

В.С.Кирилюк¹, О.І.Левчук¹, П.Ю.Кобзар¹, М.Б.Вітер²

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ ЖОРСТКОГО
ЕЛІПТИЧНОГО ДИСКУ У П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ
ВЗДОВЖ ОСІ СИМЕТРІЇ МАТЕРІАЛУ**

¹Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: kirilyuk_v@ukr.net

²Національний транспортний університет,
вул. Омеляновича-Павленка, 1, 01010, Київ, Україна; e-mail: mbviter@gmail.com

Abstract. Using the rigorous mathematical model that takes into account a coupling of the force and electric fields in piezoelectric bodies, the stress distribution that occurs for the displacement of a rigid thin elliptical disk along the axis of symmetry of a material of an electroelastic transversely isotropic space is studied. The exact solution of the three-dimensional problem of electroelasticity is obtained based on the solution representing of the static equations of electroelasticity for a transversely isotropic body through harmonic functions and using a harmonic potential of a special type. As the special cases, the found analytical solution yields expressions for evaluating the stress state in an elastic transversely isotropic space for the displacement of an elliptical hard disk, as well as formulas for finding the stress state in an electroelastic space for the displacement of a hard circular disk. Numerical studies are carried out, and the influence of the coupling of the force and electric fields on the distribution of stresses under a rigid elliptical disk (for its displacement along the axis of symmetry of a material of the piezoelectric space) is studied.

Key words: piezoelectric space, hard elliptic disc, displacement of the disc, axis of symmetry of the material, stress distribution, field coupling effect.

Вступ.

Широке використання п'єзоелектричних матеріалів при створенні перетворювачів енергії та елементів вимірювальних приладів для різних галузей промисловості обумовлює інтерес до аналізу силових і електричних полів у електропружних (п'єзоелектричних) тілах поблизу концентраторів напружень. В той же час, дослідження розподілу напружень на основі розв'язків тривимірних задач електропружності для анізотропних п'єзоелектричних тіл у математично строгій постановці, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів, суттєво ускладнюється, оскільки виникає необхідність розв'язувати граничну задачу для системи рівнянь, що має значно складнішу структуру (у порівнянні з системою рівнянь теорії пружності).

Зауважимо, що на цей час детальний аналіз напруженого стану у п'єзоелектричних тілах з концентраторами напружень проведено для задач електропружності у двовимірній постановці [2, 7, 8, 10, 18 – 20, 28]. Для тривимірних статичних задач електропружності у випадку п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного тіла представлення розв'язків зв'язаної системи рівнянь стосовно силових і електричних полів через гармонічні функції отримано у роботах [21] та [26]. Ряд результатів досліджень напруженого стану у просторових електропружних тілах наведено у роботах [1, 3, 5, 11 – 13, 16, 17, 21, 22, 26, 27]. Зауважимо, що просторові задачі статичної електропружності для трансверсально-ізотропних та ортотропних електропружних тіл з дові-

льно орієнтованими тріщинами та включеннями, наприклад, в роботі [13] досліджено за допомогою узагальнення підходу [14, 15] на основі потрійного перетворення Фур'є та функції Гріна для ортотропного пружного матеріалу на випадок електропружного тіла з використанням функції Гріна для електропружного матеріалу.

Відзначимо, що задачі про переміщення жорсткого кругового та еліптичного диску у чисто пружному трансверсально-ізотропному просторі (при розташуванні диску у площині ізотропії матеріалу), розглянуто у роботах [24] та [23, 25] відповідно, а деякі важливі результати стосовно розподілу напружень під жорсткими включеннями наведено у [4, 6].

