

В.Л.Богданов, В.М.Назаренко, Я.Я.Рушицький
УКРАЇНЦІ В СВІТОВІЙ МЕХАНІЦІ. О.М.ГУЗЬ – ОСНОВОПОЛОЖНИК
ЛІНЕАРИЗОВАНОЇ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ*

*Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: bogdanov@nas.gov.ua;
nazvm1@gmail.com; rushch@inmech.kiev.ua*

Abstract. Brief information is provided about the most famous Ukrainian scientists in the world mechanics, who worked in Ukraine either gained recognition in other countries or were born and lived outside Ukraine. The contribution of the founders of the linearized theory of elasticity of the Belgian Maurice Biot and the Ukrainian Oleksandr Guz in the construction of this theory is shown. The main provisions of the linearized theory of elasticity are briefly described. The main facts of the international recognition of O. Guz are indicated.

Key words: Ukrainians in world mechanics, Stephen Timoshenko, Oleksandr Guz, Moris Biot, linearized theory of elasticity.

§1. Українці в світовій механіці.

Почнемо з постаті Степана Прокоповича Тимошенка як найвідомішого українця в світовій механіці. В історії розвитку механіки С.П. Тимошенку приділена значна і цілком заслужена увага (див., наприклад, [33, 34, 36]), тому тут окреслимо лише основні факти, які свідчать про його світове визнання як вченого-механіка та організатора науки. Професор Тимошенко вважається засновником інженерної механіки у США [37, 38] і є загальноновизнаним авторитетом у світовій механіці, йому належать основоположні результати в теорії пружності, опорі матеріалів, статичі споруд, теорії пластин і оболонок, стійкості пружних систем, теорії коливань та інших напрямках інженерної механіки. Широко відомі його дослідження з історії опору матеріалів і з формування інженерної освіти.

Наведемо тут дві фотографії С.П. Тимошенка, які є недостатньо відомими науковій громадськості (рис. 1). На першій зображений С.П. Тимошенко з рідними братами Сергієм (за фахом архітектор, державний діяч часів Української революції 1917 – 1921 рр.) та Володимиром (за фахом економіст, американський урядовець і викладач університету в США). *Коментар.* Степан Прокопович допоміг братам переїхати зі Східної Європи, де вони проживали після приходу до влади в Україні більшовиків, до США. На другій – С.П. Тимошенко з провідними вченими Інституту механіки під час його відвідання Києва в 1958 році. *Коментар.* На час цього візиту С.П. Тимошенко, напевно, не був особисто знайомий з науковцями інституту, зображеними на другому фото. Можливо, він знав академіка Г.М. Савіна як одного з провідних фахівців в галузі концентрації напружень. На той час Гурій Миколайович Савін уже отримав Сталінську премію за книгу про концентрацію напружень біля отворів [21] і ця книга вже була перекладена англійською мовою. Зате при відвіданні Київського політехнічного інституту С.П. Тимошенко зустрівся з деякими своїми колишніми колегами, з якими він

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

працював у цьому інституті в період 1906 – 1911 років та 1918 – 1920 років, а також побачив установки, прилади і верстати, які він придбав для кафедри опору матеріалів ще в бутність професором КПІ до Першої світової війни.



Рис. 1

Першими вченими, які працювали на теренах сучасної України і відомі у світі своїми науковими результатами в галузі механіки, були професор Харківського університету М.В. Остроградський (середина XIX століття), ректор Львівської політехніки М.Т. Губер (перша половина XX століття) та професор Київського і Донського політехнічних інститутів О.М. Динник (перша половина XX століття). *Коментар.* Перший був етнічним українцем, другий – етнічним поляком, третій мав німецькі корені.

Ще однією вагомою постаттю в світовій механіці є Микола Миколайович Боголюбов (1909 – 1992). Він разом з академіком М.М. Криловим створив відому в світовій механіці наукову школу з нелінійної механіки. Починаючи з 1932 року Боголюбов і Крилов почали в Києві розвивати новий науковий напрям – теорію нелінійних коливань, яку вони назвали нелінійною механікою [22]. Їхні ідеї і фундаментальні результати в галузі нелінійної механіки склали основу багатьох сучасних напрямків механіки.

Оскільки найбільш потужною державою в галузі механіки вже довгий час є США, то слід згадати хоча б двох вчених світового рівня в галузі механіки, які народилися і працювали в США, але мають українські корені. Професор Peter Stepanishen (Петро Михайлович Степанішен, 1914 – 2007) працював в Department of Ocean Engineering, Rod Island University і відомий своїми науковими працями з дослідження пружних і в'язкопружних сейсмічних хвиль. Професор Ted Bohdan Belitshko (Тед Богдан Белічко, 1943 – 2014) працював в Department of Computational Mechanics, Northwestern University і відомий своїми науковими працями в галузі механіки твердого деформівного тіла.

Разом з тим слід зазначити, що всі згадані вище вчені-механіки з українськими коренями або здобули визнання в інших країнах, або народилися і жили за межами України. Символічно, що один з сучасних українських письменників Іван Корсак назвав свою книгу про братів Тимошенків «Борозна у чужому полі». Ця алегорія стосується всіх згаданих вище закордонних вчених українського походження.

§2. О.М. Гузь – основоположник лінеаризованої теорії пружності.

Найвідомішим у світовій механіці українцем, який народився і все життя працює в Україні, можна вважати основоположника лінеаризованої теорії пружності Олександра Миколайовича Гузя [1]. На цій постаті і зосередимо увагу далі.

