Я.Я.Рущицький, В.М.Юрчук

ПРО ОДНУ ОСОБЛИВІСТЬ ЕВОЛЮЦІЇ НЕЛІНІЙНОЇ ПРУЖНОЇ ХВИЛІ З РІЗНИМИ ПОЧАТКОВИМИ ПРОФІЛЯМИ

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: vasil_2008@ukr.net

Abstract. A previously unexplored fragment of the evolution scenarios of six types of nonlinear elastic waves in materials is analyzed. It is shown that four of the analyzed waves have a feature in the graphs of the evolution of the initial profile, which consists in the formation of a new hump in the actual profile. In profiles with an existing hump, this hump splits symmetrically, and in profiles with a barely noticeable hump, such a hump appears approximately at the distance of the bottom middle. Initial profiles in the form of a monotonically decreasing function without a hump do not generate humps in the actual profile.

Key words: nonlinearly elastic wave, Murnaghan model, initial wave profile, hump in the actual profile, quadratic or cubic nonlinearity, first two approximations.

Вступ.

Нелінійні хвилі в пружних матеріалах досліджуються впродовж багатьох десятків років і їх аналіз продовжується і в наш час. Нові наукові результати регулярно з'являються в ряді провідних наукових журналів світу. Зокрема, за останнє десятиліття були опубліковані статті з результатами нових досліджень [1 – 10, 15, 16].

В даній роботі проаналізовано недосліджений раніше фрагмент сценаріїв еволюції шести типів нелінійних пружних хвиль в матеріалах. Показано, що всі проаналізовані хвилі мають спільну особливість графіків еволюції початкового профіля, яка полягає в утворенні в актуальному профілі нового горба. В профілях з існуючим горбом цей горб симетрично роздвоюється і в профілях без горба такий горб з'являється приблизно на відстані середини підошви.

1. Формулювання задачі про одну особливість еволюції нелінійної пружної хвилі.

Задача про особливість еволюції у цій роботі стосується п'ятьох типів хвиль з різними початковими профілями: гармонічної хвилі з профілем у вигляді косинусоїдальної функції і чотирьох поодиноких хвиль з профілями у вигляді функцій Гаусса, Уіттекера, Макдональда, Фрідляндера. В рамках типу гармонічної хвилі аналізуються дві хвилі – плоска поздовжна та радіальна крутильна. В рамках типу поодинокої хвилі аналізуються плоска поздовжна хвиля у вигляді двох хвиль – Гаусса та Уіттекера – і циліндрична радіальна з профілями у вигляді функцій Макдональда і Фрідляндера. Характерною ознакою досліджених гармонічних хвиль є періодичність з двома горбами на одному періоді. Вибрані поодинокі хвилі мають відмінності між собою. Хвиля Гаусса має симетричний початковий профіль з одним горбом, тоді як хвиля Уіттекера має несиметричний початковий профіль з одним горбом. Хвилі Макдональда і Фрідляндера взагалі не мають горбів, але суттєво відрізняються записом початкового профіля.

Нелінійність всіх вибраних хвиль визначається однаково застосуванням нелінійно пружної п'ятиконстантної моделі Мернагана [11]. В рамках цієї нелінійності хвильові

рівняння є або квадратично, або кубічно нелінійними. В проведеному аналізі для різних хвиль використовуються різні хвильові рівняння.

Хвильове рівняння для плоскої поздовжної хвилі за умови початкового збудження лише цієї хвилі і поширення хвилі вздовж осі абсцис Ox_1 є таким [11]:

$$\rho u_{1,tt} - (\lambda + 2\mu)\, u_{1,11} = N_1\, u_{1,11} u_{1,1}\,, \tag{1}$$

де $N_1 = 3\left[(\lambda + 2\mu) + 2(A + 3B + C)\right]$, λ, μ є пружними постійними Ляме; A, B, C – пружними постійними Мернаґана.

