

В. М. Юрчук

КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ ВЕЛИЧИННИ РАДІУСА ЦИЛІНДРА НА ПАРАМЕТРИ КРУТИЛЬНОЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Гесстєрова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: vasil_2008@ukr.net

Abstract. Using computer modeling, the effect of the cylinder radius on the nature of the amplitude distribution of the elastic torsional wave propagating in a circular cylinder, which deforms elastically nonlinearly, is analyzed.

Key words: nonlinearly elastic torsional wave, computer modeling, approximate approach, cylinder's radius, zeros distribution.

Вступ.

Науковий інтерес до крутильних хвиль є постійним і нові наукові результати регулярно з'являються в ряді провідних наукових журналів світу. Зокрема, за останнє десятиліття були опубліковані десятки статей з результатами нових досліджень крутильних хвиль [1 – 12].

Крутильні хвилі є одним з класичних типів хвиль. Вони описані в книгах з теорії хвиль у значно меншій мірі порівняно з об'ємними, плоскими, циліндричними, сферичними, поверхневими хвилями. Як правило, йдеться про задачу щодо поширення крутильних хвиль вздовж осі симетрії кругового циліндра. В механіці класичними вважаються пружні крутильні хвилі, аналіз яких проводиться в рамках лінійної теорії пружності. Дослідження нелінійно пружних крутильних хвиль ще перебуває у стадії розвитку.

1. Нелінійна постановка задачі.

Нелінійна постановка задачі про циліндричні хвилі в рамках нелінійної п'ятиконстантної нелінійної моделі пружного деформування Мернагана описана в статтях [1, 13]. Як відомо, модель Мернагана задається кубічно нелінійним пружним потенціалом [13]

$$W(I_1, I_2, I_3) = \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \frac{1}{3} A I_3 + B I_1 I_2 + \frac{1}{3} C I_1^3. \quad (1)$$

Для опису крутильної хвилі в пружному циліндрі кругового поперечного перерізу в [13] використовуються циліндричні координати (r, ϑ, z) і додаткові умови щодо осової симетрії деформівного стану. Особливістю нелінійної конфігурації, що описує крутильну хвилю, є те, що з трьох рівнянь руху нетотожним є лише друге рівняння – рівняння щодо зміщення u_ϑ .

Тоді система з трьох рівнянь руху циліндра спрощується до одного рівняння

$$u_{\vartheta,rr} + (1/r)u_{\vartheta,r} - (1/r^2)u_\vartheta + u_{\vartheta,zz} - (1/v_T^2)u_{\vartheta,tt} = 0, \quad (2)$$

де $v_T = \sqrt{\mu/\rho}$ є фазовою швидкістю зсувної чи плоскої поперечної хвилі в лінійно-пружному матеріалі; μ – модулем зсуву і ρ – густиною цього матеріалу.

Якщо припустити, що колове зміщення u_θ є гармонічним у часі і негармонічним у просторі (тобто, розглядається розв'язок у вигляді хвилі)

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}_g(r) e^{i(k_z z - \omega t)}, \quad (3)$$

то такий розв'язок вважають гармонічною крутильною хвилею, оскільки кожен поперечний переріз циліндра здійснює гармонічне коливання у коловому напрямку з заданою частотою ω у часі і за просторовою координатою z рухається хвиля з довжиною $\lambda = (2\pi/k_z)$ та хвильовим числом k_z . При цьому циліндр піддається деформації кручення і тому хвилю називають крутильною.

Отже, амплітуда хвилі змінюється зі зміною радіуса і визначається в лінійному підході з рівняння

$$\tilde{u}_{g,rr} + (1/r)\tilde{u}_{g,r} + [k_z^2 - k_T^2 - (1/r^2)]\tilde{u}_g = 0. \quad (4)$$

Розв'язок рівняння (4) виражається через циліндричну функцію (функцію Бесселя першого роду і першого індексу), в аргумент якої входить нелінійно невідоме хвильове число

$$\tilde{u}_g(r) = \tilde{u}^0 J_1(\beta r); \quad \beta = \sqrt{k_T^2 - k_z^2}. \quad (5)$$