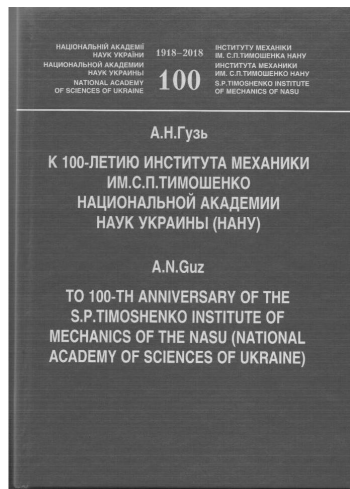


Рис. 2

Основними джерелами при підготовці статті були дві книги [33, 35], зображені на рис. 2, а також публікації двох основоположників лінеаризованої теорії пружності – бельгійця Моріса Біо (Maurice A. Biot, 1905 – 1985) та українця Олександра Гузя (народився у 1939 році) (рис. 3). *Коментар.* Відома в науці сентенція, що для розв’язання задачі треба побудувати розв’язок, а для розв’язання проблеми треба побудувати теорію. Побудована лінеаризована теорія розв’язує давню інженерну проблему про врахування початкових напружень при деформуванні конструкцій. Так коротко можна охарактеризувати лінеаризовану теорію.



Моріс Біо



Олександр Гузь

Рис. 3

Перша робота М.А. Біо, присвячена побудові лінеаризованих співвідношень для опису пружного середовища з початковими деформаціями, була опублікована в 1934 році [23]. Подальший розвиток його досліджень з проблем деформування тіл з початковими напруженнями висвітлено в публікаціях [24 – 29]. Основна книга М.А. Біо, в якій він назвав свій варіант лінеаризованої теорії пружності механікою інкрементальних (тобто додаткових) деформацій (рис. 4), і в якій крім основних співвідношень цієї теорії також наведено численні приклади її застосувань до дослідження плоских (двовимірних) задач, була видана в 1965 році [30]. Детальний огляд робіт М.А. Біо з лінеаризованої теорії пружності наведено в [32].

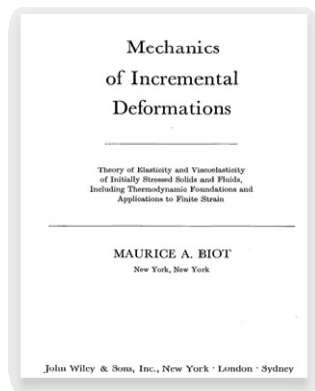


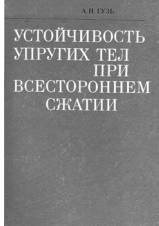
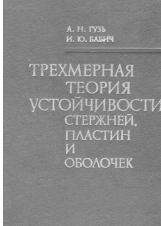
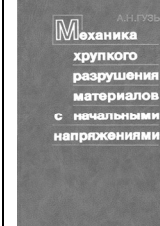
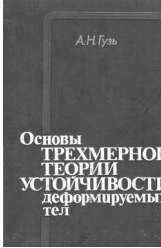
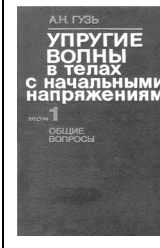
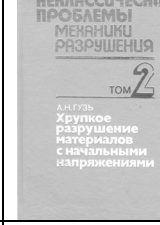
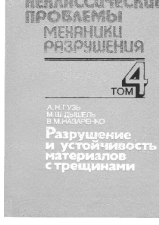
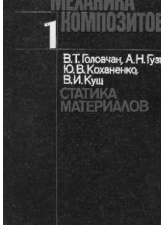
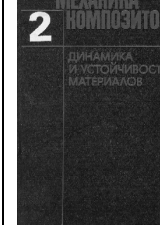
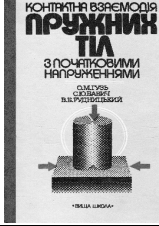
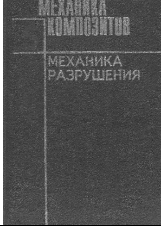
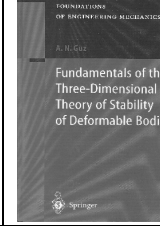
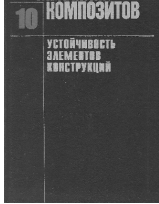
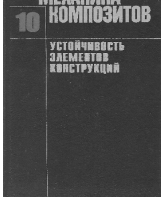
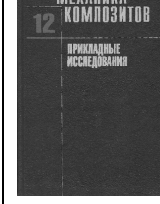
Рис. 4

Ранні публікації О.М. Гузя, присвячені тривимірній лінеаризованій теорії та її застосуванням до дослідження плоских та просторових проблем стійкості пружних, в'язко-пружних і пружно-пластичних однорідних та композитних матеріалів, датуються 1967 – 1970 роками [2 – 16]. Перша його монографія, в якій викладено основи тривимірної лінеаризованої теорії стійкості, вийшла друком у 1971 році [17]. В наступній, опублікованій в 1973 році, монографії О.М. Гузя [18] викладено основні співвідношення лінеаризованої теорії пружності у випадку скінченних (великих) початкових (докритичних) деформацій та наведено розв'язки задач стійкості однорідних тіл та шаруватих і волокнистих композитів.

В подальшому розроблені в роботах О.М. Гузя лінеаризовані підходи були застосовані ним та його учнями до дослідження різноманітних проблем механіки, зокрема, механіки композитів при стисканні, стійкості гірничих виробок, контактної взаємодії тіл з початковими напруженнями, теорії розповсюдження пружних хвиль в попередньо напружених матеріалах, механіки руйнування тіл при стисканні вздовж паралельних тріщин, механіки крихкого руйнування тіл з початковими напруженнями, динаміки попередньо напружених тіл з рідиною.

