

А.А.Мартинюк, В.О.Чернієнко

ДОСТАТНІ УМОВИ ОБМЕЖЕНОСТІ РУХУ НЕЛІНІЙНИХ СИСТЕМ
ВІДНОСНО ЧАСТИНИ ЗМІННИХ

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАН України,
вул. Гесстєрова. 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: center@inmech.kiev.ua*

Abstract. The new sufficient conditions for boundedness of motion relative to some of the variables are obtained. These conditions are based on estimating the norm of solutions of equations of perturbed motion. The application of the result obtained is a qualitative analysis of solutions of systems of differential equations with fast and slow variables.

Key words: boundedness of motion relative to some variables, estimation of the norm of solutions of equations of perturbed motion, systems of differential equations with fast and slow variables.

Вступ.

Явища реального світу є складними для коректного моделювання і прості стратегії їх аналізу, що базуються на лінійних наближеннях моделі, не завжди достатні [5]. Тому використання нелінійних диференціальних рівнянь для моделювання явищ реального світу залишається актуальною проблемою.

Класичне означення стійкості руху щодо частини змінних перегукується з працями Ляпунова [1]. Ідея дослідити обмеженість руху щодо частини змінних з'явилася пізніше ([12] та бібліографія там). Отримані у цьому напрямку результати узагальнені у низці монографій (наприклад [2, 6] і бібліографія там). В означенні, що наводиться нижче, враховується скінченність інтервалу, на якому розглядається рух системи.

Метою цієї статті є отримання достатніх умов обмеженості руху щодо частини змінних на основі оцінки норми розв'язків пов'язаних рівнянь збуреного руху. Одним із застосувань отриманого результату є якісний аналіз розв'язків систем диференціальних рівнянь із швидкими та повільними змінними ([4] та бібліографія там).

1. Постановка задачі.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь збуреного руху

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y); \quad \frac{dy}{dt} = g(t, x, y); \quad x(t_0) = x_0; \quad y(t_0) = y_0, \quad (1)$$

де $x \in R^n$, $y \in R^m$ і f та g – неперервні вектор-функції на множині $R_+ \times R^n \times R^m$. Припустимо, що $f(t, 0, 0) \neq 0$ і $g(t, 0, 0) \neq 0$ при всіх $t \in J$, $J \subset R_+$ і розв'язок початкової задачі (1) – y -продовжуваний, тобто, будь-який розв'язок $(x^T(t), y^T(t))^T$ системи (1) означений при всіх $t \geq t_0$, для яких $\|y(t)\| \leq H$, де $H > 0$ – деяка стала величина.

Далі введемо позначення

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}; \quad \|y\| = \left(\sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{1/2}; \quad \|z\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{j=1}^m y_j^2 \right)^{1/2} = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2 \right)^{1/2}$$

і наведемо необхідні для подальшого викладу результатів означення.

Означення 1. Рух $(x(t), y(t))^T$ системи (1) є

(а) x -обмеженим, якщо для будь-яких $t_0 \in R_+$ і $z_0 \in R^n \times R^m$, $\|z_0\| < \infty$ при заданій постійній $\beta(t_0) > 0$ виконується оцінка $\|x(t, t_0, z_0)\| < \beta(t_0)$ при всіх $t \in J$, де $x(t, t_0, z_0)$ – розв’язок початкової задачі (1);

(б) x -обмеженим рівномірно по t_0 , якщо у Означенні 1 (а) для будь-якого $z_0 \in R^n \times R^m$, $\|z_0\| < \infty$ при заданому $\beta > 0$, не залежному від t_0 , виконується оцінка $\|x(t, t_0, z_0)\| < \beta$ за всіх $t \in J$;

(в) x -обмеженим рівномірно по y_0 , якщо для будь-якого $t_0 \geq 0$ і компакту $K \subset R^n \times R^m$ знайдеться $\beta^*(t_0, K) > 0$ таке, що при умові $z_0 \in K$ має місце оцінка $\|x(t, t_0, z_0)\| < \beta^*(t_0, K)$ при всіх $t \in J$;

(г) x -обмеженим рівномірно по $\{t_0, z_0\}$, якщо в Означенні 1 (в) для будь-якого компакту K можна вибрати $\beta^*(K) > 0$ не залежним від t_0 .

Цікавим є питання про достатні умови x -обмеженості руху системи (1) у сенсі Означення 1.

2. Оцінка розв’язку системи (1).