У даній роботі отримано точний розв'язок тривимірної задачі електропружності і досліджено розподіл напружень поблизу еліптичного диску при його переміщенні вздовж осі симетрії п'єзоелектричного матеріалу, вивчено вплив зв'язаності силових і електричних полів на напружений стан. При постановці задачі припускається, що еліптичний диск розміщено у площині симетрії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу, а також, що двостороння поверхня еліптичного диску є неелектродованою (не містить електродного покриття). За допомогою представлення розв'язку рівнянь статки електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічний потенціал спеціального вигляду отримано точний розв'язок задачі електропружності, у явному вигляді отримано вирази напружень під еліптичним диском. Як частинні випадки зі знайденого розв'язку задачі електропружності випливають вирази для оцінки напруженого стану при переміщенні жорсткого еліптичного диску у пружному трансверсально-ізотропному та ізотропному матеріалах.

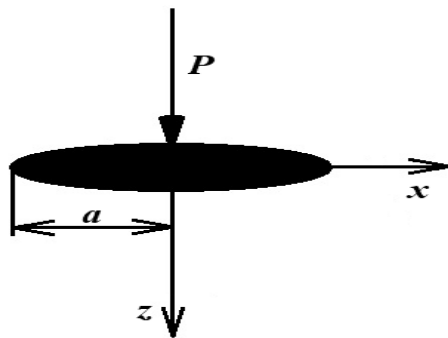


Рис. 1

1. Постановка задачі.

Розглянемо математичну модель, за допомогою якої вивчимо розподіл напружень, що виникає при переміщенні жорсткого еліптичного диску у п'єзоелектричному трансверсально-ізотропному просторі вздовж осі симетрії матеріалу (рис. 1).

Припустимо, що площина $z = 0$ (рис. 1) у електропружному трансверсально-ізотропному просторі, у якій розміщується жорсткий еліптичний диск, що займає область Ω , є площиною симетрії електропружного трансверсально-ізотропного матеріалу. Також вважаємо, що двостороння поверхня жорсткого диску не містить електродного покриття (є неелектродованою).

Під дією сили P еліптичний диск (включення) здійснює переміщення w_0 вздовж осі $0z$. Граничні умови у площині $z = 0$ приймають наступний вигляд:

$$u_z = w_0, (x, y) \in \Omega; \quad \sigma_{zz} = 0, (x, y) \notin \Omega; \quad u_x = u_y = 0, \quad z = 0; \quad (1)$$

$$D_z(x, y) = 0, \quad z = 0, \quad (2)$$

де $\Omega: x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1$; D_z – нормальна компонента вектора електричної індукції (електричних переміщень). Умова (2) по електричному стану відповідає випадку відсутності електричного покриття на поверхні еліптичного включення (диску).

2. Основні рівняння і співвідношення.

Рівняння статки електропружності для п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного тіла стосовно компонентів вектора переміщень і електричного потенціалу Ψ згідно [1, 21] мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
& c_{11}^E u_{x,xx} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{x,yy} + c_{44}^E u_{x,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{y,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,xz} + \\
& + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,xz} = 0 ; \\
& c_{11}^E u_{y,yy} + \frac{1}{2} (c_{11}^E - c_{12}^E) u_{y,xx} + c_{44}^E u_{y,zz} + \frac{1}{2} (c_{11}^E + c_{12}^E) u_{x,xy} + (c_{13}^E + c_{44}^E) u_{z,yz} + \\
& + (e_{31} + e_{15}) \Psi_{,yz} = 0 ; \\
& (c_{13}^E + c_{44}^E) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + c_{44}^E (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + c_{33}^E u_{z,zz} + \\
& + e_{15} (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + e_{33} \Psi_{,zz} = 0 ; \\
& (e_{31} + e_{15}) (u_{x,xz} + u_{y,yz}) + e_{15} (u_{z,xx} + u_{z,yy}) + e_{33} u_{z,zz} - \varepsilon_{11}^S (\Psi_{,xx} + \Psi_{,yy}) + \varepsilon_{33}^S \Psi_{,zz} = 0 .
\end{aligned} \tag{3}$$

В рівняннях (3) використані наступні позначення: $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – незалежні модулі пружності; e_{31}, e_{15}, e_{33} – п'єзомодулі; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – діелектричні проникності. Отже, електропружні властивості п'єзоелектричного трансверсально-ізотропного матеріалу описуються за допомогою десяти незалежних сталих.

