**В.Л.Богданов, В.М.Назаренко, О.Л.Кіпніс**

# СТИСК НАПІВОБМЕЖЕНОГО ТІЛА З ТОНКИМ ШАРОМ ПОКРИТТЯ ВЗДОВЖ МІЖФАЗНОЇ ПРИПОВЕРХНЕВОЇ ТРІЩИНИ. ЧАСТИНА І

*Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,*
*вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: a.l.kipnis@gmail.com*

**Abstract.** Using the relations of the three-dimensional linearized theory of stability of deformable bodies, a plane static problem of compression of a semi-bounded body (base) with a coating layer along a near-surface crack located on the rectilinear interface is investigated. The piecewise homogeneous body model is applied, assuming that the coating material is less rigid than the material of the base. For the case when the roots of the corresponding characteristic equations are equal for both materials, the critical values of the load parameters are determined and their dependence on the mechanical characteristics of the materials and the geometrical parameters of the problem is analyzed.

**Key words:** material with coating, near-surface interface crack, compression along the crack, critical loads.

**Вступ.**

Дослідження руйнування конструкційних матеріалів (шаруватих та волокнистих композитів, матеріалів з покриттям), послаблених міжфазними тріщинами, є актуальною проблемою механіки деформівного твердого тіла, зумовленою зростанням використання таких матеріалів в промисловості. У відповідних задачах механіки руйнування такі матеріали можуть моделюватися, наприклад, кусково-однорідними або (в континуальному наближенні) ортотропними (чи трансверсально-ізотропними) тілами [5].

З широкого спектру означених задач найменш дослідженими є задачі для тіл, що перебувають в умовах стиску вздовж площин, в яких розташовані тріщини [5, 18, 22]. Подібні питання відносяться до некласичних проблем механіки руйнування, оскільки в рамках класичних критеріїв руйнування Гріффітса – Ірвіна [17, 34] та його узагальнень коефіцієнти інтенсивності напружень в околі вершин тріщин і величини, що характеризують розкриття тріщин, при прийнятій схемі навантаження дорівнюють нулю [7, 8, 20, 21].

Для дослідження таких проблем у роботах О.М. Гузя із залученням підходів тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл (ТЛТСДТ) [2, 18, 19] було запропоновано критерій руйнування [3, 4], відповідно до якого початок процесу руйнування *однорідного* матеріалу при його стиску вздовж тріщин пов'язується з втратою стійкості стану рівноваги матеріалу в локальній області поблизу тріщини (локальна втрата стійкості). При цьому теоретичній межі міцності та значенню граничного укорочення відповідає величина критичного стискаючого навантаження та критичного значення укорочення, що обчислюються за допомогою зазначеного критерію. В [5, 10, 11, 23] із застосуванням вказаного підходу наведено результати досліджень плоских і просторових задач механіки руйнування при стиску вздовж поодиноких тріщин та систем паралельних тріщин в однорідних матеріалах.

У випадку стиску вздовж міжфазних тріщин в *кусково-однорідному* матеріалі наявність межі поділу середовищ та границі тіла зобов'язує враховувати той факт, що

при деяких співвідношеннях між фізико-механічними характеристиками компонент композитного матеріалу вказаній *локальній* втраті стійкості поблизу тріщини може передувати *внутрішня* (зумовлена внутрішньою структурою композиту та стисканням вздовж напрямів його армування) або поверхнева (зумовлена наявністю граничної поверхні тіла і явищами, що виникають біля цієї поверхні) втрата стійкості [5]. Взаємодія описаних механізмів втрати стійкості матеріалу залишається мало дослідженою.

Плоскі (для випадку плоскої деформації) та просторові задачі про стиск однорідних ізотропних та трансверсально-ізотропних напівобмежених тіл з приповерхневими тріщинами розглянуто, наприклад, у роботах [9, 12, 14, 15, 36]. При цьому трансверсально-ізотропні матеріали також моделюють (в континуальному наближенні) композитні матеріали з усередненими (наведеними) механічними характеристиками [5, 16].

Перші результати з механіки руйнування шаруватих композитних матеріалів при стиску вздовж тріщин, розташованих у площинах поділу середовищ, із використанням ТЛТСДТ були отримані в публікаціях [29, 33]. Із застосуванням методу скінченних різниць отримано вираз для теоретичного значення граничного укорочення шаруватого композитного матеріалу з пружними компонентами (крихке руйнування) з однією тріщиною, розташованою у межі поділу середовищ.