Рівняння (1) перепишемо в інтегральній формі

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s), y(s)) ds; \\ y(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t g(s, x(s), y(s)) ds, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{2}$$

Звідси знаходимо, що

$$\begin{aligned} \|x(t)\| + \|y(t)\| &\leq \|x_0\| + \|y_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, x(s), y(s))\| + \\ &\quad + \|g(s, x(s), y(s))\| ds, \quad t \geq t_0. \end{aligned} \tag{3}$$

Припустимо, що для системи (2) виконуються умови:

A_1). Існують невід’ємні інтегровні функції $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ такі, що в області значень $(t, x, y) \in R_+ \times R^n \times R^m$ виконуються оцінки

$$\begin{aligned} (a) \quad &\|f(t, x, y)\| \leq \psi_1(t) (\|x\| + \|y\|)^p; \\ (б) \quad &\|g(t, x, y)\| \leq \psi_2(t) (\|x\| + \|y\|)^p, \end{aligned} \tag{4}$$

де $1 < p < q < \infty$.

Позначимо $\|z(t)\| = \|x(t)\| + \|y(t)\|$ і покажемо, що має місце таке твердження.

Лема 1. Припустимо, що для системи рівнянь (1) виконуються умови припущення A_1), тоді

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| (1 - N(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}} \quad (5)$$

при всіх $t \in J$, для яких

$$N(t, t_0) = (p + q - 2) \left[\|z_0\|^{p-1} \int_{t_0}^t \psi_1(s) ds + \|z_0\|^{q-1} \int_{t_0}^t \psi_2(s) ds \right]. \quad (6)$$

Доведення. Враховуючи позначення $\|z(t)\|$ та умови припущення A_1) з нерівності (3) отримуємо оцінку

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| + \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^p + \psi_2(s) \|z(s)\|^q \right) ds \quad (7)$$

і далі

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| + \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) \|z(s)\| ds, \quad t \geq t_0. \quad (8)$$

Застосовуючи до нерівності (8) лему Гронуолла – Беллмана, отримаємо нерівність (cf. [11])

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| \exp \left[\int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] \quad (9)$$

при всіх $t \geq t_0$. З оцінки (9) випливає, що

$$\begin{aligned} \|z(t)\|^{p-1} &\leq \|z_0\|^{p-1} \exp \left[(p-1) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right]; \\ \|z(t)\|^{q-1} &\leq \|z_0\|^{q-1} \exp \left[(q-1) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] \end{aligned} \quad (10)$$

при всіх $t \geq t_0$. Оскільки $1 < p < q < \infty$, то з (10) знаходимо оцінки

$$\begin{aligned} \|z(t)\|^{p-1} &\leq \|z_0\|^{p-1} \exp \left[(p+q-2) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right]; \\ \|z(t)\|^{q-1} &\leq \|z_0\|^{q-1} \exp \left[(p+q-2) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] \end{aligned} \quad (11)$$

при всіх $t \geq t_0$.

Помноживши обидві сторони першої нерівності із системи (1) на $-(p+q-2)\psi_1(t)$ і другої на $-(p+q-2)\psi_2(t)$, отримаємо

$$\begin{aligned} -\|z(t)\|^{p-1} \psi_1(t) (p+q-2) \exp \left[-(p+q-2) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] &\geq \\ &\geq \|z_0\|^{p-1} (p+q-2) \psi_1(t); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
& -\|z(t)\|^{p-1} \psi_2(t)(p+q-2) \exp \left[-(p+q-2) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] \geq \\
& \geq \|z_0\|^{p-1} (p+q-2) \psi_2(t)
\end{aligned}$$

при всіх $t \geq t_0$. Неважко бачити, що має місце нерівність

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \exp \left[-(p+q-2) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] \geq \\
& \geq -\|z_0\|^{p-1} (p+q-2) \psi_1(t) - \|z_0\|^{q-1} (p+q-2) \psi_2(s)
\end{aligned} \tag{13}$$

при всіх $t \geq t_0$. Інтегруючи обидві сторони нерівності (13) від t_0 до t , отримаємо оцінку

$$\exp \left[(p+q-2) \int_{t_0}^t \left(\psi_1(s) \|z(s)\|^{p-1} + \psi_2(s) \|z(s)\|^{q-1} \right) ds \right] \leq (1 - N(t, t_0))^{-1} \tag{14}$$

для тих значень $t \in J$, для яких $N(t, t_0) < 1$.

