

С.Ю.Бабич, Ю.П.Глухов

**ПРУЖНА ОСНОВА ІЗ ЗАХИСНИМ ПОКРИТТЯМ ТА ПОЧАТКОВИМИ
НАПРУЖЕННЯМИ ПІД ДІЄЮ РУХОМОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: gluchov.uriy@gmail.com*

Abstract. A statement is given and a solution of the two-dimensional problem on the action of the moving load on the free surface of a prestressed heterogeneous half-space in the form of a thin surface layer.

Key words: layered half-space, initial (residual) stresses, moving load, complex potentials.

Вступ.

У випадку, коли плоскі динамічні задачі для пружних стисливих і нестисливих тіл з початковими напруженнями допускають зведення до стаціонарних задач в рухомій системі координат, яка рухається по прямій з постійною швидкістю, формули для напружень і переміщень можуть бути представлені через комплексні потенціали [4, 6]. Ці формули мають однакову структуру як для статичних, так і для динамічних задач. Введені співвідношення через комплексні потенціали при відсутності початкових напружень переходять у відомі комплексні представлення розв'язків динамічних задач лінійної пружності, запропоновані Галінім [1]. Без початкових напружень при статичному навантаженні комплексні потенціали у випадку рівних коренів визначального рівняння переходять в комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі [9] для ізотропного тіла і, при нерівних коренях, в комплексні потенціали Лехніцького [8] для ортотропного тіла. При врахуванні початкових напружень при статичному навантаженні комплексні потенціали переходять в комплексні потенціали статичних лінеаризованих плоских задач у вигляді, запропонованому О.М. Гузем в роботах [4 – 7].

В даній статті розглянуто задачу про дію рухомого поверхневого навантаження на пружний стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Розв'язок задачі отримано за допомогою метода комплексних потенціалів. Модель, яка запропонована в роботі, побудована з використанням лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями [4, 5].

З використанням комплексних потенціалів пружна пластина на попередньо напруженому півпросторі під дією рухомого навантаження розглядалася в роботі [7]. При відсутності шару точний розв'язок задачі про реакцію на рухоме навантаження півпростору з початковими напруженнями з використанням комплексних потенціалів було отримано в [4, 6].

Шаруваті середовища з початковими напруженнями досліджувалися також в роботах [7, 10 – 15] та інших.

§1. Постановка задачі.

Розглянемо попередньо напружений стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

Матеріал півпростору – ізотропний нелінійно-пружний в ненапруженому стані з довільною формою пружного потенціалу. У випадку ортотропного матеріалу будемо вважати, що пружно-еквівалентні напрямки співпадають з напрямками осей, вибраних систем координат.

Початковий напружено-деформований стан півпростору вважається однорідним і визначається компонентами вектора переміщень відповідно до формули

$$u_j^0 = \delta_{mj} (\lambda_m - 1) x_m \quad (m, j = \overline{1, 3}), \quad (1.1)$$

де λ_j – подовження ($\lambda_j = \text{const}; j = \overline{1, 3}$); δ_{mj} – символ Кронекера, і наступними компонентами тензора узагальнених напружень

$$\sigma_{11}^0 \neq 0; \sigma_{22}^0 \neq 0; \sigma_{33}^0 \neq 0. \quad (1.2)$$

Шар і півпростір віднесені до декартової системи координат (ξ_1, ξ_2, ξ_3) , які вводяться в початковому деформованому стані і пов'язані з лагранжевими координатами (x_1, x_2, x_3) , що вводяться в природному стані, співвідношеннями

$$\xi_j = \lambda_j x_j. \quad (1.3)$$

Граничні поверхні елементів є плоскі і паралельні між собою. Координатна площа $\xi_1 O \xi_3$ співпадає з вільною поверхнею захисного шару. Шар займає область $-h \leq \xi_2 \leq 0$, а півпростір – область $\xi_2 + h \leq 0$.

До вільної границі шару ($\xi_2 = 0$) прикладено лінійне навантаження $P(\xi_1)$, що рухається з постійною швидкістю v протягом великого проміжку часу і не залежить від координати ξ_3 .

Визначимо координати рухомої системи наступним чином

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (1.4)$$

Передбачається, що картина деформацій інваріантна відносно часу в системі координат, що рухається разом з навантаженням.