У роботах [24 – 28] викладено результати дослідження плоскої задачі про стиск кусково-однорідного тіла, ослабленого довільним скінченним числом міжфазних мікротріщин, коли розміри тріщин є суттєво меншими від розмірів структурних елементів композиту і внаслідок цього можна розглядати задачу про стиск двох з'єднаних між собою різнорідних півплощин вздовж системи тріщин, розташованих на прямолінійній межі їх поділу. Результати отримано в єдиній загальній формі для теорії скінченних та малих докритичних деформацій у випадку пружних і пружно-пластичних стисливих і нестисливих ізотропних та ортотропних тіл (для пружно-пластичних матеріалів додатково використовується узагальнена концепція навантаження, що продовжується [18]). Метод, запропонований авторами, який полягає у зведенні плоскої задачі ТЛТСДТ на власні значення до однорідної задачі спряження двох голоморфних функцій, заданих у всій площині, дозволяє отримати точний аналітичний розв'язок відповідних задач.

Було розглянуто також просторові осесиметричні задачі про руйнування кусково-однорідних тіл з круговими міжфазними тріщинами, розташованими у двох паралельних площинах [30] та про руйнування шаруватих композитних матеріалів періодичної структури з періодичною системою кругових міжфазних тріщин [31, 32]. Дослідження в рамках ТЛТСДТ проводилися із застосуванням чисельних методів.

В роботах [37 – 40] було досліджено руйнування шаруватих композитів з двома паралельними макротріщинами в границях розділу шарів, коли тріщини зміщені в паралельних площинах одна відносно одної. В зазначених публікаціях також отримано результати для композиту з періодичною системою паралельних тріщин, які зміщені одна відносно одної.

В роботі [13] з використанням представлення загальних розв'язків плоских лінеаризованих задач через комплексні потенціали для півплощини, які є визначеними у всій площині [5, 18, 23], виконано постановку плоскої задачі про стиск напівобмеженого тіла вздовж тріщини, що знаходиться на прямолінійній межі поділу півплощини та смуги з різних матеріалів. При цьому у вказаній роботі не наводилось чисельних результатів дослідження конкретних матеріалів.

Вказане вище свідчить про те, що в літературі з механіки руйнування матеріалів при стиску вздовж тріщин досить докладно вивчені задачі для приповерхневих тріщин в *однорідних напівобмежених тілах*, а також розглянуто деякі задачі для міжфазних тріщин у *кусково-однорідних необмежених тілах*, що моделюють шаруваті композитні матеріали з мікротріщинами. У той же час, розв'язків задач про стиск *кусково-однорідних напівобмежених* тіл вздовж тріщин, розташованих на межі поділу півплощини та тонкої смуги покриття з різних матеріалів, які є актуальними при вивченні проблем руйнування тіл з покриттям (антикорозійним, вогнетривким, зносостійким, теплоізоляційним тощо), досі не отримано.

Нижче в рамках ТЛТСДТ досліджується плоска статична задача про стиск конструкційного матеріалу вздовж тріщини, розташованої на прямолінійній межі поділу двох різних середовищ: напівобмеженого однорідного тіла (основа) та однорідного шару покриття. Частина І поточного дослідження присвячена випадку, коли жорсткість матеріалу покриття є меншою за жорсткість матеріалу основи. Таке співвідношення між жорсткостями складових частин матеріалів з покриттям є типовим, наприклад, для тіл, в яких покриття виконує антикорозійну або теплоізоляційну функцію. Відповідну крайову задачу, сформульовану в термінах потенціальних гармонічних функцій із застосуванням інтегральних подань Фур'є, зведено до задачі на власні значення для системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду (і деякої додаткової умови), яка досліджується чисельно з використанням методу Бубнова-Гальоркіна [6]. Зазначена система інтегральних рівнянь одержана в загальному випадку, коли обидва матеріли (основи і покриття) є стисливими або нестисливими високоеластичними матеріалами, для пружних потенціалів яких виконується умова рівності коренів відповідних характеристичних рівнянь [18, 22]. Конкретні числові результати з дослідження задачі на власні значення приводяться для потенціалу гармонічного типу [35] (стисливі тіла) та потенціалу Бартенєва – Хазановича [1] (нестисливі тіла). Одержані значення критичного укорочення та критичного навантаження для складових конструкційного матеріалу порівнюються з результатами аналогічної задачі для однорідного тіла [23, 36].