Враховуючи оцінку (14), з нерівності (9) випливає, що

$$\|z(t)\|^{p+q-2} \|z_0\|^{-(p+q-2)} \leq (1 - N(t, t_0))^{-1}$$

або

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| (1 - N(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}} \tag{15}$$

при всіх $t \in J$, для яких $N(t, t_0) < 1$. Лема 1 доведена.

Лема 1 має наслідки, що враховують структуру правої частини системи (1).

Лема 2. Нехай за умов припущення A_1) (нерівність (б)) величина $q = 1$. Тоді, якщо

$$N_1(t, t_0) = (p-1) \|z_0\|^{p-1} \int_{t_0}^t \psi_1(s) \exp \left[(p-1) \int_{t_0}^s \psi_2(\tau) d\tau \right] ds < 1 \tag{16}$$

при всіх $t \in J \subset R_+$, то справджується оцінка

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| \exp \left[\int_{t_0}^t \psi_2(s) ds \right] (1 - N_1(t, t_0))^{-\frac{1}{p-1}} \quad \text{при всіх } t \in J.$$

Доведення цього твердження аналогічне доведенню Теорема 2 із статті [8].

3. Умови x -обмеженості руху.

Лема 1 і 2 дозволяють встановити нові достатні умови x -обмеженості руху системи (1).

Теорема 1. Припустимо, що для системи (1) виконуються всі умови леми 1 і крім того:

(1) $N(t, t_0) < 1$ за всіх $t \in J$;

(2) існує постійна $\lambda > 0$ і для заданої величини $\beta(t_0) > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\lambda} (1 - N(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}} < \frac{\beta(t_0)}{\|z_0\|}$$

при всіх $t \in J$ і $\|z_0\| < \infty$.

Тоді рух системи (1) x -обмежений.

Доведення. Нехай $z(t) = (x(t), y(t))^T$ – розв’язок системи рівнянь (1) з початковими умовами: $t_0 \in J$ і $z_0 \in R^n \times R^m$, $\|z_0\| < \infty$.

Припустимо, що при виконанні умов Теорема 1 для деякого $t_1 \in J$, $t_1 > t_0$ для x -розв’язку системи (1) виконується співвідношення $\|x(t_1, t_0, z_0)\| = \beta(t_0)$, де $\beta(t_0) > 0$ – деяка задана величина.

При виконанні умов Лема 1 та умови (1) Теорема 1 вірна оцінка

$$\|z(t)\| < \|z_0\| (1 - N(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}}$$

при всіх $t \in [t_0, t_1]$. Так як $\lambda \|x\| \leq \|x\| + \|y\|$ для деякого $\lambda > 0$, то

$$\lambda \|x(t_1)\| \leq \|z(t_1)\| \leq \|z_0\| (1 - N(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}}$$

та за умови (2) маємо оцінки

$$\|x(t_1)\| < \frac{\|z_0\| \beta(t_0)}{\|z_0\|} = \beta(t_0).$$

Це суперечить припущенню про існування $t_1 > t_0$, для якого $\|x(t_1)\| = \beta(t_0)$. Отже, $\|x(t)\| < \beta(t_0)$ при всіх $t \in J$. Теорему 1 доведено.

Теорема 2. Припустимо, що для системи (1) виконуються всі умови Лема 1 і крім того:

- (1) рівномірно $t_0 \in J$ виконується оцінка $N(t, t_0) < 1$ при всіх $t \in J$;
- (2) існує постійна $\lambda > 0$ і при заданій величині $\beta > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\lambda} (1 - N(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}} < \frac{\beta}{\|z_0\|} \quad \text{при всіх } t \geq t_0.$$

Тоді рух системи (1) x -обмежено рівномірно t_0 .

Доведення Теорема 2 аналогічне доведенню Теорема 1.

Далі розглядатимемо компактну множину $K \subset R^n \times R^m$, наприклад,

$$K_\alpha = \left\{ (x_0, y_0) \in R^n \times R^m : \|z_0\|^2 \leq \alpha^2 \right\},$$

де $\alpha > 0$ – деяка стала величина. Має місце таке твердження.

Теорема 3. Припустимо, що для системи (1) виконуються всі умови Лема 1 і крім того:

- (1) для компакту K_α виконується умова

$$N^*(t, t_0) = (p + q - 2) \left[\alpha^{2(p-1)} \int_{t_0}^t \psi_1(s) ds + \alpha^{2(q-1)} \int_{t_0}^t \psi_2(s) ds \right] < 1$$

при всіх $t \in J$;

- (2) існує $\lambda > 0$ і при заданій величині $\beta^* > 0$ виконується нерівність

$$\frac{1}{\lambda} (1 - N^*(t, t_0))^{-\frac{1}{p+q-2}} < \frac{\beta^*}{\alpha^2}$$

при всіх $t \in J$.

