

В.Д.Кубенко¹, І.В.Янчевський²

**ВИЗНАЧЕННЯ РАДІАЦІЙНОЇ СИЛИ, ЩО ДІЄ НА ІНКАПСУЛЬОВАНУ
ЧАСТИНКУ У ПОРОЖНИНІ З РІДИНОЮ**

¹Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: venkub@inmech.kyiv.ua;

²Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»,
просп. Берестейський, 37, 03056, Київ, Україна; e-mail: i.yanchevskyi@kpi.ua

Abstract. Based on the solution of the axisymmetric boundary problem of hydroelasticity on the diffraction of a plane wave with an elastic spherical shell is studied. This shell is filled with a compressible liquid (an encapsulated particle) and immersed in a cylindrical cavity with another liquid. The expressions are calculated for several partial cases of this interaction problem on a plane traveling or standing wave with a spherical inclusion on the axis of a cylindrical infinite or semi-infinite cavity. The acoustic radiation force acting on the encapsulated particle as a function of the standing wave frequency, physical and geometrical parameters of the mechanical system is also studied. An agreement of the results of the test calculations with the data available in the literature indicates the correctness of the presented relations and the performed calculations. The numerical experiments show that a thin elastic shell causes jumps within the values of the radiation force at standing wave frequencies close to the frequencies of the shell's natural oscillations. The amplitude values of the radiation force acting on a particle in an infinite medium at frequencies with a standing wavelength greater than the particle diameter tend to be zero. In the case of a particle in a cylindrical cavity, this occurs in just this frequency range that the radiation force takes on maximum values. Its direction depends on the position of the wave nodal point and the physical parameters of the mechanical system. The described technique allows both calculations of the radiation force with controlled accuracy, and determination of standing wave frequencies for the controlled movement of an encapsulated particle located in a cylindrical cavity.

Keywords: cylindrical cavity, encapsulated particle, compressible liquid, standing wave, radiation force.

Вступ.

В літературі, присвяченій дослідженню багатократного розсіяння акустичних хвиль на тілах чи системах тіл в необмеженому середовищі, останнім часом значна увага приділяється вивченню дифракційних процесів на пухирцях рідини або газу в полі дії бігучих або стоячих хвиль. В публікації авторів [7] описано низку важливих аспектів застосування результатів досліджень вказаних процесів. Одним з таких застосувань є використання взаємодії акустичних хвиль і бульбашок в сучасній медицині. Мікропухирці рідини чи газу, будучи введені в кровоносну систему живого організму, внаслідок їх переважачого відносно навколишніх тканин і рідин акустичного імпедансу, надають в полі діючого акустичного збудження значні можливості для візуалізації процесів, що мають місце в серцево-судинній системі та інших органах. Вони також використовуються для дозованої доставки лікарських препаратів з конкретною локалізацією органу-мішені. Стверджується, що застосування мікропухирцевих сумішей відкрило нову еру медичної діагностики стосовно макросудин і капілярів [2].

Серед різноманіття досліджень динаміки бульбашок в рідині особливе місце займає об'єкт у вигляді сферичної краплі рідини або газу, поміщеної в тонку сферичну оболонку з відомими пружними властивостями. Можна припустити, що така модель в певному наближенні дозволить врахувати в дифракційному процесі властивості тонкого поверхневого шару поблизу поверхні розділу двох рідин – зазвичай у вигляді натягнутої плівки, утвореної на поверхні краплі рідини молекулярними силами зчеплення, що створюють поверхневий натяг. Властивості речовини в поверхневому шарі відрізняються від властивостей в об'ємі фаз, а товщина поверхневого шару залежить від співвідношення густин, хімічних і термодинамічних параметрів системи. Вона може мати товщину мономолекулярного шару, але може також досягати сотень молекулярних розмірів. Через це моделювання поверхневого шару тонкою пружною оболонкою в певних випадках може виявитися правомірним. З іншого боку, інкапсульовані частинки моделюють, зокрема, покриті оболонкою мікропухирці рідини чи газу (так званий контрастний агент), що застосовуються в сучасних ультразвукових дослідженнях в медицині [19]. Контрастний агент являє собою тіло розміром в кілька мікрон, що забезпечує його вільну циркуляцію в просвіті судин всіх рівнів. Оболонка контрастного агента є ліпідною або полімерною. Безрозмірна товщина такої оболонки становить $0,001 \dots 0,1$, тобто в більшості випадків її поведінку можна описати рівняннями теорії тонких пружних оболонок.

В публікації авторів [7] приведені посилання на низку публікацій, в яких досліджуються дифракційні процеси для таких тіл. Відзначимо, що вони стосуються лише процесів в необмеженому, або напівобмеженому середовищі. В той же час представляється актуальним дослідження динаміки інкапсульованої частинки в рідині, що заповнює циліндричну порожнину. Остання певною мірою моделюватиме судину живого організму. Відзначимо, що на даний час дослідження дифракції хвиль на твердих тілах в циліндричній порожнині відображені в публікаціях [14 – 16]. Цитована вище робота авторів присвячена побудові точного розв'язку відповідної граничної задачі і визначенню розподілу тиску в околі частинки в залежності від частоти діючої хвилі і співвідношення характерних розмірів порожнини і тіла. В той же час однією з найбільш актуальних з точки зору практичного застосування контрастного агента є така характеристика як радіаційна сила, що діє на його поверхню [1]. В даній публікації крім виправлення деяких помилок і обчислення гідродинамічних параметрів процесу, головна увага приділяється аналізу особливостей радіаційної сили.

§1. Постановка задачі.

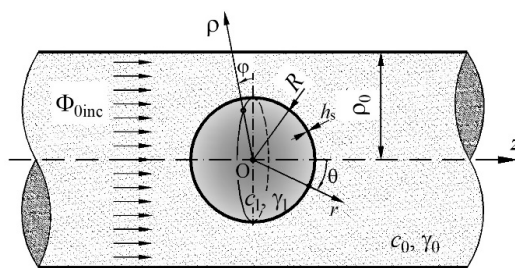


Рис. 1

Нескінченна кругова циліндрична порожнина радіусом ρ_0 з твердими стінками містить стисливу ідеальну рідину густиною γ_0 , у якій звук поширюється зі швидкістю c_0 . У порожнині розміщена заповнена рідиною або газом з акустичними характеристиками γ_1 і c_1 пружна сферична оболонка радіусом R і товщиною $h_s \ll R$ (інкапсульована частинка). Вважається, що

геометричний центр оболонки розташовується на осі порожнини. Введемо циліндричну систему координат (ρ, z, φ) , вісь Oz якої спрямована вздовж осі порожнини, а початок координат суміщений з центром оболонки. Введемо також сферичну систему координат (r, θ, φ) з початком у тій же точці (рис. 1). Розглянуто осесиметричний випадок, тому координата φ з розгляду випадає.