**§1. Постановка задачі.**

В умовах плоскої деформації розглянемо кусково-однорідне напівобмежене тіло, що складається з півплощини $x_2 \geq 0$ (матеріал «1», основа) та смуги $-h \leq x_2 \leq 0$ (матеріал «2», покриття). Прямолінійна межа поділу середовищ $x_2 = 0$ містить відкриту міжфазну ненавантажену тріщину довжиною $2a$ (рис. 1); поза тріщиною матеріали жорстко з'єднані між собою.

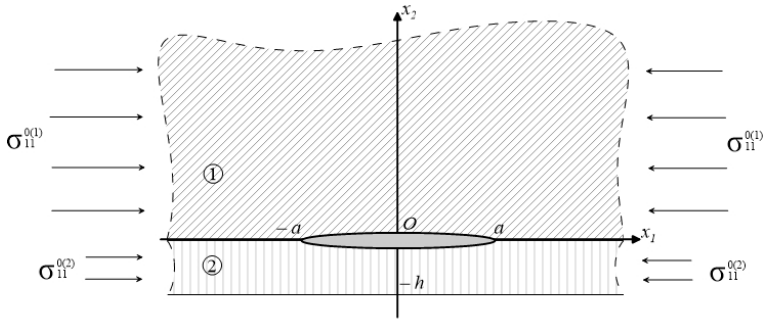



*Рис. 1*

Нехай на нескінченності матеріали стискаються вздовж осі $Ox_1$ рівномірно розподіленими навантаженнями

$$\sigma = \text{const},\ i = 1, 2;\quad \sigma \neq \sigma_{11}^{0(2)} \tag{1.1}$$

таким чином, щоб гарантувати однакові укорочення вздовж осі $Ox_1$ для матеріалів півплощини та смуги

$$\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 = \text{const}\,,\quad \lambda_1 < 1\,, \tag{1.2}$$

де $\lambda_1^1$, $\lambda_1^2$ – коефіцієнти укорочення матеріалів півплощини та смуги, що обумовлені стискаючими зусиллями $\sigma_{11}^{0(1)}$ та $\sigma_{11}^{0(2)}$ відповідно (тут і далі верхнім індексом «1» (в дужках) позначені величини, що відповідають матеріалу півплощини «1», а верхнім індексом «2» (в дужках) – смуги «2»; верхнім індексом «0» (без дужок) тут і надалі

позначаються величини, що відносяться до початкового (докритичного, незбуреного) стану, а збурення цих величин не позначаються додатковим індексом). Гранична поверхня тіла $x_2 = -h$ вважається вільною від напружень.

В цьому випадку докритичний напружено-деформований стан в кожній з областей «1» і «2» є статично визначеним, однорідним та визначається виразами для переміщень

$$u_1^{0(i)} = (\lambda_1 - 1)x_1, \quad i = 1, 2 . \tag{1.3}$$

Граничні умови сформульованої задачі записуються наступним чином:

$$t_{22}^{(2)} = 0; \;\; t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = -h, \;\; 0 \le |x_1| < \infty) ;$$

$$t_{22}^{(1)} = t_{22}^{(2)}; \quad t_{21}^{(1)} = t_{21}^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad 0 \le |x_1| < \infty) ;$$

$$t_{22}^{(2)} = 0; \;\; t_{21}^{(2)} = 0 \quad (x_2 = 0, \;\; |x_1| \le a) ; \tag{1.4}$$

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}; \;\; u_2^{(1)} = u_2^{(2)} \quad (x_2 = 0, \quad |x_1| > a) .$$

Тут $t_{kl}^{(i)}, \;\; i, k, l = 1, 2$ є збуреннями компонент несиметричного тензору напружень Піоли – Кірхгофа $\tilde{t}$, які пов'язані з похідними від збурень компонент вектора переміщень $\vec{u}$ у випадку плоскої задачі для *стисливих* тіл [18, 23] наступними співвідношеннями:

$$t_{11}^{(i)} = \omega_{1111}^i \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} + \omega_{1122}^i \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_2} ; \quad t_{12}^{(i)} = \omega_{1221}^i \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_1} + \omega_{1212}^i \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_2} ;$$

$$t_{21}^{(i)} = \omega_{2121}^i \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_1} + \omega_{2112}^i \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_2} ; \quad t_{22}^{(i)} = \omega_{2211}^i \frac{\partial u_1^{(i)}}{\partial x_1} + \omega_{2222}^i \frac{\partial u_2^{(i)}}{\partial x_2} , \;\; i = 1, 2. \tag{1.5}$$