На рис. 5 зображено монографії О.М. Гузя та його учнів, присвячені лінеаризованій теорії пружності та її застосуванням. Як бачимо, в галузі лінеаризованої теорії пружності О.М. Гузь опублікував 39 монографій. Це вражаюча цифра, що свідчить про дуже широкий спектр застосування розробленого О.М. Гузем загального підходу в рамках лінеаризованої теорії пружності до окремих напрямків механіки матеріалів. Можна образно сказати, що М.А. Біо делікатно започаткував лінеаризовану теорію, а О.М. Гузь її потужно завершив. Три книги, датовані 2020 та 2022 роками, свідчать про те, що в останні роки О.М. Гузь працює над застосуванням підходів лінеаризованої теорії пружності до дослідження неklasичних проблем механіки руйнування.

N1. A.N. Guz. Stability of three-dimensional deformed bodies. – Naukova Dumka, Kiev, 1971, 276 p.	N2. A.N. Guz. Stability of elastic bodies under finite deformations. – Naukova Dumka, Kiev, 1973, 272 p.	N3. A.N. Guz, O.I. Guscha, F.G. Makhort, V.K. Lebedev. Foundations of ultrasonic non-destructive method of stresses determination in solid bodies. – Naukova Dumka, Kiev, 1974, 108 p.
N4. A.N. Guz, A.P. Zhuk, F.G. Makhort. Waves in a layer with initial stresses. – Naukova Dumka, Kiev, 1976, 104 p.	N5. A.N. Guz. Foundations of stability theory of mine workings. – Naukova Dumka, Kiev, 1977, 204 p.	N6. A.N. Guz, F.G. Makhort, O.I. Guscha. Introduction in acoustoelasticity. – Naukova Dumka, Kiev, 1977, 152 p.

	N7. A.N. Guz. Stability of elastic bodies under omni-directional compression. – Naukova Dumka, Kiev, 1979, 144 p.		N8. A.N. Guz, I.Yu. Babich. Three-dimensional stability theory of rods, plates and shells. – Vyshcha Shkola, Kiev, 1980, 168 p.		N9. A.N. Guz. Mechanics of brittle fracture of materials with initial stresses. – Naukova Dumka, Kiev, 1983, 296 p.
	N10. A.N. Guz, I.Yu. Babich. Spatial problems of elasticity and plasticity theory. In 6 vols, V.4. Three-dimensional stability theory of deformed bodies. – Naukova Dumka, Kiev, 1985, 280 p.		N11. A.N. Guz. Foundations of three-dimensional stability theory of deformed bodies. – Vyshcha Shkola, Kiev, 1986, 512 p.		N12. A.N. Guz. Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols., V.1. General problems. – Naukova Dumka, Kiev, 1986, 374 p.
	N13. A.N. Guz. Elastic waves in bodies with initial stresses. In 2 vols. V.2. Propagation regularities. – Naukova Dumka, Kiev, 1986, 536 p.		N14. A.N. Guz. Failure mechanics of composite materials under compression. – Naukova Dumka, Kiev, 1990, 630 p.		N15. A.N. Guz. Non-classical problems of fracture mechanics. In 4 vols. V.2. Brittle fracture of materials with initial stresses. – Naukova Dumka, Kiev, 1991, 288 p.
	N16. A.N. Guz, M.Sh. Dyshef', V.M. Nazarenko Nonclassical problems of fracture mechanics. In 4 vols., V.4, B.1. Fracture and stability of materials with cracks. – Naukova Dumka, Kiev, 1992, 454 p.		N17. A.N. Guz, V.T. Golovchan, Yu.V. Kohanenko, V.N. Kusch. Mechanics of composites. In 12 vols., V.1. Statics of materials. – Naukova Dumka, Kiev, 1993, 454 p.		N18. A.N. Guz, I.Yu. Babich, N.A. Shulga, A.S. Kosmodamiansky Mechanics of composites. In 12 vols., V.2. Dynamics and stability of materials. – Naukova Dumka, Kiev, 1993, 430 p.
	N19. A.N. Guz, S.Yu. Babich, V.B. Rudnitsky. Contact problems for elastic bodies with initial stresses. – Vyshcha Shkola, Kiev, 1995, 304 p.		N20. A.N. Guz, A.A. Kaminsky, V.M. Nazarenko, I.A. Guz and oth. Mechanics of composites. In 12 vols., V.5. Fracture mechanics. – "A.C.K.", Kiev, 1996, 340 p.		N21. A.N. Guz. Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Springer, 1999, 555 p.
	N22. A.N. Guz, I.Ju. Babich, D.V. Babich, I.A. Guz and oth. Mechanics of composites. In 12 vols., V.10. Stability of members of structures. – "A.C.K.", Kiev, 2001, 376 p.		N23. A.N. Guz, I.Ju. Babich, I.A. Guz and oth. Mechanics of composites. In 12 vols., V.10. Stability of members of structures. – "A.C.K.", Kiev, 2001, 376 p.		N24. A.N. Guz, L.P. Khoroshun, M.I. Mikhailova, and oth. Mechanics of composites. In 12 vols., V.12. Applied investigations. – "A.C.K." Kiev, 2004, 400 p.