Розв'язок системи рівнянь (3) згідно [21] можна представити за допомогою чотирьох потенціальних функцій Φ_j ($j = \overline{1,4}$)

$$u_x = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,x} + \Phi_{4,y}; \quad u_y = \sum_{j=1}^3 \Phi_{j,y} - \Phi_{4,x}; \quad u_z = \sum_{j=1}^3 k_j \Phi_{j,z}; \quad \Psi = \sum_{j=1}^3 l_j \Phi_{j,z}, \tag{4}$$

де k_j, l_j – деякі сталі, а функції Φ_j задовольняють рівнянням

$$\Phi_{j,xx} + \Phi_{j,yy} + \nu_j \Phi_{j,zz} = 0 \quad (j = 1, 2, 3), \tag{5}$$

$\nu_4 = 2c_{44}^E / (c_{11}^E - c_{12}^E)$, а значення ν_i ($i = 1, 2, 3$) згідно [9] є коренями наступного алгебраїчного рівняння третього порядку

$$\begin{aligned}
& \nu^3 (A_1 B_2 - C_1 D_2) + \nu^2 (A_1 B_3 + A_2 B_2 - C_1 D_3 - C_2 D_2) + \\
& + \nu (A_2 B_3 + A_3 B_2 - C_2 D_3 - C_3 D_2) + A_3 B_3 - C_3 D_3 = 0 .
\end{aligned} \tag{6}$$

Значення k_j, l_j ($j = 1, 2, 3$) у виразах (4) пов'язані зі значеннями ν_j , що входять до рівнянь (5) та визначаються з алгебраїчного рівняння (6), наступними співвідношеннями:

$$\frac{a_j + c_{13}^E k_j + e_{31} l_j}{c_{11}^E} = \frac{c_{33}^E k_j + e_{33} l_j}{c_{13}^E + a_j} = \frac{c_{33}^E k_j - \varepsilon_{33}^S l_j}{e_{31} + d_j} = \nu_j \quad (j = 1, 2, 3), \tag{7}$$

$$a_j = c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j; \quad d_j = e_{15} (1 + k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j \quad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{8}$$

де вирази (7), (8) використовуються при подальших обчисленнях.

Зауважимо, що при введенні позначень $z_j = z n_j^{-1/2}$ ($j = \overline{1,4}$) функції $\Phi_1(x, y, z_1)$, $\Phi_2(x, y, z_2)$, $\Phi_3(x, y, z_3)$, $\Phi_4(x, y, z_4)$ згідно виразів (5) стають гармонічними функціями у відповідних системах координат.

3. Метод розв'язання.

При побудові розв'язку граничної задачі електропружності для п'єзоелектричного матеріалу скористаємося представленням (4) – (8). Функції $\Phi_i(x, y, z_i)$ візьмемо у вигляді

$$\Phi_i(x, y, z_i) = \alpha_j^* f(x, y, z_i) \quad (i = 1, 2, 3); \quad \Phi_4 \equiv 0,$$

де α_j^* – невідомі сталі; $f(x, y, z)$ – гармонічна функція виду

$$f(x, y, z) = \int_{\xi}^{\infty} [z - z(s)] \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}; \quad (9)$$

$$z(s) = \sqrt{s} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2 + s} - \frac{y^2}{b^2 + s}},$$

де ξ – еліпсоїдальна координата [9]. Для цієї функції маємо

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \int_{\xi}^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}}.$$

Під еліптичним диском отримуємо

$$\int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2 + s)(b^2 + s)s}} = \frac{2K(e_0)}{a},$$

де $K(e_0)$ – повний еліптичний інтеграл першого роду, який визначається за формулами

$$K(e_0) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-e_0^2 t^2)}}, \quad e_0^2 = 1 - b^2/a^2.$$

З граничних умов (1) – (3), використовуючи (9), отримуємо

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j^* = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* [e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j] = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j^* \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} \frac{2K(e_0)}{a} = w_0. \quad (10)$$

