результати з результатами робіт [10 – 12], в яких побудовано діаграми стійкості на основі методу Гальоркіна. На рис. 1 наведено границі зони першого параметричного резонансу, отримані методом Гальоркіна (суцільна лінія) та методом малого параметру (штрихова лінія). Як видно з графіків, до значення малого параметру $\mu \leq 0,2$ області практично повністю співпадають, а для випадку $\mu > 0,2$ необхідно провести додаткове дослідження щодо границь застосування методу Гальоркіна. На рис. 2 також наведено зони першого параметричного резонансу, які побудовані в даній роботі методом малого параметру з використанням лінійної (суцільна лінія) та нелінійної (штрихова лінія) моделей параметричних коливань системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею». Як можна бачити з графіків, зони параметричного резонансу на основі лінійної та нелінійної моделей практично співпадають, однак цей результат також потребує додаткового дослідження.

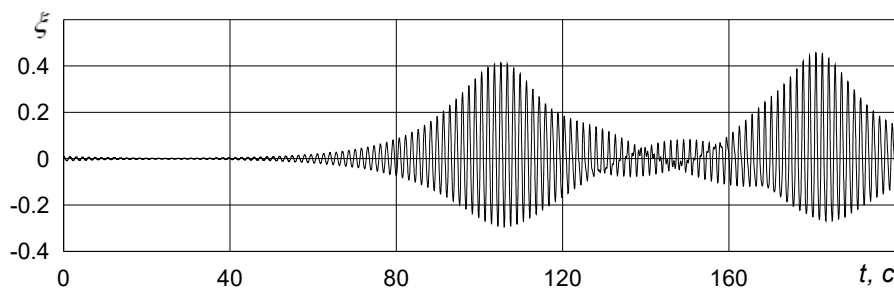


Рис. 3.

Коректність побудованої діаграми стійкості була перевірена в обчислювальному експерименті. Резервуар рухався вертикально за заданим гармонічним законом з амплітудою та частотою, яка знаходиться в зоні нестійкості. Початкове збурення вільної поверхні $\xi(0) = 0,01R$. На рис. 3 приведено залежність амплітуди коливань вільної поверхні від часу на стінці резервуара. Як можна бачити з графіку, при наявності малого початкового збурення амплітуди коливань вільної поверхні досягають значень в нелінійному діапазоні параметрів, а тому можна зробити висновок про вхід системи в параметричний резонанс.

Висновки.

В роботі в аналітичному вигляді побудовано діаграми стійкості параметричних коливань механічної системи «резервуар – рідина з вільною поверхнею» в класичній задачі Фарадея. На відміну від відомих результатів досліджень, діаграма стійкості побудована на основі нелінійного рівняння коливань вільної поверхні рідини, перетвореного у форму Айнса – Стретта. Для побудови рівнянь границь стійкості було використано теорію збурень, зокрема, метод малого параметра. На прикладі руху циліндричного резервуара показано, що наявність кубічних нелінійностей в рівнянні параметричних коливань вільної поверхні рідини суттєво впливає тільки на розташування першої зони нестійкості (параметричного резонансу). Вплив нелінійностей третього порядку малості в рівняннях границь зон другого та третього резонансу може визначатися лише при врахуванні в моделі нелінійностей більш високих порядків малості.

РЕЗЮМЕ. Для класичної задачі Фарадея, яка описує умови та характер розвитку параметричного резонансу в механічній системі «резервуар – рідина з вільною поверхнею», побудовано в аналітичному вигляді діаграму стійкості на основі нелінійного рівняння коливань вільної поверхні рідини з урахуванням нелінійностей третього порядку малості. Результати досліджень показали, що наяв-

ність кубічних нелінійностей в рівнянні параметричних коливань вільної поверхні рідини суттєво впливає тільки на рівняння границь першої зони нестійкості (параметричного резонансу). Для врахування впливу нелінійностей третього порядку малості в рівняннях границь зон другого та третього резонансу необхідно в розрахунковій моделі враховувати нелінійності більш високих порядків малості.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: задача Фарадея, параметричний резонанс, параметричні коливання, резервуар з рідиною з вільною поверхнею, діаграми стійкості.

1. *Лимарченко О.С., Ясинский В.В.* Нелинейная динамика конструкций с жидкостью. – Киев: НТТУ КПИ, 1997. – 338 с.
2. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – Москва: ГИТТЛ, 1956. – 492 с.
3. *Benjamin T.B., Ursell F.* The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion // *Proc. R. Soc. Lond. A.* – 1954. – **225**, N 1163, – P. 505 – 515.
4. *Faraday M.* On the forms and states assumed by fluids in contact vibrating elastic surfaces // *Phil. Trans. of the Royal Society of London.* – 1831. – **121**. – P. 319 – 346.
5. *Ibrahim R.A.* Liquid Sloshing Dynamics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2005. – 970 p.
6. *Ibrahim R.* Recent advances in physics of fluid parametric sloshing and related problems // *J. of Fluid Engng.* – September 2015. – **135**. – P. 090801-1 – 090801-52.
7. *Ikeda T.* Autoparametric Resonances in Elastic Structures Carrying Two Rectangular Tanks Partially Filled with Liquid // *J. Sound and Vibr.* – 2007. – **302**, N 4 – 5. – P. 657 – 682.
8. *Ikeda T., Murakami Sh.* Nonlinear Vibrations of Elastic Structures Containing a Cylindrical Liquid Tank under Vertical Excitation // *J. Syst. Design and Dynam.* – 2008. – **2**, N 3. – P. 822 – 836.
9. *Ikeda T., Murakami Sh., Ushio Sh.* Nonlinear Parametric Vibrations of Elastic Structures Containing Two Cylindrical Liquid-Filled Tanks // *J. Syst. Design and Dynam.* – 2009. – **3**, N 1. – P. 120 – 134.
10. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Mel'nik V.N., Semenova I.Yu.* Problem of the Parametric Oscillations of a Noncylindrical Tank Partially Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2016. – **52**, N 6. – P. 599 – 604.
11. *Konstantinov A.V., Limarchenko O.S., Mel'nik V.N., Semenova I.Yu.* Generalizing the Faraday Problem of the Parametric Oscillations of a Cylindrical Tank Partially Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2017. – **53**, N 1. – P. 59 – 66.
12. *Limarchenko O.S., Konstantinov O.V.* Generalizations of the Faraday problem in mechanical system «reservoir–liquid with a free surface» // *Mathematical Modeling and Computing.* – 2014. – **1**, N 1. – P. 45 – 60.
13. *Mathiessen L.* Akustische Versuche, die kleinsten transversalwellen der Flüssigkeiten betreffend // *Annalen der Physik.* – 1868. – **134**. – P. 107 – 117.
14. *Mathieu E.* Memoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique // *J. Math. Pures Appl.* – 1868. – **13**. – P. 137 – 203.
15. *Rayleigh J.W.S.* Deep water waves, progressive or stationary, to the third order of approximation // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1915. – **91**. – P. 345 – 353.
16. *Yuan X., Su Y., Xie P.* Frequency Characteristics of Sloshing Resonance in a Three-Dimensional Shallow-Water Rectangular Tank // *J. Mar. Sci. Eng.* – 2022. – **10**. – P. 1792, 1 – 13.

Надійшла 02.08.2023

Затверджена до друку 16.04.2024