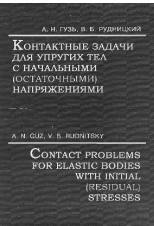
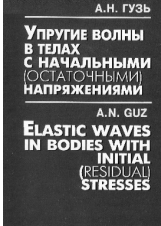
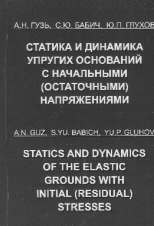
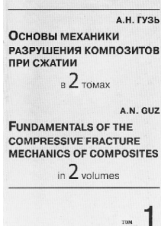
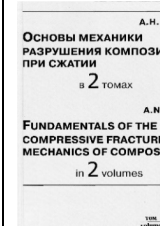
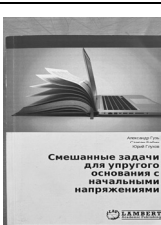
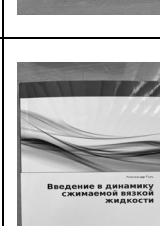
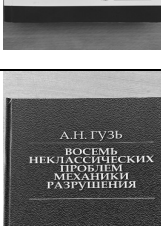
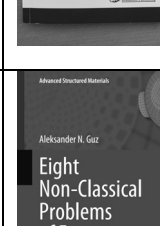
	N25. A.N. Guz, V.B. Rudnitsky. Contact problems for elastic bodies with initial (residual) stresses. – «Melnik», Khmel'niksky, 2004, 692p.		N26. A.N. Guz. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. – «A.C.K.», Kiev, 2004, 672 p.		N27. A.N. Guz, V.B. Rudnitsky. Fundamentals of the contact interaction of elastic bodies with initial (residual) stresses. – «Melnik», Khmel'niksky, 2006, 710 p.
	N28. A.N. Guz, S.Yu. Babich, Yu.P. Glukhov. Statics and dynamics of the elastic grounds with initial (residual) stresses. – Kremen'chug «Press-line», 2007, 796 p.		N29. A.N. Guz. Fundamentals of the compressive fracture mechanics of composites. In 2 vols., V.1. Fracture in structure of materials. – «Litera», 2008, 592 p.		N30. A.N. Guz. Fundamentals of the compressive fracture mechanics of composites. In 2 vols., V.2. Related mechanisms of fracture. – «Litera», 2008, 736 p.
	N31. A.N. Guz, V.A. Decret. Model of short fibers in the theory of stability of composites. – LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2015, 315 p.		N32. A. Guz, S. Babich, Yu. Glukhov. Mixed problems for the elastic foundation with initial stresses. – LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2015, 468 p.		N33. A.N. Guz. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Part 1. – LAMBERT Academic Publishing Saarbrücken, 2016, 501 p.
	N34. A.N. Guz. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. Part 2. – LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2016, 505 p.		N35. A.N. Guz, V.L. Bogdanov, V.N. Nazarenko. United approach in non-classical problems of fracture mechanics. – LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2017, 528 p.		N36. A.N. Guz. Introduction into dynamics of compressible viscous fluid. – LAMBERT Academic Publishing, Saarbrücken, 2017, 244 p.
	N37. A.N. Guz, V.L. Bogdanov, V.N. Nazarenko. Fracture of materials under compression along cracks. – Springer, Cham, 2020, 490 p.		N38. A.N. Guz. Eight nonclassical problems of fracture mechanics. – Academperiodika, Kyiv, 2020, 400 p.		N39. A.N. Guz. Eight nonclassical problems of fracture mechanics. – Springer, Cham, 2022, 310p.

Рис. 5

§3. Засадничі структурні блоки лінеаризованої теорії пружності.

Основні положення лінеаризованої теорії пружності детально викладено в монографіях О.М. Гузя [17 – 20, 31] і саме ними ми користуватимемося при викладенні матеріалів цього параграфа.

Блок 1. Лінеаризована теорія пружності побудована на основі понять, підходів і моделей нелінійної теорії пружності. Базовими поняттями тут є поняття початкового та актуального станів пружного тіла-середовища. Спочатку вводиться поняття тіла $\mathcal{B}$ в евклідовому просторі $\mathbb{R}^3$.

Далі потрібні чотири означення.

Означення 1. Рух $x = \chi(X, t)$, $X \in \mathcal{B}$, $t \in \mathbb{R}^1$ є відображенням множини $\mathcal{B}$ на область $\chi(\mathcal{B}, t)$ простору $\mathbb{R}^3$ в певний момент часу t .

Означення 2. Конфігурація $\chi(\mathcal{B}, t)$ є зображенням функції χ в заданий момент t .

Означення 3. Актуальна конфігурація є конфігурацією тіла в момент часу t .

Означення 4. Початкова конфігурація є конфігурацією в початковий момент часу.

Початковий стан розглядається як базовий (незбурений) і характерні величини цього стану позначаються індексом нуль. Актуальний стан розуміється як збурений і всі пов'язані з цим станом величини записуються як сума початкових (незбурених) величин та їх збурень.

Додатково до цих двох станів розглядається природний (недеформований) стан.