Також передбачається, що напруження, яке виникає за рахунок дії навантаження, значно менше за початкові напруження. Вказане припущення дозволяє застосовувати лінеаризовану теорію пружності для тіл з початковими напруженнями [5] для опису додаткового напруженого стану, викликаного дією навантаження.

Шар товщиною h моделюється зосередженими масами з густиною ρ_1 .

Рівняння руху півпростору в умовах плоскої деформації у випадку стисливого тіла при $\xi_2 + h \leq 0$ мають вигляд [5]

$$L_{11}u_1 + L_{12}u_2 = 0; \quad L_{21}u_1 + L_{22}u_2 = 0, \quad (1.5)$$

а у випадку з нестисливим тілом

$$N_{11}u_1 + N_{12}u_2 + N_{13}p = 0; \quad N_{21}u_1 + N_{22}u_2 + N_{23}p = 0; \quad N_{31}u_1 + N_{32}u_2 = 0. \quad (1.6)$$

У рухомій системі координат (1.3) диференціальні оператори в виразах (1.5) і (1.6) мають вигляд

$$L_{m\alpha} = \tilde{\omega}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \tilde{\rho} v^2 \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \quad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2), \quad (1.7)$$

а у випадку нестисливого тіла

$$N_{m\alpha} = \tilde{\kappa}_{im\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_\beta} - \tilde{\rho} v^2 \delta_{m\alpha} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \quad (i, m, \alpha, \beta = 1, 2);$$

$$N_{13} \equiv N_{31} = \tilde{q}_{11} \frac{\partial}{\partial y_1}; \quad N_{23} \equiv N_{32} = \tilde{q}_{22} \frac{\partial}{\partial y_2}. \quad (1.8)$$

Розглянемо два випадки контакту між шаром і півпростором при $y_2 = -h$:
жорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = P_1(y_1) + h\rho_1 \ddot{u}_1; \quad \tilde{Q}_{22} = P_2(y_1) + h\rho_1 \ddot{u}_2 \quad (1.9)$$

і нежорсткий контакт

$$\tilde{Q}_{21} = 0; \quad \tilde{Q}_{22} = P_2(y_1) + h\rho_1 \ddot{u}_2. \quad (1.10)$$

Тут $P_1(y_1)$, $P_2(y_1)$ – дотичні та нормальні напруження на вільній поверхні шаруватого півпростору, відповідно.

У вказаних вище умовах маємо плоску стаціонарну задачу, що полягає у розв’язанні рівнянь руху (1.5) або (1.6) з позначенням (1.7) або (1.8), відповідно, при граничних умовах (1.9) або (1.10) і умові загасання на нескінченності.

Запишемо постановку задачі в комплексних потенціалах у загальному вигляді для стисливого і нестисливого матеріалу.

Враховуючи позначення (1.7) або (1.8) і співвідношення (1.3), рівняння усталеного руху півпростору для стисливих і нестисливих матеріалів можна представити у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\mu}_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{1}{\bar{\mu}_2} \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \chi^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1.11)$$

де величини μ_1 і μ_2 – корені рівняння

$$\mu^4 + 2A\mu^2 + A_1 = 0. \quad (1.12)$$

Коефіцієнти A і A_1 у випадку стисливого тіла визначаються із співвідношень

$$2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = \tilde{\omega}_{2222}(\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) + \tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2) - (\tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{2121})^2;$$

$$2A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112} = (\tilde{\omega}_{1111} - \tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \rho, \quad (1.13)$$

а у випадку нестисливого тіла – із співвідношень

$$2A\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2\tilde{\kappa}_{2222} + \tilde{q}_{22}^2(\tilde{\kappa}_{1111} - \tilde{\rho}v^2) - 2\tilde{q}_{11}\tilde{q}_{22}(\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212});$$

$$2A_1\tilde{q}_{22}^2\tilde{\kappa}_{2112} = \tilde{q}_{11}^2(\tilde{\kappa}_{1221} - \tilde{\rho}v^2); \quad \tilde{q}_{ij} = \delta_{ij}\lambda_i q_i; \quad \tilde{\rho} = \rho, \quad (1.14)$$

ρ – густина матеріалу півпростору в природному стані. Складові тензорів $\tilde{\omega}$, $\tilde{\kappa}$ і величини q_i визначаються для конкретних постановок задач [9].