Нехай у рідині, що заповнює порожнину, у додатному напрямку осі Oz поширюється плоска гармонічна акустична хвиля, яка описується потенціалом

$$\Phi_{0inc} = F_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.1)$$

де ω – кутова частота; $F_0 = F_0(\omega)$ – амплітуда, яка у загальному випадку може залежати від частоти; $k = \omega/c_0$ – хвильове число; t – час.

Під дією падаючої хвилі пружна оболонка внаслідок деформування відбиває і випромінює хвилі в оточуюче її середовище, а також перевипромінює хвилі у внутрішній об'єм оболонки. У свою чергу відбиті й випромінені хвилі взаємодіють із циліндричною поверхнею порожнини, що зумовлює появу нових відбиттів. Задача полягає у визначенні сумарного хвильового поля і акустичної радіаційної сили, що діє на інкапсульовану частинку, як функції потенціального поля падаючої хвилі.

Потенціали розсіяних хвиль у заповнюючій циліндричну порожнину рідині Φ_0 і перевипромінених хвиль у рідині всередині оболонки Φ_1 мають задовольняти рівняння Гельмгольца

$$\Delta\Phi_0 + \omega^2\Phi_0 = 0; \quad \Delta\Phi_1 + \eta^2\omega^2\Phi_1 = 0 \quad (1.2)$$

і граничні умови

$$\left. \frac{\partial\Phi_0^*}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (\rho_0=1); \quad \left. \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}; \quad \left. \frac{\partial\Phi_1}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad (1.3)$$

які забезпечують рівність нулевій нормальної складової швидкості рідини на твердій поверхні циліндричної порожнини і безвідривну взаємодію сферичної оболонки із зовнішньою й внутрішньою рідинами.

Гідродинамічні характеристики рідин (швидкість U , тиск p) через потенціали Φ_0 і Φ_1 визначаються наступними формулами

$$U_j = \text{grad } \Phi_j; \quad p_j = -\zeta_j \frac{\partial\Phi_j}{\partial t} \quad (j = 0, 1). \quad (1.4)$$

Слід зазначити, що рівності (1.2) – (1.4) записані із використанням прийнятих у роботі [7] безрозмірних змінних. В якості основних величин служать радіус порожнини ρ_0 , швидкість поширення хвиль в ній c_0 і густина γ_0 . Вище через Δ позначено диференціальний оператор Лапласа; w – радіальне переміщення оболонки; $\eta = c_0/c_1$; $\zeta_j = \gamma_j/\gamma_0$. Множник $e^{-i\omega t}$ опущено.

Окрім умов (1.3) на обмежуючих середовища поверхнях, шукані потенціальні функції мають задовольняти умовам випромінювання Зоммерфельда на нескінченності і бути обмеженими на осі порожнини [7].

§2. Розв'язання задачі.

Загальний розв'язок рівняння (1.2) для Φ_0 вибрано у вигляді суми

$$\Phi_0 = \Phi_{0cyl}(\rho, z) + \Phi_{0sph}(r, \theta),$$

де потенціал $\Phi_{0cyl}(\rho, z)$, обмежений на осі порожнини, має вигляд

$$\Phi_{0cyl}(\rho, z) = \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) J_0\left(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho\right) e^{i\xi z} d\xi,$$

а потенціал $\Phi_{0sph}(r, \theta)$, що задовольняє умовам випромінювання Зоммерфельда на нескінченності, задається рядом

$$\Phi_{0\text{sph}}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n h_n(\omega r) P_n(\cos \theta).$$

В свою чергу обмежений в початку координат потенціал хвильового поля в середині сферичної оболонки шукається у вигляді

$$\Phi_1(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(\eta \omega r) P_n(\cos \theta).$$

Тут $B(\xi)$ – шукана густина; A_n , C_n – невідомі коефіцієнти; J_0 – циліндрична функція Бесселя нульового індексу; j_n , h_n – сферичні функція Бесселя і Ганкеля n -го індексу; $P_n(\cos \theta)$ – поліном Лежандра.

Для задоволення граничних умов необхідно потенціал Φ_0 представити в циліндричних і сферичних координатах. Для цього використовуються наступні співвідношення:

$$e^{i\xi z} J_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) j_n(\omega r) P_n(\cos \theta);$$

$$h_n(\omega r) P_n(\cos \theta) = \frac{i^{-n}}{2\omega} \int_{-\infty}^{\infty} P_n\left(\frac{\xi}{\omega}\right) H_0(\sqrt{\omega^2 - \xi^2} \rho) e^{i\xi z} d\xi,$$

де H_0 – циліндрична функція Ганкеля.

В результаті, як показано у роботі [7], сформульована задача зводиться до розв'язання нескінченної системи алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів A_n , які визначають потенціал швидкості рідини у циліндричній порожнині

$$A_n - d_n \frac{2n+1}{2\omega} \sum_{m=0}^{\infty} i^{n-m} q_{nm} A_m = -d_n i^n (2n+1) F_0 \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2.1)$$

де

$$d_n = \frac{j'_n(\omega R) - b_n/c_n}{h'_n(\omega R) - a_n/c_n}; \quad a_n = \frac{1}{\zeta_1} \left(\zeta_0 h_n(\omega R) + \frac{h'_n(\omega R)}{\omega^2 S_n} \right);$$

$$b_n = \text{Re}(a_n) = \frac{1}{\zeta_1} \left(\zeta_0 j_n(\omega R) + \frac{j'_n(\omega R)}{\omega^2 S_n} \right); \quad c_n = \frac{j_n(\eta \omega R)}{j'_n(\eta \omega R)}.$$

Система (2.1) записана із застосуванням прийнятих у роботі [7] позначень. В ній виправлена неточність, що мала місце при виведенні формули для коефіцієнта d_n .