Блок 2. Характеристиками процесу деформування тіла є:

– вектор зміщення $\vec{u} = \{u^m(X^\alpha, t)\} \equiv \{u^1, u^2, u^3\}$, $u^m(X^\alpha, t) = x^m(X^\alpha, t) - X^m$;

– тензори деформацій – $\varepsilon_{nm}(x^k, t) = (1/2)(u^{n,m} + u^{m,n} + u^{n,i}u^{i,m})$ (Коші-Гріна, Cauchy-Green), $\tilde{\varepsilon}_{\beta\gamma}(X^\alpha, t) = (1/2)(U^{\beta,\gamma} + U^{\gamma,\beta} - U^{\beta,\delta}U^{\delta,\gamma})$ (Альмансі, Almansi);

– перші алгебраїчні інваріанти тензорів деформації

$$I_1(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{ik}g^{ik}; \quad I_2(\varepsilon_{ik}) = \varepsilon_{im}\varepsilon_{nk}g^{ik}g^{nm}; \quad \tilde{I}_1(\tilde{\varepsilon}_{ik}) = \tilde{\varepsilon}_{ik}g^{ik};$$

$$\tilde{I}_2(\tilde{\varepsilon}_{ik}) = \tilde{\varepsilon}_{im}\tilde{\varepsilon}_{nk}g^{ik}g^{nm}; \quad \tilde{I}_3(\tilde{\varepsilon}_{ik}) = \tilde{\varepsilon}_{pm}\tilde{\varepsilon}_{in}\tilde{\varepsilon}_{kq}g^{im}g^{pq}g^{kn};$$

$$I_1 = \text{tr}(\varepsilon) \equiv \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}; \quad \tilde{I}_1 = \text{tr}(\tilde{\varepsilon}) \equiv \tilde{\varepsilon}_{11} + \tilde{\varepsilon}_{22} + \tilde{\varepsilon}_{33};$$

$$\tilde{I}_2 = \tilde{\varepsilon}_{ik}\tilde{\varepsilon}_{ki}; \quad I_3 = \det(\varepsilon) \equiv \varepsilon_{ik}\varepsilon_{km}\varepsilon_{mi}; \quad I_2 = \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}; \quad \tilde{I}_3 = \det(\tilde{\varepsilon}) \equiv \tilde{\varepsilon}_{ik}\tilde{\varepsilon}_{km}\tilde{\varepsilon}_{mi};$$

– тензори напружень – Піоли-Кірхгоффа (Piola-Kirchhoff stress tensor) $t^{nm}(x^k, t)$ та Лагранжа-Коші (Lagrange-Cauchy stress tensor) $\sigma^{ik}(X^\alpha, t)$;

– питома внутрішня енергія (пружний потенціал) $e = e(\varepsilon_{lm})$.

Коментар. Пружний потенціал є базовим поняттям нелінійної теорії пружності і кожен окремо вибраний потенціал визначає модель деформування. На даний час в нелінійній теорії пружності використовуються близько 30 потенціалів-моделей і кожна з них має окрему назву – неогукова, Трелоара, Муні, Рівліна-Сандерса, Огдена, Мернагана, Ланделла-Вільямса і т.д. У свій час класики нелінійної теорії пружності Трусделл та Нолл зазначали, що теорія пружності є послідовністю моделей, і, таким чином, нелінійна теорія пружності і, відповідно, лінеаризована теорія пружності конкретним вибором потенціалу розгалужуються приблизно на 30 варіантів.

Блок 3. Процедура лінеаризації.

Початковий (докритичний, незбурений) стан описується в основному такими характеристиками:

$$u_m^o(x_1, x_2, x_3, t); \quad \varepsilon_{nm}^o(x_1, x_2, x_3, t); \quad \sigma_{ik}^o(x_1, x_2, x_3, t), \dots, e(\varepsilon_{nm}^o), \dots$$

Актуальний (збурений) стан описується в основному такими характеристиками:

$$u_m = u_m^o + u_m'; \quad \varepsilon_{nm} = \varepsilon_{nm}^o + \varepsilon_{nm}'; \quad \sigma_{ik} = \sigma_{ik}^o + \sigma_{ik}', \dots, e(\varepsilon_{nm}), \dots,$$

де $u_m', \varepsilon_{nm}', \sigma_{ik}', \dots$ є збуреннями відповідних величин.

Вкажемо на деякі припущення, які є характерними для лінеаризованої теорії і дуже важливими при подальшій її побудові.

Припущення 1. Значення збурень вважаються малими порівняно з відповідними значеннями незбуреного стану.

Припущення 2. Основні функціональні зв'язки початкового і актуального станів описуються в рамках нелінійної теорії пружності.

Припущення 3. Кожне конкретне функціональне співвідношення є однаковим для початкового і актуального станів. Тобто справедливі такі співвідношення (як правило, нелінійні):

$$y = F(x).$$

На основі останнього припущення формулюється таке *правило лінеаризації*:

– спочатку використовується представлення функції рядом Тейлора в околі початкового значення x^o і з врахуванням малості збурення x

$$y + y^o = F(x^o) + [F'(x)]_{x=x^o} x + (1/2)[F''(x)]_{x=x^o} x^2 + \dots;$$

– далі через малість збурень в ряді зберігаються два перші доданки і враховується співвідношення:

$$y^o = F(x^o); \quad y + y^o = F(x + x^o).$$

Тоді формула спрощується до лінійного наближеного зв'язку між збуреннями y та x з коефіцієнтом $[F'(x)]_{x=x^o}$, який залежить від початкового стану і не залежить від збурень, тобто

$$y \approx [F'(x)]_{x=x^o} x.$$

Таким чином, процедура лінеаризації полягає у заміні нелінійного співвідношення щодо збурень на лінійне.