Величини $\omega_{klmn}^i = \omega_{klmn}^i(\lambda_1, \lambda_2^i)$ є компонентами тензора четвертого рангу $\tilde{\omega}^{(i)}$ і характеризують вибрану модель матеріалу (у випадку високоеластичних матеріалів це відповідний пружний потенціал). Аналогічні представлення отримані в [18, 23] і для випадку *нестисливих* тіл (відповідні компоненти тензорів $\tilde{\omega}^{(i)}$ треба замінити на компоненти тензора четвертого рангу $\tilde{\text{æ}}^{(i)}$).

Для випадку однорідного докритичного стану (1.1) – (1.3) в [18, 23] побудовані представлення загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь рівноваги через гармонічні потенціальні функції. Вид вказаних представлень залежить від співвідношення коренів характеристичного рівняння для вибраної моделі матеріалу. В даній роботі досліджується випадок, коли характеристичне рівняння для кожного з матеріалів «1» і «2» має *рівні корені*

$$n_1^1 = n_2^1 = n_1^2 = n_2^2 = n , \tag{1.6}$$

а самі матеріали «1» і «2» є різними, проте такими, що описуються однаковими пружними потенціалами. В (1.6) корені виражаються через компоненти тензора $\tilde{\omega}^{(i)}$ у вигляді

$$n_{1,2}^i = c \pm \sqrt{c^2 - \omega_{2222}^i \omega_{2112}^i \left(\omega_{1111}^i \omega_{1221}^i\right)^{-1}} ; \quad 2c = \frac{\omega_{2222}^i}{\omega_{1221}^i} + \frac{\omega_{2112}^i}{\omega_{1111}^i} - \frac{\left(\omega_{1122}^i + \omega_{1212}^i\right)^2}{\omega_{1111}^i \omega_{1221}^i} .$$

Керуючись [18, 23], введемо до розгляду для кожного з матеріалів потенціальні функції $\mathrm{F}^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$, які задовольняють рівнянню Лапласа

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)\mathrm{F}^{(i)},\ \varphi^{(i)},\ \Phi^{(i)}=0,\quad z_1=n^{-1/2}x_2 \tag{1.7}$$

і пов'язані між собою співвідношеннями

$$\varphi^{(i)}=-(\varphi_1^{(i)}+\varphi_2^{(i)});\quad \mathrm{F}^{(i)}=-\frac{\partial\varphi_2^{(i)}}{\partial z_1};\quad \Phi^{(i)}=\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial z_1}.$$

Тоді мають місце наступні представлення збурень напружень і переміщень для кожного зі складових кусково-однорідного тіла:

$$u_1^{(i)}=-\frac{\partial\varphi^{(i)}}{\partial x_1}-z_1\frac{\partial\,\mathrm{F}^{(i)}}{\partial x_1};\quad u_2^{(i)}=p_1^i\,\mathrm{F}^{(i)}+p_2^i\Phi^{(i)}+p_2^i z_1\frac{\partial\,\mathrm{F}^{(i)}}{\partial z_1};$$

$$t_{21}^{(i)}=\frac{\partial}{\partial x_1}\left[k_1^i\mathrm{F}^{(i)}+k_2^i\Phi^{(i)}+k_2^i z_1\frac{\partial\,\mathrm{F}^{(i)}}{\partial z_1}\right]; \tag{1.8}$$

$$t_{22}^{(i)}=k_4^i\frac{\partial\mathrm{F}^{(i)}}{\partial z_1}+k_5^i\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial z_1}+k_5^i z_1\frac{\partial^2\mathrm{F}^{(i)}}{\partial z_1{}^2},\quad i=1,\,2,$$