Отже, при лінійному підході розв'язок у вигляді крутильної хвилі є таким

$$u_g(r, z, t) = \tilde{u}^0 J_1(\beta r) e^{i(k_z z - \omega t)}. \quad (6)$$

В нелінійному підході, реалізованому в [12], хвильове рівняння (4) значно ускладнюється

$$\left\{ (v_T)^2 \left[1 - (1/2)B/\mu \right] \left[(\tilde{u}_{g,r})^2 + \frac{1}{r}\tilde{u}_{g,r}\tilde{u} + \frac{2}{r^2}\tilde{u}_g^2 + (\tilde{u}_{g,z})^2 \right] \right\} \times \\ \times (\tilde{u}_{g,rr} + (1/r)\tilde{u}_{g,r} - (1/r^2) + \omega^2)\tilde{u}_g + \tilde{u}_{g,zz} = 0. \quad (7)$$

Для знаходження амплітуди $\tilde{u}_g$ в [13] запропоновано певне узагальнення наближеного методу обмеження на градієнт зміщення, застосування якого до рівняння (7) з врахуванням представлення хвилі за формулою (6) дає розв'язок у вигляді перших двох наближень (наближене представлення крутильної хвилі):

залежність амплітуди хвилі від радіуса циліндра всередині циліндра (1-ше+2-ге наближення)

$$\tilde{u}_g^{\text{int}(1+2)}(r, z, t) = \tilde{u}^0 J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) + (\tilde{u}^0)^3 r \frac{Bk_T^2}{8\mu} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \times \\ \times \left\{ \frac{(k_T^2 - k_z^2)}{4} \left[J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(J_0\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right) J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] + \left(\frac{2}{r^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1\left(r\sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\} \quad (8)$$

представлення крутильної хвилі (1-ше+2-ге наближення) при її русі вздовж вертикальної координати

У формулі (9) перший доданок відповідає першому наближенню (першій гармоніці), другий доданок відповідає другому наближенню але третій гармоніці.

З отриманого виразу для крутильної хвилі (9) також випливає, що при поширенні хвилі відбуваються два види спотворення. Одне показує еволюцію хвилі при зміні відстані від центру до поверхні циліндра. Інше показує відсутність еволюції: на пове-

рхні циліндра лінійна гармонічна хвиля (перша гармоніка) отримує постійну добавку у вигляді третьої гармоніки. Хвиля спотворюється до вигляду модульованої хвилі, яка не змінюється з відстанню поширення хвилі в осьовому напрямку.

$$\begin{aligned}
u_g^{\text{ext}(1+2)}(r^o, z, t) = & \tilde{u}^o e^{i(k_z z - \omega t)} J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) + \\
& + (\tilde{u}^o)^3 e^{3i(k_z z - \omega t)} r^o \frac{B k_T^2}{8\mu} \left[J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] \times \\
& \times \left\{ \frac{(k_T^2 - k_z^2)}{4} \left[J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 + \right. \\
& + \frac{\sqrt{k_T^2 - k_z^2}}{2r^o} \left[\left(J_0\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) - J_2\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right) J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right] + \\
& \left. + \left(\frac{2}{(r^o)^2} - (k_z)^2 \right) \left[J_1\left(r^o \sqrt{k_T^2 - k_z^2}\right) \right]^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Однак достовірність наближеного представлення (8) регулюється певними обмеженнями – перш за все, це обмеження на профіль хвилі (відношення максимальної амплітуди до довжини хвилі) та на відстань поширення хвилі; крім того, в обмеження входять вибір початкового амплітудного множника, частоти хвилі і матеріалу. Практика комп’ютерного аналізу еволюції хвилі показує, що такий аналіз вносить корективи в розуміння обмежень в наближеному аналізі хвилі.