Тоді рух системи (1) x -обмежений рівномірно відносно y_0 .

Доведення Теорема 3 аналогічне доведенню Теорема 1.

4. Застосування.

4.1. Загальний випадок системи зі швидкими та повільними змінними. Розглянемо систему рівнянь збуреного руху, що містить швидкі та повільні змінні ([4] та бібліографія там)

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \mu X(t, x, y, \mu); \\ \frac{dy}{dt} &= Y(t, x, y) + \mu F(t, x, y, \mu),\end{aligned}\tag{17}$$

де

$$x \in R^n; \quad y \in R^m; \quad X \in C(R_+ \times R^n \times R^n \times M, R^n); \quad Y \in C(R_+ \times R^n \times R^m, R^n);$$

$$F \in C(R_+ \times R^n \times R^m \times M, R^m);$$

$M = (0, 1]$ – область значень малого параметра μ . Покладаючи в системі (17) $\mu = 0$, отримаємо вироджену систему рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad x(t_0) = x_0; \quad \frac{dy}{dt} = Y(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0.\tag{18}$$

Якщо для вектор-функції $Y(t, x, y)$ існує неперервна невід’ємна функція $\bar{\psi}_2(t)$ така, що виконується нерівність

$$\|Y(t, x, y)\| \leq \bar{\psi}_2(t)(\|x\| + \|y\|)^q, \quad q > 1,$$

тоді, згідно з Лемою 2, знаходимо оцінку

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| \left(1 - N_2^*(t, t_0)\right)^{-\frac{1}{q-1}}$$

при всіх $t \in J \subseteq R_+$, для яких

$$N_2^*(t, t_0) = (q-1) \|z_0\|^{q-1} \int_{t_0}^t \bar{\psi}_2(s) ds < 1.$$

Припустимо, що для правої частини системи рівнянь (17) існують неперервні і невід’ємні функції $\varphi_i(t, \mu)$ $i = 1, 2$ такі, що виконуються нерівності

$$A_2) \cdot \|Y(t, x, y, \mu)\| + \|F(t, x, y, \mu)\| \leq \varphi_2(t, \mu)(\|x\| + \|y\|)^q, \quad q > 1$$

при $0 < \mu < \mu_1$ та

$$A_3) \cdot \|X(t, x, y, \mu)\| \leq \varphi_1(t, \mu)(\|x\| + \|y\|)^p, \quad p > 1$$

при $0 < \mu < \mu_2$. При виконанні умов припущень $A_2)$, $A_3)$ з рівнянь (17) випливає, що

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| + \int_{t_0}^t \varphi_1(s, \mu) [z(s)]^p ds + \int_{t_0}^t \varphi_2(s, \mu) \|z(s)\|^q ds, \quad t \geq t_0.\tag{19}$$

Застосовуючи до нерівності (19) Лему 1, отримаємо оцінку

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| (1 - N(t, t_0, \mu))^{-\frac{1}{p+q-2}}\tag{20}$$

при всіх $t \in J \subseteq R_+$, для яких

$$N(t, t_0, \mu) = (p+q-2) \left[\|z_0\|^{p-1} \int_{t_0}^t \varphi_1(s, \mu) ds + \|z_0\|^{q-1} \int_{t_0}^t \varphi_2(s, \mu) ds \right] < 1$$

при $0 < \mu < \min(\mu_1, \mu_2)$.

Використовуючи ідею доведення Теорема 1 неважко показати, що рух системи (17) x -обмежений, якщо виконуються умови

(1) $N(t, t_0, \mu) < 1$ при всіх $t \in J$ і $0 < \mu < \mu_3$;

(2) для деякого $\lambda^* > 0$ при заданому значенні $\beta^* > 0$ справджується нерівність

$$\frac{1}{\lambda^*} (1 - N(t, t_0, \mu))^{-\frac{1}{p+q-2}} < \frac{\beta^*}{\|z_0\|}$$

при значеннях $0 < \mu < \min(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$.

4.2. Зведення системи (17) до стандартного вигляду.