Хвильове рівняння для циліндричної радіальної хвилі за умови поширення хвилі вздовж радіуса (циліндричні координати) є таким [11, 13]:

$$\begin{gathered} (v_L)^2 \left(1 - \tilde{N}_1 u_{r,r}\right)\left(u_{r,rr} + \frac{1}{r} u_{r,r} - \frac{u_r}{r^2}\right) - u_{r,tt} = 0\,; \\ v_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}\,, \quad \tilde{N}_1 = 3 + \left[2(A + 3B + C)/(\lambda + 2\mu)\right]. \end{gathered} \tag{2}$$

Хвильове рівняння для циліндричної крутильної хвилі за умови поширення хвилі вздовж координати z (циліндричні координати) є таким [12,14]:

$$\begin{gathered} \left\{(v_T)^2 \left[1 - (1/2) B/\mu\right]\left[\left(\tilde{u}_{\vartheta,r}\right)^2 + \frac{1}{r}\tilde{u}_{\vartheta,r}\tilde{u} + \frac{2}{r^2}\tilde{u}_\vartheta{}^2 + \left(\tilde{u}_{\vartheta,z}\right)^2\right]\right\} \times \\ \times\left(\tilde{u}_{\vartheta,rr} + (1/r)\tilde{u}_{\vartheta,r}\left(-(1/r^2) + \omega^2\right)\tilde{u}_\vartheta + \tilde{u}_{\vartheta,zz}\right) = 0, \quad v_T = \sqrt{\mu/\rho}. \end{gathered} \tag{3}$$

2. Виявлена особливість еволюції початкового профіля хвилі для кожної з шести хвиль.

Плоска поздовжна гармонічна хвиля (початковий профіль – косинусоїдальна функція). Отриманий методом послідовних наближень в рамках двох перших наближень розв'язок рівняння (1)

$$\begin{gathered} u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^{(1)}(x_1, t) + u_1^{(2)}(x_1, t) = \\ = u_{1o}\cos(k_L x_1 - \omega t) + x_1\left[\frac{N_1}{8(\lambda + 2\mu)}(u_{1o})^2 k_L^2\right]\cos 2(k_L x_1 - \omega t) \end{gathered} \tag{4}$$

(тут використані позначення: u_{1o} – початкова амплітуда хвилі; k_L – хвильове число поздовжної хвилі) є основним при побудові графіків еволюції початкового профіля хвилі. На рис. 1 зображено один з багатьох графіків, у якому показані початковий та актуальний профілі і виявляється особливість, яка є предметом уваги даної роботи. Особливість полягає в перетворенні верхнього горба у два горби чи у появі в актуальному профілі двох горбів замість одного в початковому профілі.

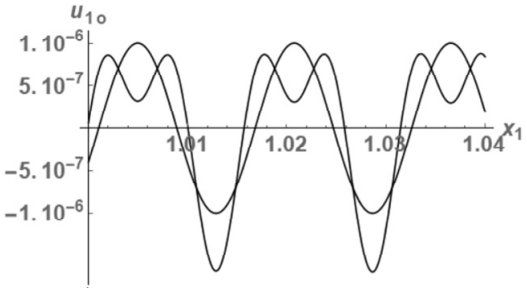


Рис. 1

Крутильна гармонічна хвиля (початковий профіль – косинусоїдальна функція). Отриманий методом послідовних наближень в рамках двох перших наближень розв'язок рівняння (3) описується функціями Бесселя першого роду і є таким:

$$u_\vartheta^{(1+2)}(r^o, z, t) = \tilde{u}^o J_1(K) e^{i(k_z z-\omega t)} + (\tilde{u}^o)^3 r^o \left(Bk_T^2/8\mu\right)\left[J_0(K)-J_2(K)\right]\times$$

$$\times\left\{\left(K^2/4\left(r^o\right)^2\right)\left[J_0(K)-J_2(K)\right]^2+\left(K/2\left(r^o\right)^2\right)\left(J_0(K)-J_2(K)\right)J_1(K)+\right. \qquad (5)$$

$$\left.+\left(2\left(r^o\right)^{-2}-\left(k_z\right)^2\right)\left[J_1(K)\right]^2\right\}e^{3i(k_z z-\omega t)}, \quad K = r^o\sqrt{k_T^2-k_z^2}\ .$$

Він є основним при побудові графіків еволюції початкового профіля крутильної хвилі. На рис. 2 зображено один з багатьох графіків, де показаний початковий профіль у вигляді першої гармоніки і актуальний профіль з двома горбами. Отже, в актуальному профілі з'являються два горби замість одного в початковому профілі.