Введемо нові невідомі $\alpha_j = \alpha_j^* 2K(e_0)/(aw_0)$. Тоді з системи (10) для пошуку невідомих $\alpha_j (j = \overline{1,3})$ маємо

$$\sum_{j=1}^3 \alpha_j = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j [e_{15}(1+k_j) - \varepsilon_{11}^S l_j] = 0; \quad \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} = 1. \quad (11)$$

Для зручності скористаємось еліптичними координатами ξ, η, ζ [10], які є коренями кубічного рівняння стосовно s

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{s} - 1 = 0.$$

У площині $z = 0$ маємо $\xi = 0$ і для знаходження еліпсоїдальних координат η, ζ отримуємо квадратне рівняння відносно s

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} - 1 = 0.$$

Записавши це рівняння в розгорнутому вигляді

$$s^2 + s(a^2 + b^2 - x^2 - y^2) + (a^2b^2 - b^2x^2 - a^2y^2) = 0,$$

за теоремою Вієта знаходимо

$$\eta\zeta = a^2b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right).$$

Знайшовши $\partial^2 f / \partial z^2$ та прийнявши до уваги отриманий вираз для добутку двох еліпсоїдальних координат та формулу

$$\partial\xi / \partial z = \frac{2z(a^2 + \xi)(b^2 + \xi)}{(\xi - \eta)(\xi - \zeta)},$$

маємо вирази напружень під еліптичним диском (при його переміщенні вздовж осі симетрії матеріалу) у вигляді

$$\sigma_{zz}(x, y, 0^\pm) = \pm \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15}l_j]}{\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}}} \left\{ -\frac{w_0}{bK(e_0)} \left[1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right]^{-1/2} \right\}. \quad (12)$$

За допомогою формули (12) зв'язок між переміщенням еліптичного диска та прикладеної до нього сили отримуємо у вигляді

$$P = \iint_{\Omega} [(\sigma_{zz})_{z=0^-} - (\sigma_{zz})_{z=0^+}] dx dy = \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_j [c_{44}^E(1 + k_j) + e_{15}l_j]}{\sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}}} 4\pi a \left[\frac{w_0}{K(e_0)} \right]. \quad (13)$$

З виразу (13) видно, що співвідношення між прикладеною силою і переміщенням у п'єзоелектричному просторі залежить від електропружних властивостей п'єзоелектричного матеріалу та геометричних параметрів жорсткого еліптичного диска.

4. Аналіз результатів числових досліджень.

За допомогою отриманих аналітичних виразів вивчимо розподіл напружень під жорстким еліптичним диском, а також вплив зв'язаності силових і електричних полів на переміщення диска у матеріалі. Скористаємось даними роботи [12], у якій наведено властивості ряду п'єзокерамічних матеріалів.

Для проведення комп'ютерного моделювання використаємо наступну схему. Спочатку за допомогою виразів (6) – (8) обчислюємо значення k_j, l_j ($i = 1, 2, 3$). Далі, за допомогою використання гармонічної функції (9), задовольняючи граничним умовам (10), за формулами (11) знаходимо розподіл тиску під жорстким еліптичним диском, який переміщується у електропружному просторі вздовж осі симетрії матеріалу. Після проведення обчислень за вказаним алгоритмом отримуємо, що для того, щоб здійснити переміщення жорсткого диска еліптичної форми на одне й теж значення w_0 (вздовж осі симетрії матеріалу) у різних п'єзоелектричних матеріалах для різних матеріалів потрібно прикласти різні значення сили P . Так, сила P для матеріалів PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H перевищує її відповідне значення при здійсненні такого ж переміщення у матеріалі PZT-5 на 26,02%, 46,37%, 36,81%, відповідно.