Нехай розв'язком системи (18) є

$$x = \text{const} \quad \text{і} \quad y = \varphi(t, x, c), \quad (21)$$

де $\varphi \in C(R_+ \times R^n \times R, R^m)$ і c – довільна постійна. Розглядаючи (21) як заміну змінних у системі (17), неважко отримати наступну систему рівнянь у стандартному вигляді

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(t, x, \varphi(t, x, c), \mu), \quad x(t_0) = x_0; \quad \frac{dc}{dt} = \mu C(t, x, c, \mu), \quad c(t_0) = c_0, \quad (22)$$

де

$$C(t, x, c, \mu) = \mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c} \right)^{-1} \left\{ F(t, x, \varphi(t, x, c), \mu) - \frac{\partial \varphi}{\partial x} X(t, x, \varphi, \mu) \right\}$$

і c_0 визначається з рівняння

$$y_0 = \varphi(t_0, x_0, c_0). \quad (23)$$

Для системи (17) введемо такі припущення:

A_4). Функції $X(t, x, y, \mu)$, $Y(t, x, y)$ і $F(t, x, y, \mu)$ означені та неперервні в області $Q = \{t \geq t_0, x \in D_1, y \in D_2, 0 < \mu \leq \mu_0\}$.

A_5). Розв'язок $y = \varphi(t, x, c)$ означений в області $Q_1 = \{t \geq t_0, x \in D_1, c \in D_3\}$ та $\varphi(t, x, c) \in D_2$ як тільки $(t, x, c) \in Q_1$ і частинні похідні $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial \varphi_i}{\partial c_j}$ обмежені в області Q_1 .

A_6). Існують неперервні невід'ємні функції $\psi_1(t, \mu)$, $\psi_2(t, \mu)$ і в області $Q \times Q_1$ виконуються нерівності

$$(a) \quad \|X(t, x, \varphi(t, x, c), \mu)\| \leq \psi_1(t, \mu) (\|x\| + \|c\|)^p; \quad (24)$$

$$(б) \quad \|C(t, x, c, \mu)\| \leq \psi_2(t, \mu) (\|x\| + \|c\|)^q,$$

де $p > 1, q \geq 1$ і $\mu \in (0, \mu_0)$.

При виконанні умов із припущень $A_4) - A_6)$ до системи (24) застосовна Лема 1, яка призводить до наступної оцінки розв'язків:

$$\|\omega(t)\| \leq \|N_0\| (1 - \Phi(t, t_0, \mu))^{-\frac{1}{p+q-2}}$$

при значеннях $t \in J$, для яких

$$\Phi(t, t_0, \mu) = (p+q-2) \left[\|\omega_0\|^{p-1} \int_{t_0}^t \psi_1(s, \mu) ds + \|\omega_0\|^{q-1} \int_{t_0}^t \psi_2(s, \mu) ds \right] < 1$$

і $\mu \in (0, \mu_0)$.

Тут $\|\omega(t)\| = \|x(t)\| + \|c(t)\|$ при всіх $t \in J$ і $\|\omega_0\| = \|x_0\| + \|c_0\|$.

4.3. Системи з кількома фазами, що обертаються. До цього типу систем відносяться рівняння виду

$$\frac{dx}{dt} = \mu X(t, x, y); \quad \frac{dy}{dt} = \omega(x) + \mu Y(t, x, y), \quad (25)$$

де $x \in R^n$, $y \in R^m$; фазовий вектор $\omega: R^n \rightarrow R^m$ і вектор-функції $X(t, x, y)$ та $Y(t, x, y)$ – періодичні відносно y з періодом 2π .

Нехай у системі (25) $\mu = 0$, тоді

$$x = \text{const}, \quad y = \omega(x)t + c \quad (26)$$

є розв'язком виродженої системи, що відповідає (25).

Як і система (17), система (25) зводиться до стандартного вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu X(t, x, \omega(x)t + c), \quad x(t_0) = x_0; \\ \frac{dy}{dt} &= \mu Y(t, x, \omega(x)t + c), \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned} \quad (27)$$

Припустимо, що за будь-якого цілочисельного вектора k , відмінного від нуля, $(\omega(x), k) \neq 0$ і

$$|(\omega(x), k)| > \frac{\text{const}}{|k|^{m+1}}, \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_m|$$

за будь-яких $x \in D_1 \subset R^n$, тобто, у системі (27) за всіх $t \geq t_0$ відсутній резонанс.