Хвильове число k_Z і швидкість хвилі $v_Z = (\omega/k_Z)$ в нелінійній задачі про крутильні хвилі визначають, як і для лінійної задачі, з додаткової умови відсутності напружень на бічній поверхні циліндра $r = r^o$. Однак в нелінійному підході всі три напруження на поверхні циліндра включають нелінійні доданки і їх не можна одночасно прирівняти до нуля, оскільки у такому випадку для знаходження однієї невідомої величини – хвильового числа – задаються три рівняння. Тоді задача стає переозначеною. Тут виникає питання переходу від лінійної задачі до спорідненої з нею нелінійної. Характерне для багатьох задач збереження граничних умов при переході від лінійної постановки до нелінійної у задачі про нелінійні крутильні хвилі не виглядає коректним. В граничних умовах нелінійної задачі збережено одну граничну умову щодо дотичного напруження $\sigma_{r,g}$, характерного для крутильної хвилі. Саме ця умова у лінійній постановці трансформується в трансцендентне рівняння для знаходження хвильового числа

$$\beta r^o J_0(\beta r^o) = 2J_1(\beta r^o). \tag{10}$$

Щодо нормального σ_{rr} та дотичного σ_{rz} напружень на поверхні циліндра в нелінійній постановці вважається, що вони не будуть нульовими і можуть бути завжди знайдені при відомому хвильовому числі.

Оскільки рівняння (9) має нескінченну кількість коренів $\beta_k r^o$ ($k = 1, 2, \dots$), то крутильна хвиля має нескінченну кількість мод з відмінними між собою фазовими швидкостями

$$(v_z)_k = v_T \sqrt{1 + \beta^2 (k_z)_k^2}. \tag{11}$$

2. Комп'ютерне моделювання.

Отримана формула (8) описує явище впливу величини радіуса циліндра на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Щоб оцінити кількісно цей вплив у даній роботі проведено комп'ютерне моделювання розподілу амплітуд хвилі всередині циліндра. Розглянута перша мода хвилі, три матеріали, п'ять варіантів радіуса циліндра, один варіант частоти поширення хвилі та початкової максимальної амплітуди. Кожен набір включає графіки з одним профілем (рис. 1 – 5). У кожному наборі графіки відповідають зміні амплітуди хвилі в залежності від радіуса при русі хвилі всередині циліндра. Перші графіки (а) відповідає першому наближенню; другі (б) – другому наближенню, а треті (в) – 1-му та 2-му наближенням разом. Графіки побудовані таким чином, щоб зміна розподілу амплітуд хвилі була спостережувана досить наглядно.

Для числового моделювання вибрано матеріал сталь 11 з наступними характеристиками – $\rho = 0,156 \cdot 10^4$; $\mu = 0,043 \cdot 10^{10}$; $B = -15,24 \cdot 10^{10}$. Далі було знайдено значення першого кореня трансцендентного рівняння (10) і хвильове число $k_T = 190,47$. Хвильове число k_z для кожного варіанта буде своє.