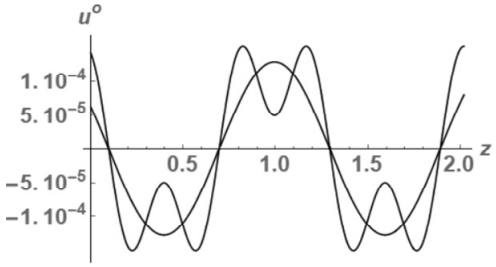


Рис. 2

Плоска поздовжня хвиля Гаусса (початковий профіль –функція Гаусса). Отриманий методом обмеження на градієнт зміщення в рамках двох перших наближень розв'язок рівняння (1) має вигляд [13]

$$u_1^{(1+2)}(x_1,t) = u_1^0 e^{-\left[a^2(x_1-\nu_L t)^2/2\right]} - (1/2)t\alpha\nu_L a^2\left(x_1-\nu_L t\right)^2\left(u_1^0\right)^2 e^{-a^2(x_1-\nu_L t)^2} \qquad (6)$$

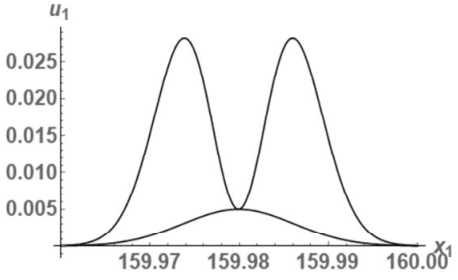


Рис. 3

(тут використані позначення: u_1^0 – початкова амплітуда хвилі; ν_L – фазова швидкість поздовжньої хвилі; a – масштабний множник функції Гаусса) є основним при побудові графіків еволюції початкового профіля хвилі. Далі на рис. 3 показаний один з багатьох графіків, у якому нижня крива відповідає початковому профілю і верхня – актуальному.

Виявлена особливість поля полягає у появі в актуальному профілі двох горбів замість одного в початковому профілі.

Плоска поздовжня хвиля Уіттекера (початковий профіль –функція Уіттекера). Отриманий методом обмеження на градієнт зміщення в рамках двох перших наближень розв'язок рівняння (1) виражається через функцію Уіттекера $W_{n,m}(z)$ і має вигляд [13]:

$$u_1^{(1+2)}(x_1, t) = u_1^0 W_{5/4;5/4}(\sigma) -$$

$$-(1/2)t\alpha(a)^2\nu_L\left(u_1^0\right)^2\left(\left(\frac{5}{4z}-\frac{1}{2}\right)W_{5/4,5/4}(\sigma)-\frac{1}{z}W_{1/4,5/4}(\sigma)\right)^2, \qquad (7)$$

де u_1^0 – початкова амплітуда хвилі і $\sigma = a(x_1-\nu_L t)$ – фаза хвилі.

Цей розв'язок є основним при побудові графіків еволюції початкового профіля хвилі. Далі, на рис. 4 показаний графік, у якому верхня крива відповідає актуальному профілю (1-ше + 2-ге наближення), а нижня – початковому профілю. Тут особливість полягає в перетворенні спадної кривої з майже не спостережуваним горбом початкового профіля у більш помітний горб в актуальному профілі.