Введемо наступні комплексні змінні

$$z_j = y_1 + \mu_j(y_2 + h); \quad \bar{z}_j = y_1 + \bar{\mu}_j(y_2 + h), \quad j = 1, 2. \quad (1.15)$$

Враховуючи (1.15), рівняння руху для півпростору (1.11) в рухомій системі координат через функції $\chi^{(j)}$ можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^4 \chi^{(j)}}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \bar{z}_1 \partial \bar{z}_2} = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (1.16)$$

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (1.12).

Рівні корені. Нехай виконується умова

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu. \quad (1.17)$$

Загальний розв'язок рівняння (1.16) представимо у вигляді

$$\chi^{(j)} = \operatorname{Re} \left[F_1^{(j)}(z_1) + \bar{z}_1 F_2^{(j)}(z_1) \right]. \quad (1.18)$$

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j^{(1)'}(z_1) = \mu_1 \varphi_j(z_1); \quad F_j^{(2)'}(z_1) = \varphi_j(z_1) \quad (j = 1, 2). \quad (1.19)$$

Підставимо (1.18) у вирази для переміщень і співвідношення пружності з врахуванням (1.3), (1.19) та отримаємо представлення напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\varphi_j(z_1)$ ($j = 1, 2$)

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{kj} &= \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{kj}^{(1)} [\varphi_1''(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2''(z_1)] + \gamma_{kj}^{(2)} \varphi_2'(z_1) \right\}; \\ u_k &= \operatorname{Re} \left\{ \gamma_k^{(1)} [\varphi_1'(z_1) + \bar{z}_1 \varphi_2'(z_1)] + \gamma_k^{(2)} \varphi_2(z_1) \right\}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

де

$$\begin{aligned} \gamma_{ii}^{(1)} &= \alpha_{ii}^{(12)} + \mu_1^2 (\alpha_{ii}^{(11)} + \alpha_{ii}^{(22)} + \mu_1^2 \alpha_{ii}^{(21)}); \quad \gamma_{ii}^{(2)} = 3\alpha_{ii}^{(12)} + \mu_1^2 (\alpha_{ii}^{(11)} - \alpha_{ii}^{(22)} - 3\mu_1^2 \alpha_{ii}^{(21)}); \\ \gamma_{ij}^{(1)} &= \mu_1 [\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} + \mu_1^2 (\alpha_{ij}^{(21)} + \alpha_{ij}^{(22)})]; \\ \gamma_{ij}^{(2)} &= \mu_1 [3\alpha_{ij}^{(11)} + \alpha_{ij}^{(12)} - \mu_1^2 (\alpha_{ij}^{(21)} + 3\alpha_{ij}^{(22)})]; \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\gamma_1^{(1)} = \beta_{11}^{(2)} + \mu_1^2 (\beta_{12}^{(2)} - \beta_{11}^{(1)}); \quad \gamma_1^{(2)} = 2(\beta_{11}^{(2)} - \mu_1^2 \beta_{12}^{(2)});$$

$$\gamma_2^{(1)} = \mu_1 (\beta_{21}^{(1)} - \beta_{21}^{(2)} + \mu_1^2 \beta_{22}^{(1)}); \quad \gamma_2^{(2)} = 2\mu_1 (\beta_{21}^{(1)} - \mu_1^2 \beta_{22}^{(1)}), \quad i, j = 1, 2, i \neq j.$$

Параметри $\alpha_{ij}^{(kn)}$ і $\beta_{ij}^{(k)}$ в співвідношеннях (1.21) у випадку стисливих тіл визначаються за формулами

$$\begin{aligned} \beta_{j1}^{(i)} &= \tilde{\omega}_{1i1} - \tilde{\rho} v^2; \quad \beta_{j2}^{(i)} = \tilde{\omega}_{2i2}; \quad \beta_{11}^{(1)} = \beta_{21}^{(2)} = \tilde{\omega}_{1122} + \tilde{\omega}_{1212}; \\ \alpha_{ii}^{(kn)} &= \tilde{\omega}_{iikk} \beta_{kk}^{(n)}; \quad \alpha_{ij}^{(kn)} = \tilde{\omega}_{ijkn} \beta_{kk}^{(n)} - \tilde{\omega}_{ijnk} \beta_{nk}^{(n)}; \quad \alpha_{ii}^{(kk)} = \tilde{\omega}_{ijnk} \beta_{nk}^{(k)}; \\ \alpha_{ii}^{(kk)} &= \tilde{\omega}_{iinn} \beta_{nk}^{(k)} - \tilde{\omega}_{iikk} \beta_{k1}^{(k)}; \quad i, j, k, n = 1, 2; \quad k \neq n, \end{aligned} \quad (1.22)$$