Вивчимо також вплив зв'язаності силових і електричних полів на переміщення еліптичного диску у п'єзоелектричному просторі. Для цього проведемо порівняння переміщення диску у електропружному матеріалі та чисто пружному трансверсально-ізотропному матеріалі, який має такі ж самі пружні властивості, як і електропружний матеріал, але немає електричних властивостей. В результаті порівняння знаходимо, що для того, щоб перемістити еліптичний диск у чисто пружному просторі потрібно прикласти меншу за значенням силу. Так, для матеріалів PZT-5, PZT-7A, BaTiO₃, PZT-5H відношення $P^{\text{Elast}} / P^{\text{Piezo}} = 61,39\%, 64,99\%, 80,03\%, 69,21\%$, відповідно. Тобто, з наведених п'єзокерамічних матеріалів найменший вплив зв'язаності силових і електричних полів спостерігався у матеріалі BaTiO₃.

На рис. 2 відображено розподіл тиску під жорстким еліптичним диском при різних геометричних параметрах диску. При розрахунках значення більшої півосі диску покладалось $a = 1$, а значення меншої півосі змінювалось. Криві 1, 2, 3, 4 на рис. 2 відповідали значенням $b/a = 1; 0,8; 0,6; 0,4$, а значення N^* визначалось виразом

$$N^* = \sum_{j=1}^3 \alpha_j \left[c_{44}^E (1 + k_j) + e_{15} l_j \right] / \sum_{j=1}^3 \alpha_j \frac{k_j}{\sqrt{v_j}} .$$

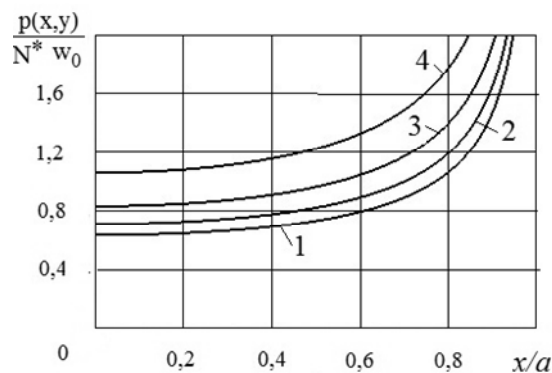


Рис. 2

На рис. 3 відображено вплив зв'язаності силових і електричних полів на розподіл напружень під жорстким диском. При розрахунках параметри диску вибирались $b/a = 0,5$; лінія 1 відповідала випадку переміщення еліптичного диску у п'єзоелектричному матеріалі PZT-7A, а крива 2 – переміщенню у пружному трансверсально-ізотропному матеріалі, пружні властивості якого співпадають з властивостями електропружного матеріалу PZT-7A.

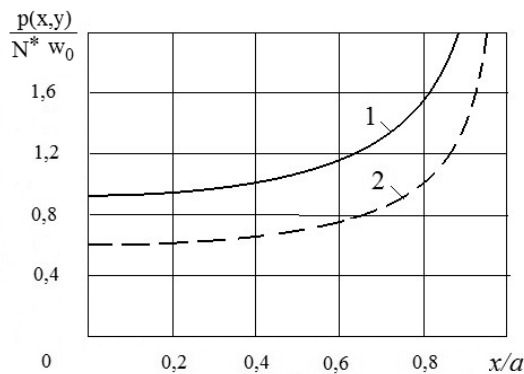


Рис. 3

Видно, що зв'язаність силових і електричних полів суттєво впливає на переміщення еліптичного диску вздовж осі симетрії електропружного матеріалу, значно зменшуючи його у порівнянні з чисто пружним трансверсально-ізотропним матеріалом (при однаковій силі P). Вплив зв'язаності полів на розподіл напружень під еліптичним диском для п'єзокерамічного матеріалу PZT-7A – близько 35% (у порівнянні з чисто пружним матеріалом, з тими ж пружними характеристиками, що й електропружний матеріал PZT-7A).

Відзначимо, що у частинних випадках, коли жорсткий еліптичний диск переміщується у пружному трансверсально-ізотропному просторі (вздовж осі симетрії матеріалу), з отриманих результатів випливають дані робіт [24, 25].

Висновки.