Маючи коефіцієнти A_n на підставі системи (2.1) і отриманих у роботі [8] результатів сумарні потенціали рідин в циліндричній порожнині Φ_0 і в інкапсульованій частинці Φ_1 можуть бути записані наступним чином:

$$\Phi_0(r, \theta) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i A_n [y_n(\omega r) - \tilde{d}_n j_n(\omega r)] P_n(\cos \theta); \quad (2.2)$$

$$\Phi_1(r, \theta) = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} C_n j_n(\eta \omega r) P_n(\cos \theta), \quad (2.3)$$

де

$$\tilde{d}_n = \text{Im}\left(\frac{1}{d_n}\right) = \frac{y'_n(\omega R) - \tilde{a}_n/c_n}{j'_n(\omega R) - b_n/c_n}; \quad \tilde{a}_n = \text{Im}(a_n) = \frac{1}{\zeta_1} \left(\zeta_0 y_n(\omega R) + \frac{y'_n(\omega R)}{\omega^2 S_n} \right);$$

$$C_n = iA_n \frac{y_n(\omega R) - \tilde{d}_n \cdot j_n(\omega R)}{g_n}; \quad g_n = \zeta_1 \cdot j_n(\eta \omega R) - \frac{j'_n(\eta \omega R)}{\omega^2 S_n}.$$

На наступному етапі обчислюються гідродинамічний тиск і швидкість точок акустичних середовищ за співвідношеннями (1.4), у яких потенціали Φ_j визначаються виразами (2.2) і (2.3).

§3. Визначення акустичної радіаційної сили.

Радіаційна сила в лінійній акустиці є квадратичною величиною від акустичних збурень і для її визначення враховуються величини другого порядку малості, які не обертаються в нуль після осереднення за часом [1]. У квадратичному наближенні відмінна від нуля компонента радіаційної сили, що діє на інкапсульовану частинку, записується наступним чином [8]:

$$\langle F_z \rangle = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} \left\{ \left[n(n+2) - \omega^2 R^2 \right] (\Re_n \Re_{n+1} + \Im_n \Im_{n+1}) - R^2 (\Re'_n \Re'_{n+1} + \Im'_n \Im'_{n+1}) + \right. \\ \left. + R \left[n (\Re_n \Re'_{n+1} + \Im_n \Im'_{n+1}) - (n+2) (\Re_{n+1} \Re'_n + \Im_{n+1} \Im'_n) \right] \right\}$$

і направлена уздовж осі z поширення плоскої хвилі.

Розрахункові вирази для коефіцієнтів $\Re_n$ і $\Im_n$ мають наступний вигляд [8]:

$$\Re_n = \text{Re}(A_n) \cdot [y_n(\omega R) - \tilde{d}_n j_n(\omega R)]; \quad \Im_n = -\text{Im}(A_n) \cdot [y_n(\omega R) - \tilde{d}_n j_n(\omega R)];$$

$$\Re'_n = \text{Re}(A_n) \cdot [y'_n(\omega R) - \tilde{d}_n j'_n(\omega R)]; \quad \Im'_n = -\text{Im}(A_n) \cdot [y'_n(\omega R) - \tilde{d}_n j'_n(\omega R)],$$

де штрих позначає похідну спеціальної функції за радіальною координатою ($y'_n(\omega R) = (dy_n(\omega r)/dr)|_{r=R}$).

Для зручності аналізу результатів зазвичай використовується так звана функція радіаційної сили [11 – 15], яка при прийнятих позначаннях обчислюється наступним чином:

$$Y_{st} = \langle F_z \rangle / E_p S_c. \quad (3.1)$$

Тут $E_p = \omega^2 F_0^2 / 2$ – безрозмірене середнє значення густини енергії падаючої хвилі;

$S_c = \pi R^2$ – площа поперечного перерізу сферичного тіла.

§4. Частинні випадки.

Отримані вище результати представляють собою узагальнення декількох розрахункових випадків і в результаті нескладних математичних операцій можуть бути використані при дослідженні дифракційних процесів в околі сферичного включення у циліндричній порожнині з іншими граничними умовами.

Зокрема, за відсутності пружної оболонки навколо рідкої кулі у наведених вище виразах слід покласти товщину оболонки рівною нулю ($h_s = 0$). Це призводить до зміни розрахункових виразів для наступних коефіцієнтів:

$$S_n \rightarrow \infty: \quad a_n = \frac{\zeta_0}{\zeta_1} h_n(\omega R); \quad b_n = \frac{\zeta_0}{\zeta_1} j_n(\omega R); \quad \tilde{a}_n = \frac{\zeta_0}{\zeta_1} y_n(\omega R); \quad g_n = \zeta_1 j_n(\eta \omega R).$$

Решта виразів залишаються без змін. Слід зазначити, що дослідження дифракційних процесів в околі сферичного пухирця на осі циліндричної порожнини з ідеальною рідиною при поширенні уздовж її осі плоскої хвилі, представлені у роботі [8].

При розв'язанні осесиметричної акустичної задачі про взаємодію плоскої хвилі з твердим сферичним тілом, яке розташоване на осі циліндричної порожнини з іде-

альною стисливою рідиною, необхідно змодельовати відсутність пружної оболонки ($h_s = 0 \Rightarrow S_n \rightarrow \infty$), а густину γ_1 прийняти нескінченно великою ($\gamma_1 \rightarrow \infty \Rightarrow \zeta_1 \rightarrow \infty$). В результаті будуть рівними нулеві наступні коефіцієнти:

$$a_n = 0; \quad b_n = 0; \quad \tilde{a}_n = 0; \quad g_n = \infty; \quad C_n = 0; \quad \Re_n^{(1)} = \Im_n^{(1)} = \Re_n'^{(1)} = \Im_n'^{(1)} = 0.$$

Чисельно-аналітичний розв'язок задачі про взаємодію плоскої акустичної хвилі з твердою сферичною частинкою, яка закріплена на осі циліндричної порожнини зі стисливою рідиною, отримано раніше авторами публікацій [16].

У випадку відсутності рідини всередині пружної оболонки необхідно покласти значення густини γ_1 і швидкості поширення звуку c_1 рівними нулеві: $\gamma_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \zeta_1 \rightarrow 0$; $c_1 \rightarrow 0 \Rightarrow \eta \rightarrow \infty$. В результаті нескладних математичних операцій отримаємо наступні вирази для коефіцієнтів, які визначають гідродинамічні параметри акустичного середовища у циліндричній порожнині:

$$d_n = \frac{j_n(\omega R) + \frac{1}{\omega^2 S_n} j_n'(\omega R)}{h_n(\omega R) + \frac{1}{\omega^2 S_n} h_n'(\omega R)}; \quad \tilde{d}_n = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{d_n}\right) = \frac{y_n(\omega R) + \frac{1}{\omega^2 S_n} y_n'(\omega R)}{j_n(\omega R) + \frac{1}{\omega^2 S_n} j_n'(\omega R)};$$

$$g_n = 0; \quad j_n(\eta \omega r) \rightarrow 0; \quad \Phi_1(r, \theta) \rightarrow 0.$$

Суттєво спрощується задача про дослідження відбиття плоскої хвилі на сферичному тілі, яке розташоване у безмежному акустичному середовищі. Виключення із постановки задачі граничних умов (1.3) призводить до алгебраїчного обчислення коефіцієнтів A_n на підставі рівності (2.1), у якій при цьому коефіцієнти q_{mn} мають дорівнювати нулеві ($q_{mn} = 0 \Rightarrow B_n = 0$).