а у випадку нестисливих тіл – за формулами

$$\begin{aligned} \alpha_{ii}^{(kn)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{nn}^{-2} (\tilde{\kappa}_{knk} - \delta_{n2} \tilde{\rho} v^2); \\ \alpha_{ii}^{(kk)} &= \tilde{\kappa}_{iinn} \tilde{q}_{nn}^{-1} - \tilde{\kappa}_{iikk} \tilde{q}_{kk}^{-1} + \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{kk}^{-2} [\tilde{\kappa}_{kkkk} - \tilde{\rho} v^2 - \tilde{q}_{kk} \tilde{q}_{nn}^{-1} (\tilde{\kappa}_{1122} + \tilde{\kappa}_{1212})]; \end{aligned}$$

$$\alpha_{ij}^{(kn)} = -\tilde{\kappa}_{ijnk} \tilde{q}_{nm}^{-1}; \quad \alpha_{ij}^{(kk)} = \tilde{\kappa}_{ijnk} \tilde{q}_{nm}^{-1} \quad (i, j, n, k = 1, 2; i \neq j; n \neq k);$$

$$\beta_{12}^{(2)} = \beta_{11}^{(1)} = \tilde{q}_{11}^{-1}; \quad \beta_{21}^{(2)} = \beta_{21}^{(1)} = \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_{11}^{(2)} = \beta_{22}^{(1)} = 0. \quad (1.23)$$

Використовуючи (1.20) з урахуванням (1.15), граничні умови при $y_2 = -h$ для жорсткого контакту (1.9) можна записати у вигляді

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \Phi_1'(y_1) + (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_1(y_1);$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_2(y_1), \quad (1.24)$$

а для нежорсткого контакту (1.10) – у вигляді

$$\operatorname{Re} \left[\gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) \right] = 0;$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \Phi_2'(y_1) \right] \right\} = P_2(y_1). \quad (1.25)$$

В системах рівнянь (1.24) і (1.25) введено нові аналітичні функції

$$\Phi_1(y_1) = \varphi_1''(y_1) + y_1 \varphi_2''(y_1); \quad \Phi_2(y_1) = \varphi_2'(y_1). \quad (1.26)$$

Коефіцієнти $\gamma_i^{(j)}$ і $\gamma_{ik}^{(j)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) в системах рівнянь (1.24) і (1.25) для стисливого півпростору визначаються із співвідношень (1.21) при позначеннях (1.13) і (1.22). Для нестисливого півпростору необхідно скористатися позначеннями (1.14) і (1.23).

Таким чином, задача про стаціонарний рух попередньо напруженого півпростору, захищеного пружним шаром, у випадку рівних коренів рівняння (1.12) зводиться до знаходження функцій φ_j ($j = 1, 2$) із систем рівнянь (1.24), (1.26) або (1.25), (1.26) в залежності від умов контакту між елементами шаруватого середовища.

Нерівні корені. Розглянемо випадок нерівних коренів

$$\mu_1 \neq \mu_2. \quad (1.27)$$

Розв'язок рівнянь (1.16) представимо у вигляді

$$\chi = 2 \operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)], \quad (1.28)$$

де $F_j(z_j)$ – довільні аналітичні функції комплексних змінних z_j .