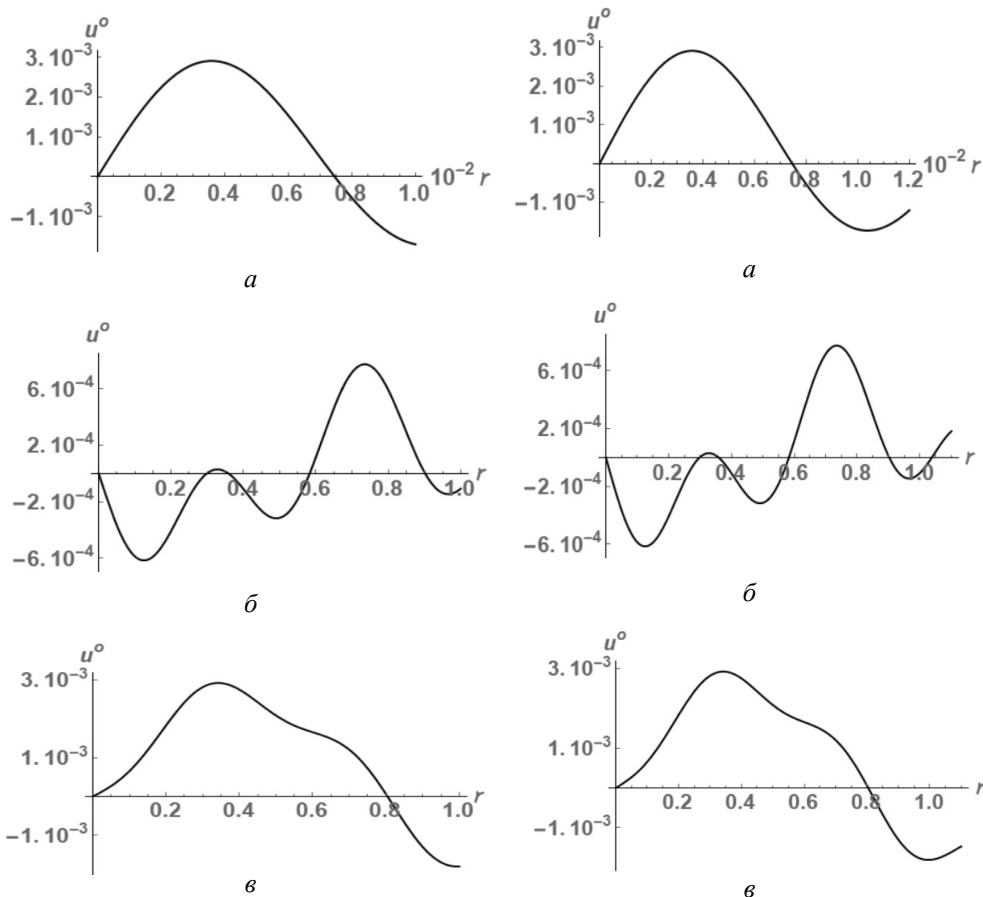
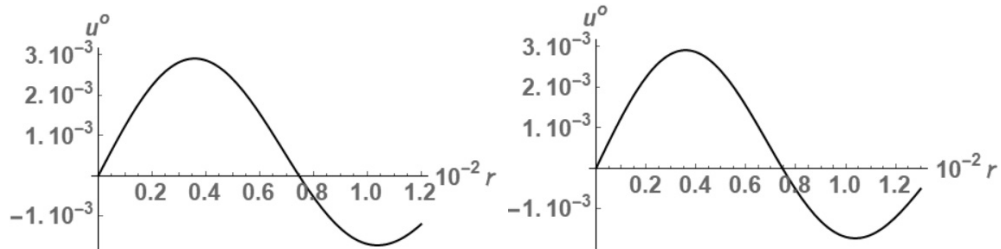


Рис. 1

Рис. 2

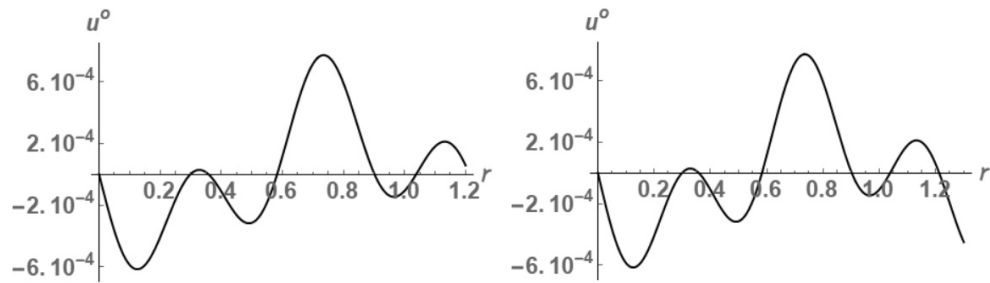
На рис. 1 показані графіки для варіанта: матеріал сталь 11 і значенням параметрів – радіус циліндра $r = 1 \cdot 10^{-2}$ м, амплітуда $u^0 = 5 \cdot 10^{-3}$ і частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

На рис. 2 показані графіки для варіанта: матеріал сталь 11 і значення параметрів – радіус циліндра $r = 1,1 \cdot 10^{-2}$ м, амплітуда $u^0 = 5 \times 10^{-3}$ і частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.