Дифракційні процеси в околі твердого, рідкого чи пружного тіла, розташованого у безмежному рідкому середовищі, були об'єктом численних досліджень і отримано низку фундаментальних результатів. Серед численних публікацій за даною тематикою, опублікованих останніми роками, виділимо [3 – 5, 17, 18].

У випадку дифракційної взаємодії сферичного включення зі стоячою хвилею необхідно множник F_0 у правій частині розрахункової системи алгебраїчних рівнянь (2.1) замінити на

$$F_0 \cdot [e^{-i\omega h} + (-1)^n e^{i\omega h}], \quad (4.1)$$

де h – відстань від центру сферичного тіла до найближчої вузлової точки стоячої хвилі у циліндричній системі координат; ω – частота стоячої хвилі.

Більш детальну інформацію про дію радіаційних сил на сферичні включення у полі акустичних стоячих хвиль можна знайти у публікаціях [10, 12, 18].

З використанням публікацій [6, 9] можуть бути розглянуті також постановки осесиметричних задач дифракції акустичних хвиль для інкапсульованих частинок, які розташовані на осі напівнескінченної циліндричної порожнини. При цьому під параметром h в (4.1) слід розуміти відстань між центром оболонки і торцем такої порожнини.

§5. Числові результати.

Конкретні чисельні експерименти були проведені для заповненої гліцерином ($\gamma_1 = 1250 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = 1950 \text{ м/с}$) сферичної оболонки $R = 0,5$ і $h_s/R = 0,05$, виготовленої з поліетилену високого тиску ($\gamma_s = 950 \text{ м/с}$; $E = 10^9 \text{ МПа}$; $\nu = 0,42$). Вважалося, що заповнюючою рідиною циліндричної порожнини є вода ($\gamma_0 = 1000 \text{ кг/м}^3$; $c_0 = 1500 \text{ м/с}$).

Множник F_0 у виразі (1.1) обирався у вигляді $F_0 = 1/i\omega$, таким чином тиск у падаючій хвилі має одиничну амплітуду на будь-якій частоті. При цьому сама частота ω приймалась з діапазону 0,1 ... 10.

Параметр усічення розрахункової системи рівнянь (2.1) прийнято рівним 12, що забезпечило як прийнятну точність значень розрахункових параметрів, так і стійкість обчислювального процесу.

На рис. 2, а кривою 3 представлено модуль детермінанта матриці системи рівнянь (2.1) в залежності від частоти падаючої хвилі. Крива 2 побудована для випадку сферичної краплі ($h_s = 0$).

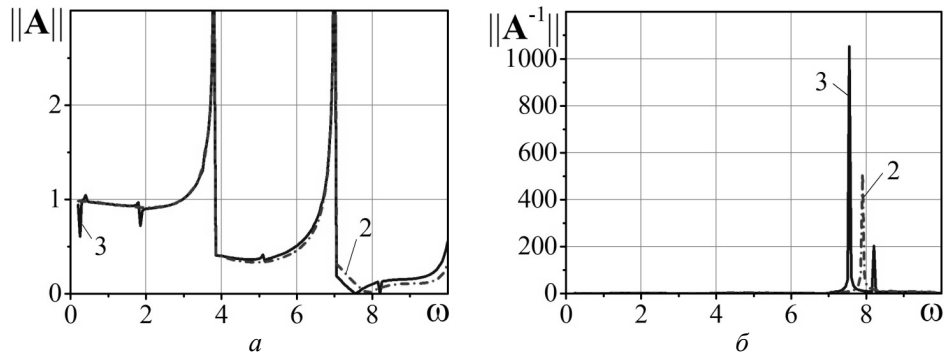


Рис. 2

Значення $\omega = 3,832$ і $\omega = 7,016$ на цьому рисунку, при яких мають місце розриви функції $\|A\| = f(\omega)$ першого роду, задовольняють рівнянню $J_1(\omega\rho_0) = 0$ і є власними частотами коливань рідини у поперечному перерізі циліндричної порожнини поза межею сферичного тіла. Окрім чітко виражених стрибків значень функції $\|A\| = f(\omega)$ при $\omega = 3,832$ і $7,016$ на рис. 2, а спостерігаються незначні сплески, які мають місце в околі власних частот коливань сферичної оболонки. Зазначені частоти можуть бути визначені на підставі рівності $\omega = \beta_s \sqrt{\varepsilon_n^{(1)}}$, при якій коефіцієнт S_n дорівнює нулеві. І для розглянутої оболонки ці частоти на досліджуваному діапазоні становлять 1,796; 3,510; 5,094; 6,643 і 8,177. Очевидно, що за відсутності оболонки ($h_s = 0$) такі сплески відсутні (крива 2). На рис. 2, а також виявлена резонансна частота, яка менша 1,796. Ця частота ($\omega \approx 0,2$) розташована в області, типовій для засобів ультразвукової візуалізації і вимагає окремого вивчення. Не менший інтерес представляють т.зв. «умовно резонансні» частоти [6, 8], при яких гідродинамічні характеристики середовища різко змінюються, у тому числі діюча на частинку акустична радіаційна сила. На цих частотах детермінант оберненої матриці розрахункової системи рівнянь (2.1) приймає велике, однак скінченне значення (рис. 2, б). З аналізу представлених на рис. 2, б кривих слідують дві умовно резонансні частоти ($\omega = 7,555$ і $8,215$) для інкапсульованої частинки (крива 3) і одна частота ($\omega = 7,890$) для гліцеринової кулі без оболонки (крива 2). Варто зазначити, що при $\omega = \pi/R = 6,283$ довжина падаючої хвилі буде дорівнювати діаметру інкапсульованої частинки ($\lambda = 2R$). При збільшенні ω відносна довжина хвилі зменшується ($\lambda < 2R$) і навпаки.

Виявлено, що на усьому сканованому діапазоні частот діюча на інкапсульовану частинку у циліндричній порожнині з рідиною (рис. 1) акустична радіаційна сила дорівнює нулеві, що узгоджується з представленими у роботі [14] результатами, отриманими для твердої кулі при $\rho_1/\rho_2 = 1$. Опосередкованою причиною цього є симетрія амплітуди гідродинамічних параметрів відносно площини $z = 0$, яка проходить через центр частинки. Зокрема, на рис. 3, а показано розподіл амплітуди тиску на одній із резонансних частот для даної механічної системи ($\omega = 8,215$).