На основі математичної моделі, що враховує зв'язаність силових і електричних полів, отримано точний розв'язок задачі електропружності про переміщення жорсткого еліптичного диску у електропружному просторі, досліджено розподіл напружень під жорстким еліптичним диском при його переміщенні вздовж осі симетрії матеріалу. Проведено числові розрахунки, досліджено вплив геометричних параметрів еліптичного диску, електропружних властивостей матеріалу на розподіл напружень. Виявлено значний вплив зв'язаності силових і електричних полів на напружений стан при переміщенні жорсткого еліптичного диску у електропружному матеріалі.

РЕЗЮМЕ. За допомогою строгої математичної моделі, яка враховує зв'язаність силових і електричних полів у п'єзоелектричних тілах, вивчено розподіл напружень, що виникає при переміщенні жорсткого тонкого еліптичного диску вздовж осі симетрії матеріалу електропружного трансверсально-ізотропного простору. Точний розв'язок тривимірної задачі електропружності отримано на основі представлення розв'язку статичних рівнянь електропружності для трансверсально-ізотропного тіла через гармонічні функції і з використанням гармонічного потенціалу спеціального вигляду. Як частинні випадки, із знайденого аналітичного розв'язку випливають вирази для оцінки напруженого стану у пружному трансверсально-ізотропному просторі при переміщенні жорсткого диску еліптичної форми, а також формули для знаходження напруженого стану у електропружному просторі при переміщенні жорсткого диску кругової форми. Проведено числові дослідження, вивчено вплив зв'язаності силового та електричного полів на розподіл напружень під жорстким еліптичним диском (при його переміщенні вздовж осі симетрії матеріалу п'єзоелектричного простору).

КЛЮЧОВІ СЛОВА: п'єзоелектричний простір, жорсткий еліптичний диск, переміщення диску, вісь симетрії матеріалу, розподіл напружень, ефект зв'язаності полів.

1. *Механика связанных полей в элементах конструкций*: в 5-ти томах. Т. 5. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А.* Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
2. *Dai L. Guo W., Wang X.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**, N 6. – P. 1818 – 1831.
3. *Dinzart F., Sabar H.* Electroelastic ellipsoidal inclusion with imperfect interface and its application to piezoelectric composite materials // *Int. J. Solids Struct.* – 2018. – **136**. – P. 241 – 249.
4. *Johnson K.L.* Contact Mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – 452 p.
5. *El Ouafi J., Azrar L., Aljinaidi A.* Analytical and semi-analytical modeling of effective moduli bounds: Application to transversely isotropic piezoelectric materials // *J. of Intelligent Material Systems and Struct.* – 2016. – **27**, N 12. – P. 1600 – 1623.
6. *Gladwell G.M.L.* On contact problems for a medium with rigid flat inclusions of arbitrary shape // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 3 – 4. – P. 383 – 389.
7. *Govorukha V., Kamlah M.* Analysis of a mode III interface crack in a piezoelectric bimaterial based on the dielectric breakdown model // *Arch. of Appl. Mech.* – 2020. – **90**, N 5. – P. 1201 – 1213.
8. *Govorukha V., Sheveleva A., Kamlah M.* A crack along a part of an interface electrode in a piezoelectric bimaterial under anti-plane mechanical and in-plane electric loadings // *Acta Mechanica.* – 2019. – **230**, N 6 – P. 1999 – 2012.
9. *Kassir M.K., Sih G.C.* Some three-dimensional inclusion problems in elasticity // *Int. J. Solids Struct.* – 1968. – **4**, N 2. – P. 225 – 241.