Блок 4. Лінеаризовані характеристики напружено-деформованого стану мають вигляд:

$$\varepsilon_{nm} = (1/2) \left[(\delta_{nl} + u_{n,l}^o) u_{n,m} + (\delta_{lm} + u_{m,l}^o) u_{m,n} \right]; \quad I_1 = (\delta_{nl} + u_{n,l}^o) u_{n,l};$$

$$I_2 = 2\varepsilon_{kl}^o (\delta_{nl} + u_{n,l}^o) u_{n,k}; \quad I_3 = 3\varepsilon_{kl}^o \varepsilon_{lm}^o (\delta_{nm} + u_{n,m}^o) u_{n,k}; \quad G_{mk}^o (\delta_{nm} + u_{n,m}^o) u_{n,k} = 0;$$

$$G_{mk}^o = \frac{\partial}{\partial (\delta_{mk} + 2\varepsilon_{mk}^o)} \det \|\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij}^o\|.$$

Лінеаризовані рівняння руху є такими:

$$\rho \ddot{u}_i = t_{ik,k} + F_i.$$

Зв'язок між тензорами Піоли-Кірхгоффа і Лагранжа є таким:

$$t_{ik} = \sigma_{ij} (\delta_{nj} + u_{n,j}^o) + \sigma_{ij}^o u_{n,j}.$$

В результаті отримуються лінеаризовані рівняння руху у такому вигляді:

$$\rho \ddot{u}_i = \left[\sigma_{ij} (\delta_{nj} + u_{n,j}^o) + \sigma_{ij}^o u_{n,j} \right]_{,k} + F_i.$$

Ці рівняння є основоположними у всіх роботах О.М. Гузя, його учнів та послідовників.

У побудованій О.М. Гузем теорії акцент зроблено на випадку однорідного початкового (незбуреного) стану. Саме у цьому випадку теорію можна вважати закінченою, оскільки для такого початкового стану побудовано загальні розв'язки лінеаризованих

рівнянь руху (рівноваги). При цьому вводяться поняття головних розтягів (видовжень) $\lambda_i = \text{const}$, з використанням яких характеристики деформованого стану подаються у вигляді:

$$\begin{aligned} u_k^o &= x_i (\lambda_i - 1) \delta_{ik}; \\ \varepsilon_{ik} &= (1/2) (\lambda_i u_{i,k} + \lambda_k u_{k,i}); \quad \varepsilon_{ik}^o = (1/2) ((\lambda_i^o)^2 - 1) \delta_{ik}; \\ I_1 &= \lambda_k u_{k,k}^o; \quad I_2 = (\lambda_k^2 - 1) \lambda_k u_{k,k}^o; \quad I_3 = (3/4) (\lambda_k^2 - 1)^2 \lambda_k u_{k,k}^o; \\ I_1^o &= (1/2) ((\lambda_i^o)^2 - 3); \quad I_2^o = (1/4) ((\lambda_i^o)^2 - 1)^2; \quad I_3^o = (1/8) ((\lambda_i^o)^2 - 1)^3. \end{aligned}$$

Блок 5. В лінеаризованій теорії пружності розрізняються випадки скінченних (великих) і малих початкових деформацій [19, 31].

Випадок скінченних (великих) початкових деформацій. Тут використовуються:

– об’єми V^o та граничні поверхні S^o пружного тіла в початковому (незбуреному) стані;

– об’єми V та граничні поверхні S пружного тіла в збуреному стані.

Також вводяться чотири нові характеристики:

– об’ємні (масові) сили $F_m = F_m^o + F_m'$;

– поверхневі сили $\Sigma_m = \Sigma_m^o + \Sigma_m'$;

– відношення елементарних об’ємів тіла до і після деформації

$$(V^{after} / V^{before}) = (V^{after} / V^{before})^o + (\widehat{V}^{after} / \widehat{V}^{before})';$$

– відношення елементарних площ до і після деформації

$$(S_k^{after} / S_k^{before}) = (S_k^{after} / S_k^{before})^o + (\widehat{S}_k^{after} / \widehat{S}_k^{before})'.$$

З врахуванням введених величин рівняння рівноваги і граничні умови набувають такого вигляду:

$$\left[\sigma_{ij} (\delta_{nj} + u_{n,j}^o) + \sigma_{ij}^o u_{n,j} \right]_{,k} + F_i^o (V^{after} / V^{before}) + F_i (V^{after} / V^{before})^o = 0;$$

$$\Sigma_i^o (V^{after} / V^{before}) + \Sigma_i (V^{after} / V^{before})^o = n_i \left[\sigma_{ij} (\delta_{nj} + u_{n,j}^o) + \sigma_{ij}^o u_{n,j} \right];$$

$$(u_k)_{(x_1, x_2, x_3) \in S} = 0.$$

Випадок малих початкових деформацій. У цьому випадку деформації описуються дещо простіше, а співвідношення лінеаризованої теорії малих початкових деформацій отримуються шляхом послідовних спрощень з співвідношень лінеаризованої теорії скінченних деформацій. Цей випадок має два основні, відмінні між собою, варіанти.

Перший варіант теорії малих початкових деформацій. Деформації не є великими, але є нелінійними. При цьому в початковому стані не враховуються зміни лінійних розмірів, площ та об’ємів. Рівняння рівноваги і граничні умови при цьому спрощуються до такого вигляду:

$$\left[\sigma_{ij} (\delta_{nj} + u_{n,j}^o) + \sigma_{ij}^o u_{n,j} \right]_{,k} + F_i^o + F_i = 0;$$

$$\Sigma_i^o + \Sigma_i = n_i \left[\sigma_{ij} (\delta_{nj} + u_{n,j}^o) + \sigma_{ij}^o u_{n,j} \right].$$

Другий варіант теорії малих початкових деформацій. Додатково до припущень першого варіанту вважається, що початковий стан можна визначити відповідно до геометрично лінійної теорії. Початкові деформації є малими і лінійними.