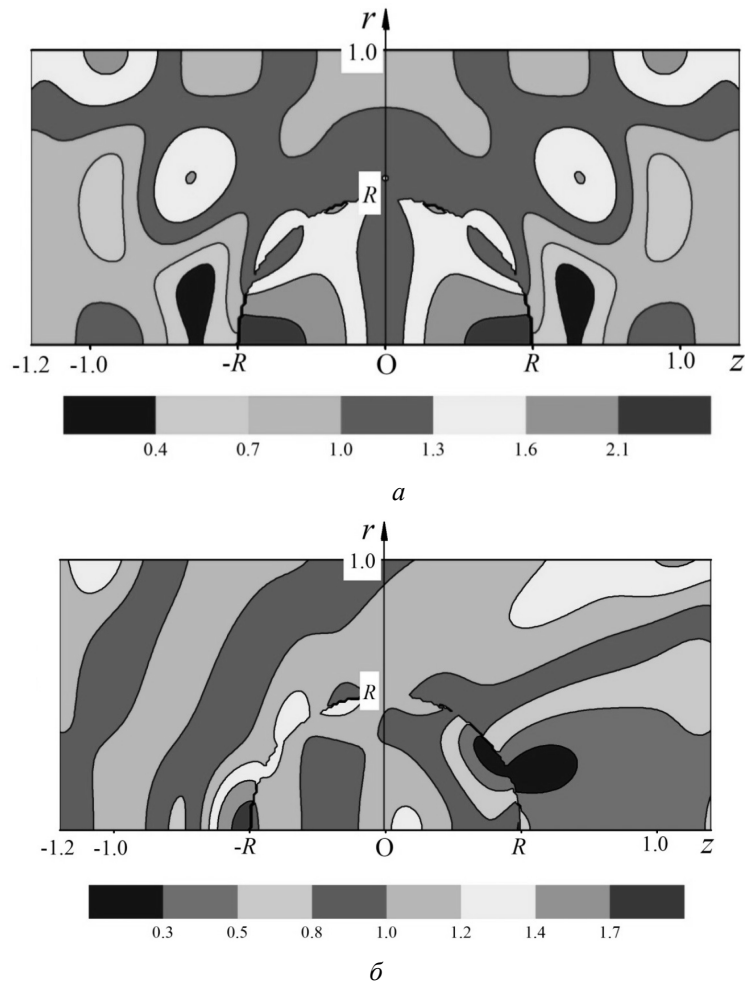


Рис. 3

Для частинки у безмежному середовищі така симетрія відсутня (рис. 3, б). На рис. 3, б видно, що зона підвищеного тиску розташована у фронтовій області і пониженого – на протилежній від джерела падаючої хвилі. Також з аналізу представлених на рис. 3, а даних слідує, що максимальне значення тиску на обраній «умовно резонансній» частоті приблизно в 2,5 рази більше амплітудного значення тиску падаючої хвилі. У випадку розташування частинки у безмежному середовищі (рис. 3, б) зазначений показник дещо менший і становить 1,9.

Асиметрія поля гідродинамічного тиску при розташуванні інкапсульованої частинки у безмежному середовищі спричиняє відмінні від нуля значення діючої на частинку радіаційної сили. Сам графік функції радіаційної сили Y_{st} для цього випадку зображено кривою 3' на рис. 4, а. Додатні значення радіаційної сили свідчать про співпадіння напрямку її дії і напрямку поширення падаючої хвилі, що може спонукати рух тіла від джерела випромінювання. Стрибки значень Y_{st} мають місце на частотах, близьких до частот власних коливань оболонки. Очевидно, що зі збільшенням піддатливості оболонки такі сплески стають менш різкими, а за її відсутності ($h_s = 0$) отримуємо штрихову криву 2. При збільшенні жорсткості оболонки стрибки значень на графіку функції радіаційної сили будуть спостерігатися на інших частотах (крива 3'' на рис. 4, а побудована для оболонки, виготовленої з тонкого ($h_s/R = 0,05$) органічного скла з $\gamma_s = 1200$ м/с ; $E = 3,3 \cdot 10^9$ МПа ; $\nu = 0,4$.

Для порівняння на рис. 4 представлена точкова крива 1, яка обчислена із застосуванням представлених у даній роботі співвідношень для випадку $\gamma_1 \rightarrow \infty$ (частинка є твердою кулею). Із порівняння кривих 2 і 3 випливає, що наявність тонкої оболонки обумовлює стрибки значень радіаційної сили на частотах, близьких до частот власних коливань оболонки.

Вплив оболонки на радіаційну силу суттєво зростає при збільшенні стисливості заповнювача оболонки ($1/\gamma_1 c_1^2$) і навпаки. Про це свідчать порівняння з кривою 3' (рис. 4, а) кривою 3 на рис. 4, б, яка відображає діючу на інкапсульовану частинку радіаційну силу, що знаходиться у безмежному середовищі і заповнена повітрям ($\gamma_1 = 1,25 \text{ кг/м}^3$; $c_1 = 350 \text{ м/с}$). Крива 2 (рис. 4, б) побудована для повітряної кулі без оболонки. Ця крива фактично збігається з результатами для порожнього сферичного включення ($p_1|_{r=R} = 0$, крива 4). Для інкапсульованої частинки із малою стислістю заповнювача вплив оболонки може проявлятися лише на малих частотах (крива 3 на рис. 4, в), а самі значення радіаційної сили будуть наближатися до результатів з абсолютно твердим включенням (криві 1). Зокрема, крива 3 на рис. 4, в побудована для випадку, коли заповнювачем є ртуть ($\gamma_1 = 13500 \text{ кг/м}^3$, $c_1 = 1450 \text{ м/с}$). Крива 2, як і раніше, відповідає випадку сферичного включення без пружної оболонки ($h_s = 0$).

Слід зазначити, що криві 1 і 2 на рис. 4 повністю узгоджуються з наявними в літературі даними ([13, 15, 16, 20, 21]), що підтверджує коректність наведених виразів і виконаних обчислень.

Про коректність виконаних обчислень свідчить також суцільна крива на рис. 5, а, яка зображує розподіл амплітуди радіальної швидкості U_r уздовж координати r циліндричної системи при $z = 0$ і $\omega = 8,215$. Штрих-пунктирна крива на цьому рисунку відображає відповідний цій частоті розподіл колової швидкості точок середовища U_θ . Співвимірні значення амплітуд U_r і U_θ будуть мати місце і при розташуванні частинки у безмежному середовищі (штрихова і точкова криві на рис. 5, а). Видно, що значення радіальної швидкості (суцільна крива) задовольняють граничним умовам (1.5) і (1.6), у той час як графік функції U_θ при $r = R$ зазнає розрив першого роду як для випадку обмеженого циліндричною поверхнею акустичного середовища (штрих-пунктирна крива), так і безмежного (точкова крива).