В подальшому введемо нові аналітичні функції

$$F_j''(z_j) = \Phi_j(z_j). \quad (1.29)$$

Підставляючи (1.28) у вирази для переміщень і потім у співвідношення пружності, з урахуванням (1.3) і (1.29) отримуємо формули для напружень і переміщень через введені аналітичні функції $\Phi_j(z_j)$ комплексних змінних z_j (1.15)

$$\tilde{Q}_{ij} = 2 \operatorname{Re} [\gamma_{ij}^{(1)} \Phi_1'(z_1) + \gamma_{ij}^{(2)} \Phi_2'(z_2)];$$

$$u_k = 2 \operatorname{Re} [\gamma_k^{(1)} \Phi_1(z_1) + \gamma_k^{(2)} \Phi_2(z_2)] \quad (i, j, k = 1, 2). \quad (1.30)$$

В (1.30) введено наступні позначення для коефіцієнтів, які входять в вирази для напружень і переміщень:

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^{(k)} &= \mu_k(\alpha_{jj}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{jj}^{(2)}); \quad \gamma_{ij}^{(k)} = \alpha_{ij}^{(1)} + \mu_k^2 \alpha_{ij}^{(2)}; \\ \gamma_1^{(j)} &= -\mu_j; \quad \gamma_2^{(j)} = \beta_1 + \mu_j^2 \beta_2 \quad (i, j, k = 1, 2; i \neq j),\end{aligned}\tag{1.31}$$

де параметри β_j і $\alpha_{ij}^{(k)}$ у випадку стисливих тіл визначаються за формулами

$$\begin{aligned}\beta_1 &= (\tilde{\omega}_{111} - \tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{122} + \tilde{\omega}_{212})^{-1}; \quad \beta_2 = \tilde{\omega}_{212}(\tilde{\omega}_{122} + \tilde{\omega}_{212})^{-1}; \\ \alpha_{ii}^{(1)} &= \beta_1 \tilde{\omega}_{ii22} - \tilde{\omega}_{ii11}; \quad \alpha_{ii}^{(2)} = \beta_2 \tilde{\omega}_{ii22}; \quad \alpha_{ij}^{(1)} = \beta_1 \tilde{\omega}_{ij21}; \\ \alpha_{ii}^{(2)} &= \beta_2 \tilde{\omega}_{ij21} - \tilde{\omega}_{ij12} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j),\end{aligned}\tag{1.32}$$

а у випадку нестисливих тіл за формулами

$$\begin{aligned}\alpha_{ii}^{(1)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{11}^{-1} [\tilde{\kappa}_{111} - \tilde{\rho}v^2 - \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} (\tilde{\kappa}_{122} + \tilde{\kappa}_{212})] - \tilde{\kappa}_{ii11} + \tilde{\kappa}_{ii22} \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \\ \alpha_{ii}^{(2)} &= \tilde{q}_{ii} \tilde{q}_{11}^{-1} \tilde{\kappa}_{212}; \quad \alpha_{ij}^{(2)} = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1} \tilde{\kappa}_{ij21}; \\ \alpha_{ij}^{(2)} &= -\tilde{\kappa}_{ij12}, \quad i \neq j; \quad \beta_1 = \tilde{q}_{11} \tilde{q}_{22}^{-1}; \quad \beta_2 \equiv 0.\end{aligned}\tag{1.33}$$

Використовуючи комплексні потенціали, запишемо граничні умови для даної задачі при $y_2 = -h$. Будемо розглядати, як і раніше, жорсткий та нежорсткий контакти між захисним шаром і півпростором. Із (1.9), (1.10) і (1.30) при $y_2 = -h$ маємо:

жорсткий контакт

$$\begin{aligned}2 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) + \rho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \gamma_1^{(2)} \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_1(y_1); \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_2(y_1);\end{aligned}\tag{1.34}$$

нежорсткий контакт

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \left[\gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(y_1) \right] &= 0; \\ 2 \operatorname{Re} \left\{ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(y_1) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(y_1) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(y_1) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(y_1) \right] \right\} &= P_2(y_1).\end{aligned}\tag{1.35}$$

В системах рівнянь (1.34) і (1.35) параметри $\gamma_i^{(j)}$, $\gamma_{ik}^{(j)}$ ($i, j, k = 1, 2$) для стислого півпростору визначаються із співвідношень (1.31) з врахуванням (1.13) і (1.32), а для нестислого півпростору – із співвідношень (1.31) при позначеннях (1.14) і (1.33).

Таким чином, розв'язок поставленої задачі в випадку нерівних коренів рівняння (1.12) можна отримати, розв'язуючи відносно функцій Φ_j ($j = 1, 2$) системи рівнянь (1.34) і (1.35) при жорсткому і нежорсткому контакті між захисним шаром і півпростором, відповідно.