Коментар. Розроблена в роботах М.А. Біо теорія інкрементальних деформацій [30] з точки зору наведеної вище класифікації відноситься до другого варіанту лінеаризованої теорії малих початкових деформацій; в ній, крім вказаних вище припущень, додатково вводяться спрощення і перетворення, що впливають з певних фізичних міркувань [32].

Блок 6. Загальні розв'язки. Розглянемо випадок стисливого тіла. Лінеаризовані рівняння руху в переміщеннях в декартових координатах $x_n \equiv x^n$ у випадку однорідного початкового стану є такими:

$$L_{m\alpha} u_\alpha = 0; \quad x_n \in V; \quad m, \alpha = 1, 2, 3;$$

$$L_{11} = \omega_{1111} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2112} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega_{3113} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}; \quad L_{12} \equiv L_{21} = (\omega_{1122} + \omega_{2121}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2};$$

$$L_{13} \equiv L_{31} = (\omega_{1133} + \omega_{3131}) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}; \quad L_{22} = \omega_{1221} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2222} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega_{3223} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial \tau^2};$$

$$L_{23} \equiv L_{32} = (\omega_{2233} + \omega_{3232}) \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}; \quad L_{33} = \omega_{1331} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \omega_{2332} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \omega_{3333} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Тоді загальний розв'язок через три потенціали має вигляд:

$$u_\alpha^{(j)} = \left[\frac{\partial(\det \|L_{rs}\|)}{\partial(L_{j\alpha})} \right] \Phi^j; \quad j, \alpha = 1, 2, 3.$$

Лінеаризовані рівняння руху та їх загальні розв'язки, а також ефективне застосування лінеаризованого підходу до низки проблем механіки, які не можуть бути досліджені в рамках лінійної теорії пружності, виявлення цілої низки нових механічних ефектів є найбільш вагомими і новаторськими елементами побудованої О.М. Гузем лінеаризованої теорії пружності.

§4. Прикінцеві зауваження.

Вкажемо галузі механіки, де лінеаризована теорія пружності застосовувалась О.М. Гузем і його учнями найбільш успішно. До них належать: стійкість матеріалів і конструкцій (зокрема, задачі внутрішньої нестійкості композитів); поширення хвиль в тілах з початковими (залишковими) напруженнями; контактні задачі для тіл з початковими (залишковими) напруженнями; стійкість гірничих виробок; взаємодія рідини і попередньо напруженого твердого тіла; механіка руйнування з урахуванням діючих вздовж тріщин зусиль. *Коментар.* Як видно з рис. 5, в кожній галузі О.М. Гузем опубліковано по дві-три або більше монографій з викладенням результатів, базованих на підходах лінеаризованої теорії пружності.

Наведемо деякі факти, які засвідчують міжнародне визнання наукової діяльності О.М. Гузя. Він є повним членом чотирьох міжнародних академій наук, в кожній з яких Україну представляють всього по декілька вчених: the Academia Europaea (1992), Fellow of the New York Academy of Sciences (1997), Fellow of the World Innovation Foundation (2001), the European Academy of Sciences (2002). О.М. Гузь є єдиним українським вченим, що нагороджений золотою медаллю Блеза Паскаля Європейської академії наук.

О.М. Гузь створив одну з найбільших наукових шкіл України. Під його керівництвом захищено 40 докторських і більше 100 кандидатських дисертацій. Серед його

учнів 5 академіків (В.Л. Богданов, В.В. Зозуля, В.Д. Кубенко, Г.Г. Кулієв, В.М. Назаренко) і 4 члени-кореспонденти (С.Д. Акбаров, Ю.М. Неміш, І.С. Чернишенко, М.О. Шульга).

Академік НАН України О.М. Гузь є єдиним серед українських вчених-механіків лауреатом найвищої відзнаки Національної академії наук України – Золотої медалі імені В.І. Вернадського.

РЕЗЮМЕ. Надано стислу інформацію про найбільш відомих у світовій механіці вчених-українців, які працювали в Україні або здобули визнання в інших країнах, або народилися і жили за межами України. Показано внесок основоположників лінеаризованої теорії пружності бельгійця Моріса Біо та українця Олександра Гузя в побудові цієї теорії. Коротко описані основні положення лінеаризованої теорії пружності. Вказано основні факти міжнародного визнання О. Гузя.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: українці в світовій механіці, Степан Тимошенко, Олександр Гузь, Моріс Біо, лінеаризована теорія пружності.