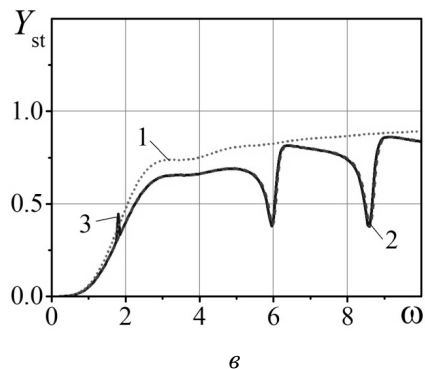
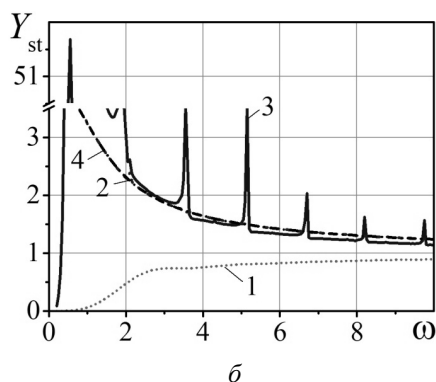
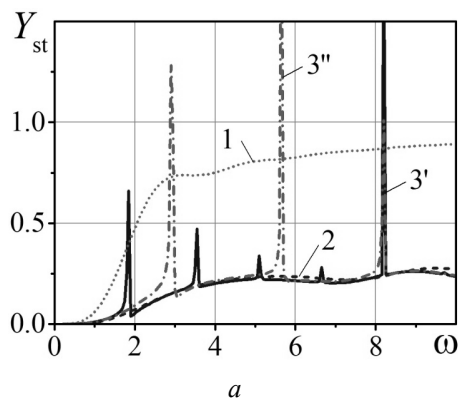


Рис. 4

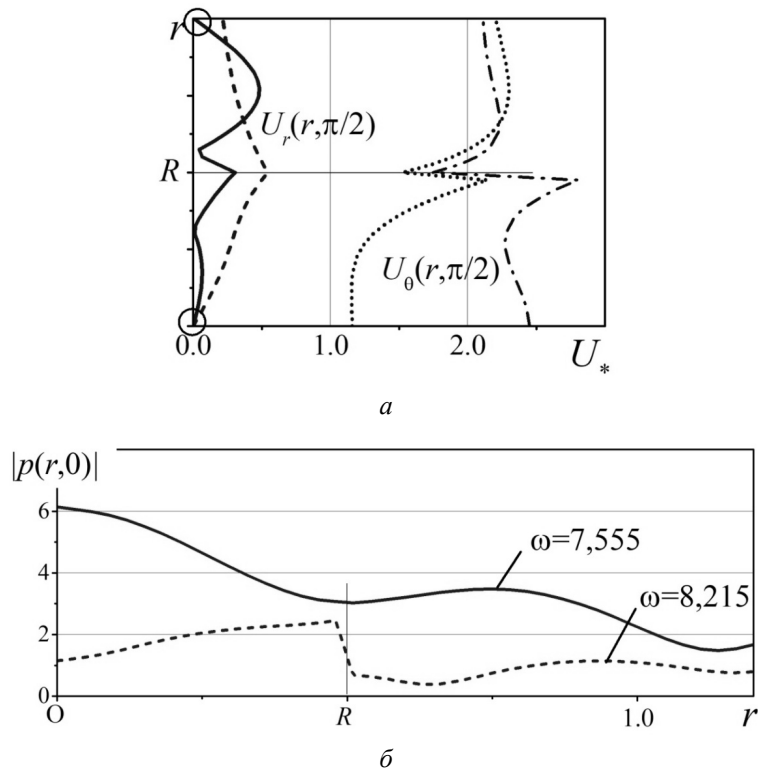


Рис. 5

Амплітуда тиску на границі поділу середовищ $r = R$ на одних умовно резонансних частотах може мати стрибки значень (рис. 5, б, частота $\omega = 8,215$), а на інших такі стрибки відсутні (крива $\omega = 7,555$). Однак на будь якій частоті падаючої хвилі з віддаленням від центру включення амплітудне значення тиску наближається до однічної амплітуди тиску падаючої хвилі. Слід зазначити, що між зазначеними вище частотами знаходиться частота власних коливань інкапсульованої частинки (сферичної оболонки із рідиною) у вакуумі ($\omega = 7,863$), а сам стрибок визначає виключно уявна складова тиску.

Якщо у випадку плоскої хвилі, яка поширюється уздовж циліндричної порожнини (1.1), діюча на розташовану на її осі інкапсульовану частинку радіаційна сила дорівнює нулеві, то у випадку стоячої хвилі функція Y_{st} може бути відмінною від нуля. Причому вона максимальна за модулем, коли центр частинки знаходиться посередині між вузлами і пучностями стоячої хвилі [8, 10, 12, 18]. Так, на рис. 6, а кривою 3 зо-

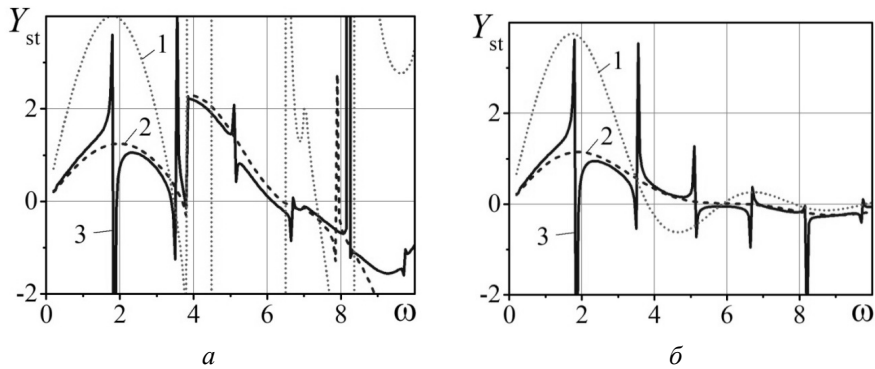


Рис. 6

бразена функція Y_{st} при $\sin(2h\omega) = -1$ (h – відстань від точки О (рис. 1) до вузла стоячої хвилі). Приведені дані отримані для інкапсульованої частинки з гліцерином і оболонкою з поліетилену високого тиску, яка розташована на осі циліндричної порожнини. На рис. 6, б кривою 3 представлені аналогічні дані для частинки у безмежному середовищі. Очевидно, що при $\sin(2h\omega) = +1$ функція Y_{st} змінює знак на протилежний.