Стосовно системи (27) зробимо припущення

A_7). Існують неперервні невід'ємні функції $a(t, \mu)$, $b(t, \mu)$ такі, що:

$$\begin{aligned} \text{(а)} \quad \mu \|X(t, x, \omega(x)t + c)\| &\leq a(t, \mu) (\|x\| + \|c\|)^p \quad \text{при всіх } (t, x, c) \in R_+ \times R^n \times R^m, \\ \mu &\in (0, \mu_0); \end{aligned}$$

$$\text{(б)} \quad \mu \|Y(t, x, \omega(x)t + c)\| \leq b(t, \mu) (\|x\| + \|c\|)^q \quad \text{при всіх } (t, x, c) \in R_+ \times R^n \times R^m$$

і деяких $p \geq 1$, $q > 1$.

При виконанні умов припущення A_7) до системи (27) застосовна Лема 1, що дозволяє встановити оцінку $\|z(t)\| = \|x(t)\| + \|c(t)\|$ у вигляді

$$\|z(t)\| \leq \|z_0\| (1 - \Pi(t, t_0, \mu))^{-\frac{1}{p+q-2}} \quad (28)$$

при всіх $t \geq t_0$, для яких

$$\Pi(t, t_0, \mu) = (p+q-2) \left[\|z_0\|^{p-1} \int_{t_0}^t a(s, \mu) ds + \|z_0\|^{q-1} \int_{t_0}^t b(s, \mu) ds \right] < 1$$

для значень $\mu \in (0, \mu_0)$.

Оцінка (28) дозволяє встановити умови x -обмеженості руху системи (27) аналогічно до того, як це зроблено в розділі 3.

Зауваження. До виду (25) зводиться система рівнянь руху супутника [3] при деяких припущеннях про величину обертового моменту. У цьому випадку змінна $y \in R^3$ і $x \in R^4$.

Висновки.

Для отримання нових умов обмеженості руху нелінійної системи відносно частини змінних розвинено спосіб оцінки норм розв'язків пов'язаних нелінійних систем на основі псевдо-лінійного подання нелінійних інтегральних нерівностей [7 – 11]. Як застосування одержаних результатів розглядаються системи зі швидкими та повільними змінними, для яких встановлені оцінки розв'язків та умови обмеженості відносно повільних змінних.

РЕЗЮМЕ. Отримано нові достатні умови обмеженості руху за частиною змінних. Ці умови засновані на оцінці норми розв'язків рівнянь збуреного руху. Застосування отриманого результату ілюструється в процесі якісного аналізу розв'язків систем диференціальних рівнянь із швидкими та повільними змінними.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: обмеженість руху за деякими змінними, оцінка норми розв'язків рівнянь збуреного руху, системи диференціальних рівнянь із швидкими та повільними змінними.

1. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. – Москва-Ленинград: ГИТТЛ, 1950. – 472 с.
2. *Румянцев В.В., Озиранер А.С.* Устойчивость и стабилизация относительно некоторых переменных. – Москва: Наука, 1987. – 253 с.
3. *Beletsky V.V.* Motion of a Satellite about its Center of Mass in the Gravitational Field. – Moscow: MSU Publishers, 1975. – 308 p.
4. *Bogolyubov N.N., Mitropolsky Yu.A.* Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. – New York: Gordon and Breach, 1961. – 548 p.
5. *Fieguth P.* An Introduction to Complex Systems: Society, Ecology, and Nonlinear Dynamics. – Berlin: Springer Nature Switzerland AG, 2021. – 463 p.
6. *Hahn W.* Stability of Motion. – Berlin: Springer – Verlag, 1967. – 446p.
7. *Louartassi Y., Mazoudi E.H.E., Elalami N.* A New Generalization of Lemma Gronwall-Bellman // Appl. Math. Sci. – 2012. – 6. – P. 621 – 628.
8. *Martynyuk A.A.* Novel Bounds for Solutions of Nonlinear Differential Equations // Appl. Math. – 2015. – 6. – P. 182 – 194.
9. *Martynyuk A.A.* Analysis of Equiboundedness and Stability of the Motion of Essentially Nonlinear Systems // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, N 1. – P. 59 – 67.
10. *Martynyuk A.A.* Stability and Boundedness of the Solutions of Dynamic Equations with Conformable Fractional Derivative of the State Vector // Int. Appl. Mech. – 2023. – 59, N 6. – P. 631 – 640.
11. *N'Doye I.* Generalization du lemme de Gronwall-Bellman pour la stabilisation des systemes fractionnaires. – These PhD, Nancy University, 2011. – 202 p.
12. *Yoshizawa T.* Stability Theory by Lyapunov Second Method. – Tokyo: The Math. SCI of Japan, 1966. – 223 p.

Надійшла 26.10.2023

Затверджена до друку 16.04.2024