§2. Метод розв'язку задачі.

Отримаємо розв'язок задачі про усталений рух попередньо напруженого півпростору із захисним покриттям під дією рухомого навантаження в загальному вигляді для стислого і нестислого матеріалів.

Для цього застосуємо метод Мухелішвілі [9], що базується на інтегралах типу Коші для півплощини. Відповідно до [9], для довільної голоморфної в нижній півплощині $y_2 + h < 0$ функції $f(z)$, яка неперервна до границі включно, справедливі наступні співвідношення:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y_1) dy_1}{y_1 - z} = -f(z) + \frac{1}{2}a; \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{f}(y_1) dy_1}{y_1 - z} = -\frac{1}{2}\bar{a}, \quad (2.1)$$

де

$$z = y_1 + i(y_2 + h). \quad (2.2)$$

В (2.1) вважалось, що функцію $f(y_1)$ при великих $|y_1|$ можна представити у вигляді

$$f(y_1) = a + o(|y_1|^{-\varepsilon}) = f(\infty) + o(|y_1|^{-\varepsilon}), \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (2.3)$$

Враховуючи викладене, перейдемо до дослідження задачі в площині $y_1 O y_2$.

Відносно поведінки комплексних потенціалів $\Phi_j(z_j)$, $\varphi_j(z_j)$ на нескінченності прийнемо такі ж обмеження, як і в лінійній теорії пружності [8, 9].

Розглянемо окремо випадки рівних і нерівних коренів рівняння (1.12) в загальній формі для стисливих і нестисливих тіл.

Рівні корені. Розглянемо випадок рівних коренів (1.17). В цьому випадку задача зводиться до визначення аналітичних функцій φ_j із рівнянь (1.24), (1.26) або (1.25), (1.26) (в залежності від умов контакту).

Використовуючи рівняння (1.24) та формули (2.1) і (2.3), у випадку жорсткого контакту між захисним шаром і півпростором маємо

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \Phi_1'(z) + (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1 dy_1}{y_1 - z}; \\ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(z) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2 dy_1}{y_1 - z}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

а при нежорсткому контакті рівняння (1.25) із врахуванням (2.1) і (2.3) будуть мати вигляд

$$\begin{aligned} \gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(z) &= 0; \\ \gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(z) + (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \Phi_2'(z) \right] &= -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2 dy_1}{y_1 - z}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Системи рівнянь (2.4) і (2.5) неважко привести до вигляду

$$L[\Phi_j(z)] = f_j(z) \quad (j = 1, 2), \quad (2.6)$$

де диференціальний оператор L і функції f_j ($j = 1, 2$) визначаються у випадку жорсткого контакту за формулами

$$\begin{aligned} L &= \rho_1^2 h^2 v^4 \left(\gamma_1^{(2)} \gamma_2^{(1)} - \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\ &+ \rho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} + \gamma_{21}^{(1)} (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) - \right. \\ &\left. - (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) \gamma_{22}^{(1)} \right] \frac{d}{dz} + (\gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} - \gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)}); \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$f_1(z) = \frac{1}{i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{22}^{(2)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(2)} P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1 + \right. \\ \left. + \rho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[(\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) P(y_1)_1 - (\gamma_1^{(1)} + \gamma_1^{(2)}) P_2(y_1) \right]}{(y_1 - z)^2} dy_1 \right\}; \quad (2.8)$$

$$f_2(z) = -\frac{1}{i\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{22}^{(1)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(1)} P_2(y_1)}{y_1 - z} dy_1 + \rho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_2^{(1)} P_1(y_1) - \gamma_1^{(1)} P_2(y_1)}{(y_1 - z)^2} dy_1 \right],$$

а у випадку нежорсткого контакту за формулами

$$L = \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{21}^{(1)} (\gamma_2^{(1)} + \gamma_2^{(2)}) \right] \frac{d}{dz} + (\gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{21}^{(2)} \gamma_{22}^{(1)}); \quad (2.9)$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j+1}}{i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{21}^{(m)} P_2 dy_1}{y_1 - z} \quad (j, m = 1, 2; j \neq m). \quad (2.10)$$

Так як при $y_2 = -h$ $y_1 = z = z_1$, то вирази (2.6) – (2.10) також можна розглядати в площині комплексної змінної z_1 .