1. Богданов В.Л., Назаренко В.М., Руцицький Я.Я. Факти і віхи наукового шляху видатного вченого-механіка (до 85-річчя академіка НАН України О.М. Гузя) // Вісник НАН України. – 2024. – № 1. – С. 94 – 102. <https://doi.org/10.15407/vsn2024.01.094>
2. Гузь О.М. Загальні розв'язки тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружної стійкості // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1967. – № 2. – С. 42 – 46.
3. Гузь А.Н. Исследование устойчивости упругих систем при помощи трехмерных линейризованных уравнений теории упругости // Прикл. механика. – 1967. – 3, № 2. – С. 20 – 29.
4. Гузь А.Н. Устойчивость ортотропных тел // Прикл. механика. – 1967. – 3, № 5. – С. 29 – 38.
5. Гузь А.Н. Об устойчивости трехмерных упругих тел // Прикл. математика и механика. – 1968. – 32, № 5. – С. 930 – 935.
6. Гузь О.М. Загальні розв'язки тривимірних лінеаризованих рівнянь стійкості пружно-пластичних тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 4. – С. 34 – 37.
7. Гузь О.М. Про розв'язок тривимірних задач стійкості трансверсально-ізотропних тіл // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1968. – № 9. – С. 32 – 36.
8. Гузь А.Н. О построении теории устойчивости однонаправленных волокнистых материалов // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 2. – С. 62 – 70.
9. Гузь А.Н. Устойчивость упруго-пластических тел // Прикл. механика. – 1969. – 5, № 8. – С. 11 – 19.
10. Гузь О.М. Про визначення теоретичної границі міцності на стиск армованих матеріалів // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – №3. – С. 236 – 238.
11. Гузь О.М. Про стійкість деформування нелінійного в'язкопружного тривимірного тіла // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1969. – №11. – С. 1003 – 1006.
12. Гузь О.М. Про лінеаризовані задачі нелінійно-пружного нестисливого тіла при великих початкових деформаціях // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1970. – № 12. – С. 1091 – 1094.
13. Гузь А.Н. О линейризованных задачах теории упругости // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 2. – С. 3 – 11.
14. Гузь А.Н. Некоторые вопросы устойчивости нелинейно-упругих тел при конечных и малых докритических деформациях // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 4. – С. 51 – 58.
15. Гузь А.Н. Об условии применения метода Эйлера исследования устойчивости деформирования нелинейно-упругих тел при конечных докритических деформациях // ДАН СССР. – 1970. – 194, № 3. – С. 38 – 40.
16. Гузь А.Н. О трехмерной теории устойчивости деформирования материалов с реологическими свойствами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №6. – С. 104 – 107.
17. Гузь А.Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. – 276 с.
18. Гузь А.Н. Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наук. думка, 1973. – 274 с.
19. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища школа, 1986. – 512 с.
20. Гузь А.Н. Упругие волны в телах с начальными напряжениями: в 2-х томах. Т. 1. Общие вопросы. – Киев: Наук. думка, 1986. – 374 с.
21. Савин Г.Н. Концентрация напряжений около отверстий. – Москва-Ленинград: Гостехиздат, 1951. – 496 с.

22. *Творець теоретичної і математичної фізики. До 110-річчя від дня народження академіка М.М. Боголюбова* / Редкол.: Б.Є. Патон (голова), А.Г. Загородній (заст. голови), В.П. Горбулін, А.Г. Наумовець, В.Г. Кошечко, С.І. Пирожков, В.Л. Богданов [та ін.]; НАН України, Ін-т теор. фізики ім. М.М.Боголюбова, Нац. б-ка України ім. В.І.Вернадського. – Київ: Академперіодика, 2019. – 532 с.
23. *Biot M.A.* Sur la stabilite de l'equilibre elastique. Equations de l'elasticite d'un milieu soumis a tension initiale // *Ann. Soc. Sci., Sect. B.* – 1934. – **54**, part I. – P. 91 – 109.
24. *Biot M.A.* Theory of elasticity with large displacements and rotations // *Proceedings of 5th Int. Congress for Appl. Mechanics* (Cambridge, Mass., Sept. 1938). – New York: John Wiley Inc., London: Chapman & Hall Ltd. – 1939. – P. 117 – 122.
25. *Biot M.A.* Theorie de l'elasticite du second ordre avec application a la theorie du flambage // *Ann. Soc. Sci., Ser. I.* – 1939. – **59**. – P. 104 – 112.
26. *Biot M.A.* Nonlinear theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress // *Phil. Mag., Ser. 7.* – 1939. – **27**. – P. 468 – 489.
27. *Biot M.A.* Increase of torsional stiffness of a prismatical bar due to axial tension // *J. Appl. Physics.* – 1939. – **10**, N 12. – P. 860 – 864.
28. *Biot M.A.* Elastizitats theorie zweiter ordnung mit anwendungen // *ZAMM.* – 1940. – **20**, N 2. – P. 89 – 99.
29. *Biot M.A.* The influence of initial stress on elastic waves // *J. Applied Physics*, 1940. – **11**, N 8. – P. 522 – 530.
30. *Biot M.A.* *Mechanics of Incremental Deformations. Theory of Elasticity and Viscoelasticity of Initially Stressed Solids and Fluids, Including Thermodynamic Foundations and Applications to Finite Strain.* – New York: John Wiley and Sons, 1965. – 504 p.
31. *Guz A.N.* *Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies.* – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.
32. *Guz A.N.* Construction of the three-dimensional theory of stability of deformable bodies // *Int. Appl. Mech.* – 2001. – **37**, N 1. – P. 1 – 37.
33. *Guz A.N.* To 100-th Anniversary of the S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU (National Academy of Sciences of Ukraine). – Kiev: Litera LTD, 2018. – 160 p.
34. *Guz A.N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V.M.* (eds). *Advances in Mechanics: Current Research Results of the NAS of Ukraine. Advanced Structured Materials*, vol. 191. – Cham: Springer, 2023. – 560 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8>
35. *Rushchitsky J.J.* *Foundations of Mechanics of Materials.* – Copenhagen: Ventus Publ. ApS, 2021. – 276 p.
36. *Soderberg C.R.* Stephen P. Timoshenko (1878 – 1972). A Biographical Memoir. – Washington: National Academy of Sciences, 1982. – P. 323 – 349.
37. *Weingardt R.G.* Stephen P. Timoshenko: Father of engineering mechanics in the U.S. // *Structure Mag.* – 2007. – **1**. – P. 68 – 71.
38. *Weingardt R.G.* Stephen P. Timoshenko // *Leadersh. Manage Eng.* – 2008. – **8**, N 1. – P. 309 – 314.

Надійшла 22.01.2024

Затверджена до друку 16.04.2024