10. *Kiran R., Nguyen-Thanh N., Zhou K.* Adaptive isogeometric analysis-based phase-field modeling of brittle electromechanical fracture in piezoceramics // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2022. – **274**. – 108738.
11. *Kirilyuk V.S.* On the Stress State of a Piezoceramic Body with a Flat Crack under Symmetric Loads // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 11. – P. 1263-1271.
12. *Kirilyuk V.S.* On the Relationship Between the Solutions of Static Contact Problems of Elasticity and Electroelasticity for a Half-Space // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, N 11. – P. 1256-1269.
13. *Kirilyuk V.S.* Thermoelastostressed State of a Piezoelectric Body with a Plane Crack Under Symmetric Thermal Load // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, N 3. – P. 320 – 330.
14. *Kirilyuk V.S.* Stress State of An Elastic Orthotropic Medium with an Elliptic Crack under Tension and Shear // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 4. – P. 358 – 366.
15. *Kirilyuk V.S.* The Stress State of an Elastic Orthotropic Medium with an Ellipsoidal Cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, N 3. – P. 302 – 308.
16. *Kirilyuk V.S., Levchuk O.I.* Stress Contact Interaction of Two Piezoelectric Half-Space, One of which Contains a Near-surface Notch of Elliptical Cross-section // *Int. Appl. Mech.* – 2022. – **58**, N 4. – P. 436 – 444.
17. *Kirilyuk V.S.* Stress State of a Piezoelectric Medium with a Noncentrally Loaded Rigid Circular Disk // *Int. Appl. Mech.* – 2023. – **59**, N 6. – P. 685-694.
18. *Loboda V., Shevelova N., Khodanenko T., Chapelle F., Lapusta Y.* A set of collinear electrically charged interfacial cracks in magnetoelastoelectric bimaterial // *Acta Mechanica*. – 2023. – **234**. – N 10. – P. 4899 – 4915.
19. *Loboda V., Sheveleva A., Komarov O., Chapelle F., Lapusta Y.* Arbitrary number of electrically permeable cracks on the interface between two one-dimensional piezoelectric quasicrystals with piezoelectric effect // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2022. – **276**. – 108878.
20. *Pasternak Y.M., Sulym H.T., Pasternak R.M.* Action of concentrated heat sources in a pyroelectric with cracks for constant temperature of their faces // *Materials Sci.* – 2015. – **51**, N 3. – P. 358 – 365.
21. *Podil'chuk Yu.N.* Representation of the General Solution of Statics Equations of the Electroelasticity of a Transversally Isotropic Piezoceramic Body in terms of Harmonic Functions // *Int. Appl. Mech.* – 1998. – **34**, N 7. – P. 623 – 628.
22. *Podil'chuk Yu.N.* Exact Analytical Solutions of Static Electroelastic and Thermoelastoelectric Problems for a Transversely Isotropic Body in Curvilinear Coordinate Systems // *Int. Appl. Mech.* – 2003. – **394**, N 2. – P. 132 – 170.
23. *Rahman M.* Some problems of a rigid elliptical disk-inclusion bonded inside a transversely isotropic space // *J. Appl. Mech.* – 1999. – **66**. – P. 612 – 620.
24. *Selvadurai A.P.S.* On the displacement of a penny-shaped rigid inclusion embedded in a transversely isotropic elastic medium // *Solid Mech. Arch.* – 1979. – **4**. – P. 163 – 172.
25. *Selvadurai A.P.S.* Axial displacement of a rigid elliptical disc inclusion embedded in a transversely isotropic elastic solid // *Mech. Res. Comm.* – 1982. – **9**, N 1. – P. 39 – 45.
26. *Wang Z.K., Zheng B.L.* The general solution of three-dimension problems in piezoelectric media // *Int. J. Solids Struct.* – 1995. – **32**, N 1. – P. 105 – 115.
27. *Zhao M.H., Li Y., Yan Y., Fan C.Y.* Singularity analysis of planar cracks in three-dimensional piezoelectric semiconductors via extended displacement discontinuity boundary integral equation method // *Engineering Analysis with Boundary Elements*. – 2016. – **67**. – P. 115 – 125.
28. *Zhao M.H., Pan Y.B., Fan C.Y., Xu G.T.* Extended displacement discontinuity method for analysis of cracks in 2D piezoelectric semiconductors // *Int. J. Solids Struct.* – 2016. – **94 – 95**. – P. 50 – 59.

Надійшла 27.06.2023

Затверджена до друку 16.04.2024