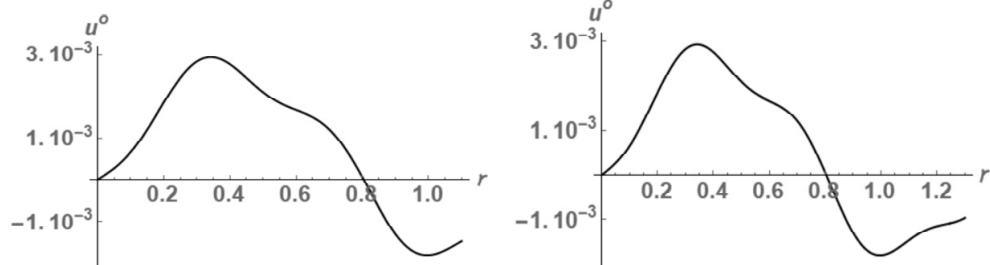
a

a



б

б



в

в

Рис. 3

Рис. 4

На рис. 3 показано графіки для варіанта: матеріал сталь 11 і значення параметрів – радіус циліндра $r = 1,2 \cdot 10^{-2}$ м, амплітуда $u^0 = 5 \times 10^{-3}$ і частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

На рис. 4 показано графіки для варіанта: матеріал сталь 11 і значення параметрів – радіус циліндра $r = 1,3 \cdot 10^{-2}$ м, амплітуда $u^0 = 5 \times 10^{-3}$ і частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

На рис. 5 показано графіки для варіанта: матеріал сталь 11 і таким значенням параметрів – радіус циліндра $r = 1,4 \cdot 10^{-2}$ м, амплітуда $u^0 = 5 \times 10^{-3}$ і частота поширення хвилі $\omega = 1 \cdot 10^2$ Гц.

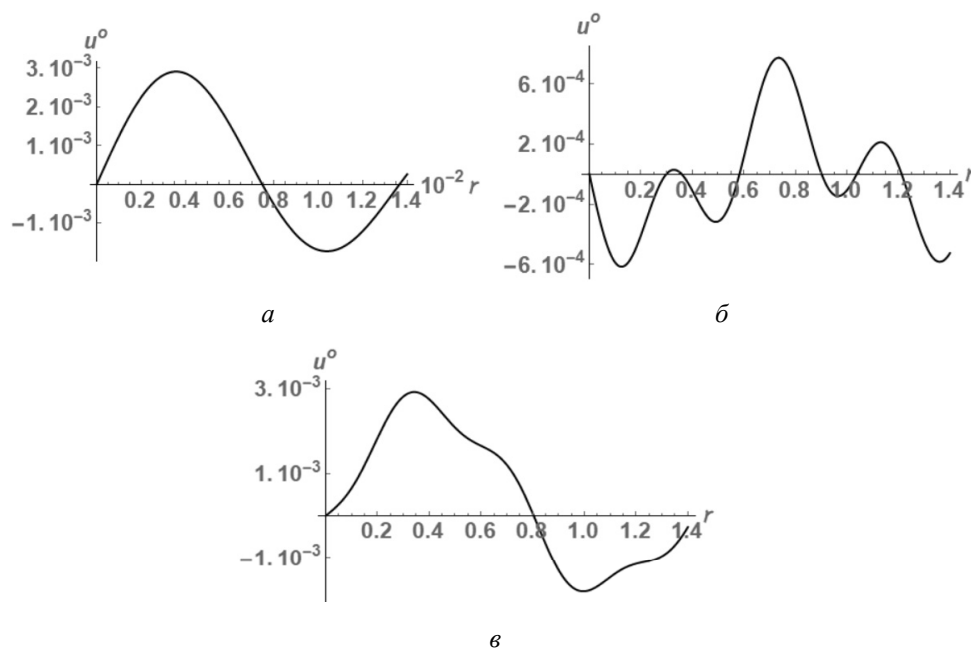


Рис. 5

Графіки рис. 1 – 5 демонструють вплив величини радіуса циліндра, в якому поширюється крутильна хвиля, на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. У цьому розподілі є важливими знак амплітуди, кількість максимумів кривої розподілу, кількість нульових значень амплітуди, суттєвість зміни кривої розподілу при зміні радіуса циліндра і зміни кривої розподілу при врахуванні другого (нелінійного) наближення.

Загальні висновки.