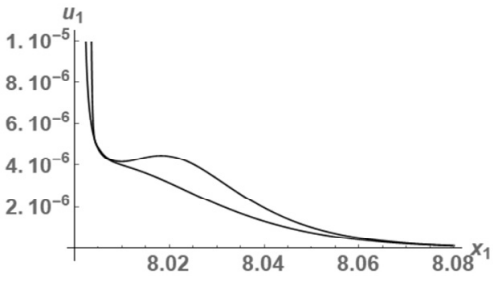


Рис. 4

Циліндрична радіальна хвиля за умови поширення хвилі вздовж радіуса (початковий профіль – функція Макдональда). Отриманий методом обмеження на градієнт зміщення в рамках двох перших наближень розв'язок рівняння (2) виражається через функцію Макдональда нульового індексу $u_0 K_0(\sigma)$ (u_0 – початкова амплітуда хвилі, $\sigma = a(r - c_L t)$ – фаза хвилі) і має вигляд

$$u_r^{(1+2)}(r,t) \approx u_0 K_0(\sigma) - (1/2)(u_0)^2 a^2 c_L \tilde{N}_1 t \left[K_1(\sigma)\right]^2 . \qquad (8)$$

Цей розв'язок є основним при побудові графіків еволюції початкового профіля хвилі. На рис. 5 показаний графік, у якому верхня крива відповідає актуальному профілю (1-ше + 2-ге наближення), а нижня – початковому профілю. Тут виявлена на попередніх рис. 1 – 4 (для різних хвиль) особливість появи другого горба не спостерігається.

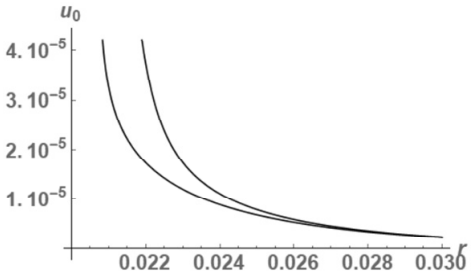


Рис. 5

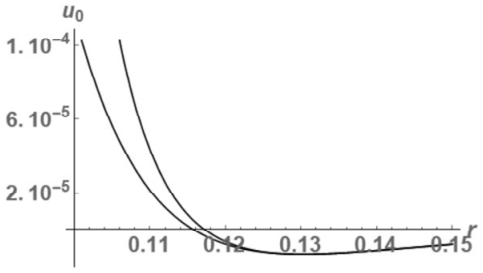


Рис. 6

Циліндрична радіальна хвиля за умови поширення хвилі вздовж радіуса (початковий профіль – функція Фрідляндера). Отриманий методом обмеження на градієнт зміщення в рамках двох перших наближень розв'язок рівняння (2) виражається через функцію Фрідляндера $F(\sigma) = u_0 e^{-\sigma/x_{att}} (1 - \sigma/x_{att})$, де u_0 – початкова амплітуда хвилі, $\sigma = a(r - c_L t)$ – фаза хвилі, а постійна x_{att} характеризує затухання профіля (крутизну) і має вигляд

$$u_r^{(1+2)}(r,t) \approx u_0 e^{-\sigma/x_{att}} (1 - \sigma/x_{att}) - (1/2) c_L \tilde{N}_1 t a^2 \frac{(u_0)^2}{x_{att}^2} (2 - \sigma/x_{att})^2 \left[e^{-2\sigma/x_{att}} \right]. \qquad (9)$$

Цей розв'язок є основним при побудові графіків еволюції початкового профіля хвилі Фрідляндера. На рис. 6 показаний графік, у якому права крива відповідає актуальному профілю (1-ше + 2-ге наближення), а ліва – початковому профілю. Тут виявлена на попередніх рис. 1 – 4 (для різних хвиль) особливість появи другого горба не спостерігається.

Загальний висновок.

Показано, що чотири з проаналізованих хвиль мають особливість графіків еволюції початкового профіля, яка полягає в утворенні в актуальному профілі нового горба. В профілях з існуючим горбом цей горб симетрично роздвоюється і в профілях з ледь помітним горбом такий горб з'являється приблизно на відстані середини підошви.

Початкові профілі у вигляді монотонно спадаючої функції без горба не породжують горби в актуальному профілі.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано у цій статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Проаналізовано недосліджений раніше фрагмент сценаріїв еволюції шести типів нелінійних пружних хвиль в матеріалах. Показано, що чотири з проаналізованих хвиль мають особливість графіків еволюції початкового профіля, яка полягає в утворенні в актуальному профілі нового горба. В профілях з існуючим горбом цей горб симетрично роздвоюється і в профілях з ледь помітним горбом такий горб з'являється приблизно на відстані середини підошви. Початкові профілі у вигляді монотонно спадаючої функції без горба не породжують горби в актуальному профілі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: нелінійно пружна хвиля, модель Мернагана, початковий профіль хвилі, горб на актуальному профілі, квадратична чи кубічна нелінійності, перші два наближення.