Криві 1 на цих рисунках побудовані для твердих сферичних включень, криві 2 – для сферичних гліцеринових включень без оболонок.

Різниця між кривими 2 і 3 визначає вплив пружної оболонки на радіаційну силу, а різкі стрибки значень зі зміною знаку відбуваються на частотах, близьких до частот власних коливань сферичної оболонки без наповнювача ($\omega = 1,796; 3,510; 5,094; 6,643$ і $8,177$). На малих частотах стоячої хвилі і $\sin(2h\omega) = -1$ діючі на частинку радіаційні сили у циліндричній порожнині і у безмежному середовищі фактично однакові (криві 3).

Різниця з'являється приблизно після першої резонансної частоти коливань рідини у поперечному перерізі порожнини (при $\omega > 3,832$). При $\omega > 7,016$ графік функції радіаційної сили не наближається до нуля (рис. 6, а) на відміну від задачі для частинки у безмежному середовищі (рис. 6, б).

Відмінність від нуля діючої на частинку радіаційної сили є непрямым проявом несиметрії потенціального поля у її околі. На рис. 7, а показано розподіл амплітудного значення тиску для випадку стоячої хвилі при $\omega = 8,215$ і $h = (2 + 3/8)\lambda = 1,052$ ($\lambda = 2\pi/\omega$ – довжина стоячої хвилі; $\sin(2h\omega) = -1$). Із порівняння із зображеними на рис. 3, а даними, які побудовані для бігучої хвилі, на рис. 7, а чітко видні положення вузлових точок, а осереднена відстань між ними становить $\lambda/2 = 0,416$.

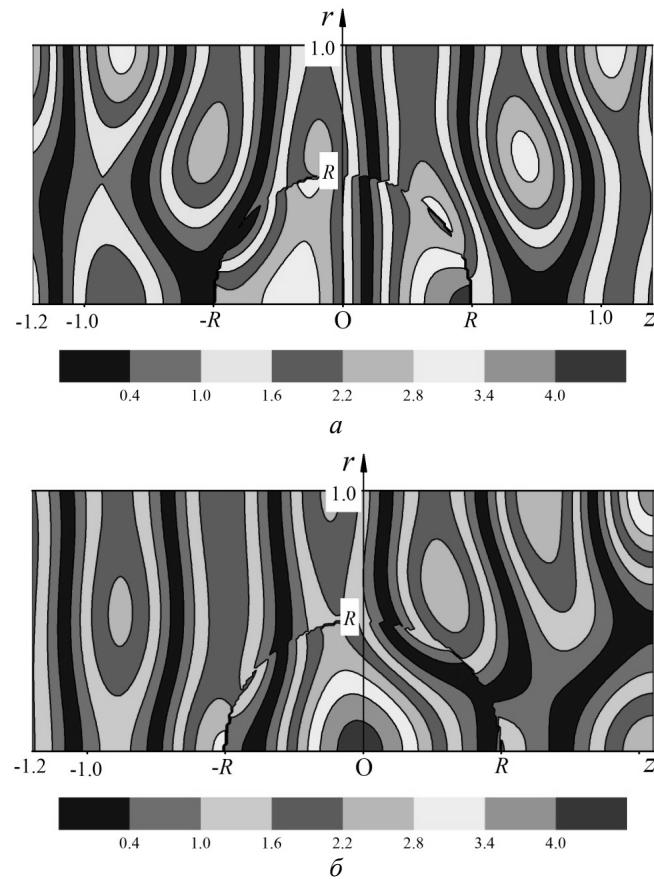


Рис. 7

Той же порядок амплітудного значення тиску буде мати механічна система з інкапсульованою частинкою, центр якої розташований на відстані $h = 1,052 > R$ від твердого торця напівнескінченної циліндричної порожнини. Відповідні числові результати при поширенні уздовж додатного напрямку осі z плоскої хвилі з тиском одиничної амплітуди ($F_0 = 1/i\omega$) показано на рис. 7, б. Із порівняння представлених на рис. 7 полів випливає, що основною відмінністю є розподіл тиску всередині частинки і у другому випадку (рис. 7, б) максимальні значення знаходяться майже у її центрі. Разом з тим питання про дифракційні процеси у околі інкапсульованої частинки на осі напівнескінченної циліндричної порожнини з рідиною потребує більш детальних досліджень з орієнтиром на можливе прикладне застосування теоретичних результатів.

Висновки.

У роботі досліджено радіаційну силу, що діє на інкапсульовану частинку у заповненій ідеальною стисливою рідиною циліндричній порожнині. Радіаційна сила обумовлена складним дифракційним полем в околі частинки і всередині неї, джерелом яких є стояча хвиля заданої амплітуди і із заданим положенням вузлової точки. На підставі виконаних авторами досліджень систематизовано розв'язки задач про дифракцію гармонічних хвиль на сферичному включенні (твердому, рідкому і інкапсульованому) у нескінченній або напівнескінченній циліндричній порожнині з ідеальною стисливою рідиною і представлено розрахункові вирази для відповідних коефіцієнтів. Для перевірки достовірності отриманих співвідношень виконано розрахунки для тестових задач з наявними в літературі даними.

Обчислення показали, що на малих частотах стоячої хвилі циліндрична границя слабо впливає на значення функції радіаційної сили. Суттєвий вплив проявляється на частотах, більших за першу власну частоту радіальних коливань рідини у поперечному перерізі циліндричної порожнини. Пікові значення радіаційної частоти мають місце для частот, які є близькими до «умовно резонансних» частот даної механічної системи і власних частот коливань пружної оболонки інкапсульованої частинки. Зі збільшенням піддатливості оболонки її вплив на радіаційну силу стає менш помітним. Значення вищевказаних частот можна отримати на підставі аналізу розрахункової системи рівнянь, однак наперед спрогнозувати значення і напрям дії радіаційної сили на сферичне включення неможливо. Для розрахунку цих сил можуть бути застосовані викладені у даній роботі співвідношення, які дозволяють проводити обчислення із контрольованою точністю з врахуванням характеристик рідин та пружних характеристик оболонки.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за підтримки Національного фонду досліджень України (конкурс «Підтримка досліджень провідних та молодих учених», Проєкт 2020.02/0112 «Дифракційні процеси і радіаційні сили в обмежених гідропружних системах»).