Проведене комп'ютерне моделювання виявило суттєвий вплив зміни величини радіуса крутильної хвилі на розподіл амплітуд хвилі всередині циліндра. Спостережено зміну знаку амплітуди та збільшення кількості максимумів кривої розподілу амплітуд (зокрема, перший максимум завжди є найбільшим, меншим від початкового значення амплітуди і близьким до центру циліндра). Крива розподілу амплітуд завжди має нулі (амплітуда змінює знак) і потенційно можливий варіант, коли на поверхні циліндра хвилі немає (амплітуда є нульовою чи дуже малою). Математичний факт нульового значення амплітуди означає фізично наявність всередині циліндра тонкого циліндричного шару з неспостережуваною амплітудою через її малість. Виявлено значний вплив нелінійності матеріалу на криву розподілу амплітуд – друге (нелінійне) наближення вносить суттєві зміни в розподіл.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. За допомогою комп'ютерного моделювання проаналізовано вплив величини радіуса циліндра на характер розподілу амплітуд пружної крутильної хвилі, що поширюється в круговому циліндрі, який деформується пружно нелінійно.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійно пружна крутильна хвиля, комп'ютерне моделювання, наближений підхід, радіус циліндра, розподіл нулів.

1. Руцицький Я.Я. Пружна крутильна хвиля і відповідне нове нелінійне хвильове рівняння // Доп. НАН України. – 2022. – № 2. – С. 54 – 63.
2. Barton D.A.W., Krauskopf B., Wilson R.E. Nonlinear dynamics of torsional waves in a drill-string model with spatial extent // J Vibration and Control. – 2010. – **16**, N 7-8. – P.1049 – 1065.
3. Belov S.A., Riashchikov D.S., Kolotkov D.Y., Farahani S.V., Molevich N.E., Bezrukov V.V. On collective nature of non-linear torsional Alfvén waves // Monthly Notices Royal Astron Soc. – 2023. – **523**, N 1. – P. 1464 – 1473.
4. Farahani S. V., Nakariakov V.M., Verwichte E., Van Doorsselaere T. Nonlinear evolution of torsional Alfvén waves // Astronomy and Astrophysics. – 2012. – 544. – A127.
5. Kuznetsov S.V. Torsional waves in hyperelastic shells: Appearing shock waves and energy dissipation // Mechanics of Materials. – 2024. – **189**, N 2. – 104905.
6. Mc Collom B.A., Cormack J.M., Hamilton M.F. Nonlinear torsional wave propagation modeled with Lagrangian mechanics // Proc Mtgs Acoust. – 2022. – **48**. – 045006.
7. Naranjo-Pérez J., Riveiro M., Callejas A., Rus G., Melchor J. Nonlinear torsional wave propagation in cylindrical coordinates to assess biomechanical parameters // J. Sound and Vibration. – 2019. – **445**. – P. 103 – 116.
8. Rushchitsky J.J. Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg, Springer, 2014. – 455 p.
9. Rushchitsky J.J., Sinchilo S.V., Yurchuk V.M. New Nonlinear Wave Equations for Analysis of Torsional Elastic Waves and Modeling // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, N 6. – С. 641 – 651.
10. Tomar S., Kaur N. Role of sliding contact interface on torsional waves // The Mathematics Student – 2019. – 88, N 3 – 4. – P. 132 – 145.
11. Torres J., Faris I.H., Callejas A., Reyes-Ortega F., Melchor J., Gonzalez-Andrades M., Rus G. Torsional wave elastography to assess the mechanical properties of the cornea // Nature Scientific Reports. – 2022. – **12**, N 8354. – P. 1 – 11.
12. Shu H., Dong L., Li S., Liu W., Liu S., Wang W., Shi D., Zhao D. Propagation of torsional waves in a thin circular plate of generalized phononic crystals // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2014. – **47**, N 29. – P. 295501 – 295512.
13. Vasheghani Farahani S., Ghanbari E., Ghaffari G., Safari H. Torsional wave propagation in solar tornadoes // Astronomy and Astrophysics. – 2017. – **599**, N A19. – P. 7 – 12.

Надійшла 15.08.2023

Затверджена до друку 11.06.2024