1. *Amendola A.* An analytic study on the properties of solitary waves traveling on tensegrity-like lattices // Int. J. Non-Linear Mech. – 2023. – **148**. – P. 104264.
2. *Banerjee A., Bera K.K.* Wave propagation in mass-in-mass Duffing type non-linear metamaterial implementing Jacobi's elliptic balance method // Int. J. Non-Linear Mech. – 2023. – **157**. – P. 104549.
3. *Cobus L.A., van Wijk K.* Non-contact acoustic method to measure depth-dependent elastic properties of a kiwifruit // Wave Motion. – 2023. – **119**. – P. 103126.
4. *Kuznetsov S.V.* Torsional waves in hyperelastic shells: Appearing shock waves and energy dissipation // Mechanics of Materials. – 2024. – **189**, N 2. – P. 104905.
5. *Liu X., Wang L., Zhang G.* One-way collinear wave mixing in solids with cubic nonlinearity based on Murnaghan's potential // Wave Motion. – 2023. – **120**. – P. 103160.
6. *Mawassy N., Reda H, Hammoud A., Yan D.-J., Ganghoffer J.-F.* Effect of damage on Rayleigh wave propagation in second gradient lattice materials // Wave Motion. – 2023. – **121**. – P. 103185.
7. *Mc Collom B.A., Cormack J.M., Hamilton M.F.* Nonlinear torsional wave propagation modeled with Lagrangian mechanics // Proc. Mtgs. Acoust. – 2022. – **48**. – P. 045006.
8. *Meziane A., Blanloeuil P., Nouira D., Baillet L., Massi F.* Numerical analysis of a one-dimensional nonlinear wave scattering at a contact interface with damageable adhesion and unilateral contact // Wave Motion. – 2023. – **122**. – P. 103182.
9. *Miao Z.-H., Wang Y.-Z.* In-plane non-symmetric propagation of nonlinear elastic waves through a corrugated interface // Int. J. Non-Linear Mech. – 2023. – **148**. – P. 104266.
10. *Naranjo-Pérez J., Riveiro M., Callejas A., Rus G., Melchor J.* Nonlinear torsional wave propagation in cylindrical coordinates to assess biomechanical parameters // J. Sound and Vibration. – 2019. – **445**. – P. 103 – 116.
11. *Rushchitsky J.J.* Nonlinear Elastic Waves in Materials. – Heidelberg: Springer, 2014. – 455 p.
12. *Rushchitsky J.J., Yurchuk V.N.* Comparison of the Evolution of a Solitary Elastic Cylindrical Wave with Friedlander and Macdonald Profiles // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 5. – P. 497 – 509.
13. *Rushchitsky J., Yurchuk V*. Comparison of Evolution of Five Types of Elastic Waves (harmonic, Gauss, Whittaker, MacDonald, Friedlander Initial Profiles). Chapter 25 in the book: Advanced Problems of Mechanics. – Berlin: Springer, 2023. – P. 455 – 468.
14. *Rushchitsky. J.J., Sinchilo S.V., Yurchuk V.M.* New Nonlinear Wave Equations for Analysis of Torsional Elastic Waves and Modeling // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, N 6. – C. 641 – 651.
15. *Torres J., Faris I.H., Callejas A., Reyes-Ortega F., Melchor J., Gonzalez-Andrades M., Rus G.* Torsional wave elastography to assess the mechanical properties of the cornea // Nature Scientific Reports. – 2022. – **12**, N 8354. – P. 1 – 11.
16. *Yoon S., Schiffer A., Gwun J.I., Lee S., Yeun C.Y., Kim T.-Y.* Solitary wave-based site-specific bone quality assessment: A numerical study of the proximal femur // Int. J. Non-Linear Mech. – 2023. – **155**. – P. 104458.

Надійшла 20.09.2023 Затверджена до друку 11.06.2024