РЕЗЮМЕ. На основі розв'язку осесиметричної граничної задачі гідропружності про дифракцію плоскої хвилі з пружною сферичною оболонкою, яка заповнена стисливою рідиною (інкапсульована частинка) і занурена в циліндричну порожнину з іншою рідиною, отримано розрахункові вирази для низки частинних випадків даної задачі про взаємодію плоскої рухомої або стоячої хвилі зі сферичним включенням на осі циліндричної нескінченної або напівнескінченної порожнини. Досліджено також діючу на інкапсульовану частинку акустичну радіаційну силу як функцію частоти стоячої хвилі, фізичних і геометричних параметрів механічної системи. Узгодження результатів тестових розрахунків з наявними в літературі даними свідчить про коректність представлених співвідношень і виконаних обчислень. Проведені чисельні експерименти показали, що тонка пружна оболонка спричиняє стрибки значень радіаційної сили на частотах стоячої хвилі, близьких до частот власних коливань оболонки. Амплітудні значення діючої на частинку у безмежному середовищі радіаційної сили при частотах з більшою за діаметр частинки довжиною стоячої хвилі наближаються до нуля. У випадку частинки у циліндричній порожнині саме на цьому діапазоні частот радіаційна сила приймає максимальні значення, а її напрям залежить від положення вузлової точки хвилі і фізичних параметрів механічної системи. Викладена методика дозволяє як проводити розрахунки радіаційної сили з контрольованою точністю, так і визначати частоти стоячої хвилі для реалізації контрольованого руху розташованої в циліндричній порожнині інкапсульованої частинки.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: циліндрична порожнина, інкапсульована частинка, стислива рідина, стояча хвиля, радіаційна сила.

1. Жук О.П., Гузь О.М., Жук Я.О. Радіаційні сили акустичного поля в рідині з включеннями. – Київ: Альянт, 2023. – 240 с.
2. Cosgrove D. Ultrasound contrast agents: An overview // *European J. of Radiology*. – 2006. – **60**, N 3. – P. 324 – 330.
3. Glynn-Jones P., Mishra P.P., Boltryk R.J., Hill M. Efficient finite element modeling of radiation forces on elastic particles of arbitrary size and geometry // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2013. – **133**, N 4. – P. 1885 – 1893.
4. Hasheminejad S.M., Bahari A., Abbasian S. Modelling and simulation of acoustic pulse interaction with a fluid-filled hollow elastic sphere through numerical Laplace inversion // *Appl. Math. Modelling*. – 2011. – N 35. – P. 22 – 49.
5. Johnson K.A., Vormohr H.R., Doinikov A.A. et al. Experimental verification of theoretical equations for acoustic radiation force on compressible spherical particles in traveling waves // *Physical Review*. – 2016. – E 93, 053109. – P. 1 – 6.
6. Kubenko V.D., Yanchevskii I.V. Abnormal Frequencies in a Semi-Infinite Cylindrical Vessel Filled with a Fluid and Dynamically Excited by a Spherical Oscillator // *Int. Appl. Mech.* – 2020. – **56**, N 2. – P. 141 – 155.
7. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. Acoustic field effect on encapsulated spherical drop located in liquid filled cylindrical vessel // *Wave Motion*. – 2021. – **106**. – 102801.
8. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. Field and Radiation Force for a Liquid Bubble in a Dissimilar Fluid in an Infinite Cylindrical Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, N 3. – P. 257 – 269.
9. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. “Resonance” phenomenon of kinematic excitation by a spherical body in a semi-infinite cylindrical vessel filled with liquid // *Acta Mechanica*. – 2019. – **230**, N 3. – P. 1009 – 1025.
10. Marston Ph.L., Thiessen D.B. Manipulation of fluid objects with acoustic radiation pressure // *Ann. N.Y. Acad. Sci.* – 2004. – 1027. – P. 414 – 434.
11. Mitri F.G. Acoustic radiation force acting on elastic and viscoelastic spherical shells placed in a plane standing wave field // *Ultrasonics*. – 2005. – **43**, N 8. – P. 681 – 691.
12. Mitri F.G. Calculation of the acoustic radiation force on coated spherical shells in progressive and standing plane waves // *Ultrasonics*. – 2006. – **44**. – P. 244 – 258.
13. Miri A.K., Mitri F.G. Acoustic radiation force on a spherical contrast agent shell near a vessel porous wall – Theory // *Ultrasound in Medicine and Biology*. – 2011. – **37**, N 2. – P. 301 – 311.
14. Shi J., Li Sh., Deng Yu. et al. Analysis of acoustic radiation force on a rigid sphere in a fluid-filled cylindrical cavity with an abruptly changed cross-section // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2020. – **132**, N 4. – P. 2189 – 2197.
15. Shi J., Li Sh., Zhang G., Zhang X. Exploring the underlying mechanism of acoustic radiation force on a sphere in a fluid-filled rigid tube // *AIP Advances*. – 2021. – **11**. – 075228. – P. 1 – 12.
16. Shi J., Zhang X., Chen R., Zhang G. Acoustic radiation force of a solid elastic sphere immersed in a cylindrical cavity filled with ideal fluid // *Wave Motion*. – 2018. – **80**. – P. 37 – 46.
17. Silva G.T. Acoustic radiation force and torque on an absorbing compressible particle in an inviscid fluid // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2014. – **136**, N 5. – P. 2405 – 2413.
18. Simon G., Andrade M.A.B. et al. Numerical determination of the secondary acoustic radiation force on a small sphere in a plane standing wave field // *Micromachines*. – 2019. – **10**, N 431. – P. 1 – 18.
19. Stride E., Saffari N. Microbubble ultrasound contrast agents: a review // *Proc. Inst. Mech. Engrs. Part H: J. Engineering in Medicine*. – 2003. – **217**. – P. 429 – 447.
20. Wang J., Zhang X., Zhang G. Acoustic radiation force of a sphere with a hemispherically split boundary condition in a plane wave // *J. Acoust. Soc. Am.* – 2022. – **152**, N 1. – P. 501 – 510.
21. Zang Y., Qiao Y., Liu J., Liu X. Axial acoustic radiation force on a fluid sphere between two impedance boundaries for Gaussian beam // *Chin. Phys. B*. – 2019. – **28**, N 3, 034301. – P. 1 – 8.
22. Zhuk O.P., Kubenko V.D., Zhuk Ya.O., Yanchevskiy I.V. Acoustic Radiation Pressure on a Solid Sphere in a Compliant Cylindrical Tube Filled with a Fluid // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 1. – P. 30 – 42.

Надійшла 16.08.2023

Затверджена до друку 16.04.2024