Таким чином, для жорсткого і нежорсткого контактів задача при рівних коренях рівняння (1.12) звелася до розв'язку звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами виду (2.6) відносно функцій $\Phi_j(z_1)$ ($j=1,2$) або, відповідно до прийнятих позначень (1.26), відносно функцій $\varphi_1''(z_1) + z_1 \varphi_2''(z_1)$ і $\varphi_2'(z_1)$. Отримавши функції $\varphi_1''(z_1) + z_1 \varphi_2''(z_1)$ і $\varphi_2'(z_1)$, легко визначити функції $\varphi_j''(z_1)$ ($j=1,2$), а потім напруження і швидкості переміщень у півпросторі (переміщення в даному випадку визначаються з точністю до довільної константи), використовуючи формули (1.20).

Більш детально аналіз отриманих результатів проведемо для випадку нерівних коренів.

Нерівні корені. Нехай виконується умова (1.27). До систем рівнянь (1.34) і (1.35) застосуємо формули (2.1) і (2.3). В результаті при жорсткому контакті між захисним шаром і півпростором отримаємо наступну систему двох звичайних диференціальних рівнянь відносно функцій $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$)

$$\gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(z) + \rho_1 h v^2 \left[\gamma_1^{(1)} \Phi_1'(z) + \gamma_1^{(2)} \Phi_2'(z) \right] = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_1(y_1) dy_1}{y_1 - z}; \quad (2.11)$$

$$\gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(z) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(z) \right] = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2(y_1) dy_1}{y_1 - z}.$$

При нежорсткому контакті аналогічна система диференціальних рівнянь відносно аналітичних функцій $\Phi_j(z)$ ($j=1,2$) має вигляд

$$\gamma_{21}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{21}^{(2)} \Phi_2(z) = 0;$$

$$\gamma_{22}^{(1)} \Phi_1(z) + \gamma_{22}^{(2)} \Phi_2(z) - \rho_1 h v^2 \left[\gamma_2^{(1)} \Phi_1'(z) + \gamma_2^{(2)} \Phi_2'(z) \right] = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_2(y_1) dy_1}{y_1 - z}. \quad (2.12)$$

В результаті нескладних перетворень системи диференціальних рівнянь (2.11) і (2.12) можна записати у вигляді (2.6), де при жорсткому контакті

$$L = \rho_1^2 h^2 v^4 \left(\gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_1^{(2)} \right) \frac{d^2}{dz^2} + \\ + \rho_1 h v^2 \left[\left(\gamma_1^{(2)} \gamma_{22}^{(1)} + \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) - \left(\gamma_1^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} + \gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right) \right] \frac{d}{dz} + \left(\gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_{22}^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right); \quad (2.13)$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j-1}}{2i\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\gamma_{22}^{(m)} P_1(y_1) - \gamma_{21}^{(m)} P_2(y_1) \right] dy_1}{y_1 - z} + \right. \\ \left. + \rho_1 h v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left[\gamma_2^{(m)} P_1(y_1) + \gamma_1^{(m)} P_2(y_1) \right] dy_1}{(y_1 - z)^2} \right\} \quad (j, m = 1, 2; j \neq m), \quad (2.14)$$

а при нежорсткому контакті

$$L = \rho_1 h v^2 \left(\gamma_2^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} - \gamma_2^{(2)} \gamma_{21}^{(1)} \right) \frac{d}{dz} + \left(\gamma_{21}^{(1)} \gamma_{22}^{(2)} - \gamma_{22}^{(1)} \gamma_{21}^{(2)} \right); \quad (2.15)$$

$$f_j(z) = \frac{(-1)^{j+1}}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{21}^{(m)} P_2 dy_1}{y_1 - z} \quad (j, m = 1, 2; j \neq m). \quad (2.16)$$

Так як при $y_2 = -h$ $y_1 = z = z_1 = z_2$, то вирази (2.11) – (2.16) можна розглядати також в площинах змінних z_1 і z_2 .

Таким чином, задача у випадку нерівних коренів зводиться до розв'язку двох звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь виду (2.6) відносно функцій $\Phi_j(z_j)$ ($j=1,2$) в позначеннях (2.13), (2.14) або (2.15), (2.16) (в залежності від умов контакту між захисним шаром і основою). Компоненти напружено-деформованого стану півпростору визначаються за допомогою співвідношень (1.30) та виразів для функцій $\Phi'_j(z_j)$ ($j=1,2$).

Критичні швидкості руху навантаження повинні визначатися з умов існування дійсних додатних кратних коренів характеристичного рівняння диференціальних рівнянь (2.6).

Порівняльний аналіз формул, отриманих в [2, 3], дозволяє стверджувати, що рівняння $\Delta(k) = 0$ має ті ж корені, що і характеристичне рівняння диференціальних рівнянь (2.6).

Отже, застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати, аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є в роботах [2, 3].

Висновки.

В даній роботі розглянуто плоску динамічну задачу про вплив рухомого навантаження на попередньо напружений стисливий півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Для розв'язання задачі застосовано метод Мухелішвілі, що базується на інтегралах типу Коші для півплощини. При цьому задача зводиться до розв'язання двох звичайних неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами відносно невідомих аналітичних функцій. Порядок рівнянь залежить від умов контакту між захисним покриттям і основою.

Аналітичні результати приведено в загальному вигляді для стисливого та нестисливого матеріалів з довільним пружним потенціалом, для випадків нерівних і рівних коренів характеристичних рівнянь, для різних умов сполучення елементів шаруватого середовища і для будь-якої швидкості руху навантаження.

Застосовуючи метод комплексних потенціалів, отримуємо результати аналогічні тим, які були отримані методом інтегральних перетворень Фур'є.

РЕЗЮМЕ. З використанням комплексних потенціалів в загальній формі для стисливих і нестисливих пружних тіл дано постановку і приведено розв'язок двовимірної задачі про дію рухомого навантаження на вільну поверхню попередньо напруженого півпростору з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: шаруватий півпростір, початкові (залишкові) напруження, рухоме навантаження, комплексні потенціали.

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.: Наука, 1980. - 303 с.
2. Глухов Ю.П. Защищенный пружим шаром стисливый попередньо напружений півпростір при дії рухомого навантаження // Прикл. механіка. – 2024. – **60**, № 3. – С. 45 – 58.
3. Глухов Ю.П., Бабич С.Ю., Корнієнко В.Ф. Рухоме навантаження нестисливої півплощини з початковими напруженнями // Прикл. механіка. – 2024. – **60**, № 2. – С. 3 – 18.
4. Гузь А.Н. Механика хрупкого разрушения материалов с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1983. – 296 с.
5. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 1. Общие вопросы. Волны в бесконечных телах и поверхностные волны. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с.
6. Гузь А. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. Ч. 2. Волны в частичноограниченных телах. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 505 с.
7. Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
8. Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.
9. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
10. Akbarov S.D., Bagirov E.T. Dispersion of the axisymmetric waves propagating in the hydro-elastic system consisting of the pre-strained highly elastic plate, compressible inviscid fluid, and rigid wall // Archive of Applied Mechanics. – 2023. – **93**, N 2. – P. 861 – 879.
11. Akbarov S.D., Bagirov E.T. Dispersion of axisymmetric longitudinal waves propagating in an inhomogeneous prestressed hollow cylinder immersed in an inviscid compressible fluid // J. of Sound and Vibration. – 2024. – **569**. – 118097.
12. Akbarov S.D., Negin M. Attenuation of quasi-Lamb waves in a hydroelastic system «elastic plate plus compressible viscous fluid plus rigid wall» // Structural Engineering and Mechanics. – 2022. – **81**, N 4. – P. 443 – 459
13. Bagno O.M. Effect of a Viscous Compressible Liquid Layer on the Surface Instability of an Incompressible Elastic Half-Space with Finite Prestrains // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 6. – P. 645 – 652.
14. Bagno O.M. Effect of Fluid Viscosity on Generalized Lamb Waves in a System Consisting of an Elastic Layer and a Viscous Fluid Layer // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, N 2. – P. 166 – 174.
15. Guz O.M., Bagno O.M. Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 1 – 10.

Надійшла 28.06.2023

Затверджена до друку 16.04.2024