коефіцієнти в яких є функціями компонентів тензорів $\tilde{\omega}^{(i)}$ (для *стисливих* тіл)

$$k_{1,2,4,5}^i=k_{1,2,4,5}^i(\omega_{klmn}^i);\quad p_{1,2}^i=p_{1,2}^i(\omega_{klmn}^i),\quad i,\,k,\,l,\,m,\,n=1,\,2$$

або функціями компонентів тензорів $\tilde{\text{æ}}^{(i)}$ (для *нестисливих* тіл):

$$k_{1,2,4,5}^i=k_{1,2,4,5}^i(\text{æ}_{klmn}^i);\quad p_{1,2}^i=p_{1,2}^i(\text{æ}_{klmn}^i),\ i,\,k,\,l,\,m,\,n=1,\,2.$$

Використовуючи представлення (1.8), отримуємо наступні співвідношення для граничних умов (1.4) задачі в термінах потенціальних функцій:

$$k_1^2\frac{\partial\mathrm{F}^{(2)}}{\partial x_1}+k_2^2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial x_1}-k_2^2h_1\frac{\partial^2\,\mathrm{F}^{(2)}}{\partial x_1\partial z_1}=0;$$

$$k_4^2\frac{\partial\mathrm{F}^{(2)}}{\partial z_1}+k_5^2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z_1}-k_5^ih_1\frac{\partial^2\mathrm{F}^{(2)}}{\partial z_1{}^2}=0,\quad h_1=n^{-1/2}h\quad (z_1=-h_1,\ 0\le|x_1|<\infty);$$

$$k_1^1\frac{\partial\mathrm{F}^{(1)}}{\partial x_1}+k_2^1\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x_1}=k_1^2\frac{\partial\mathrm{F}^{(2)}}{\partial x_1}+k_2^2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial x_1};$$

$$k_4^1\frac{\partial\mathrm{F}^{(1)}}{\partial z_1}+k_5^1\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z_1}=k_4^2\frac{\partial\mathrm{F}^{(2)}}{\partial z_1}+k_5^2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z_1}\quad (z_1=0,\ 0\le|x_1|<\infty); \tag{1.9}$$

$$k_1^2\frac{\partial\mathrm{F}^{(2)}}{\partial x_1}+k_2^2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial x_1}=0;\quad k_4^2\frac{\partial\mathrm{F}^{(2)}}{\partial z_1}+k_5^2\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z_1}=0\quad (z_1=0,\ |x_1|\le a);$$

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial x_1}=\frac{\partial\varphi^{(2)}}{\partial x_1};\quad p_1^1\,\mathrm{F}^{(1)}+p_2^1\Phi^{(1)}=p_1^2\,\mathrm{F}^{(2)}+p_2^2\Phi^{(2)}\quad (z_1=0,\ |x_1|>a).$$

**§2. Система інтегральних рівнянь задачі**.

З урахуванням симетрії конфігурації відносно осі $Ox_2$, по аналогії до задач для однорідного тіла [18, 23], представимо невідомі потенціальні функції $\mathrm{F}^{(i)}$, $\varphi^{(i)}$, $\Phi^{(i)}$ у вигляді косинус-розкладів Фур'є за координатою $x_1$.

$$\mathrm{F}^{(1)}(x_1,\, z_1) = \int_0^\infty A(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda z_1}\cos\lambda x_1 d\lambda\,; \quad \Phi^{(1)}(x_1, z_1) = \int_0^\infty B(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda z_1}\cos\lambda x_1 d\lambda\,;$$

$$\mathrm{F}^{(2)}(x_1,\, z_1) = \int_0^\infty \left[C_1(\lambda)\cosh\lambda(h_1+z_1) + C_2(\lambda)\sinh\lambda(h_1+z_1)\right]\frac{\cos\lambda x_1 d\lambda}{\sinh\lambda h_1}\,;$$

$$\Phi^{(2)}(x_1,\, z_1) = \int_0^\infty \left[D_1(\lambda)\cosh\lambda(h_1+z_1) + D_2(\lambda)\sinh\lambda(h_1+z_1)\right]\frac{\cos\lambda x_1 d\lambda}{\sinh\lambda h_1}\,; \qquad (2.1)$$

$$\varphi^{(1)}(x_1,\, z_1) = -\int_0^\infty B(\lambda)\mathrm{e}^{-\lambda z_1}\cos\lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda}\,;$$

$$\varphi^{(2)}(x_1,\, z_1) = \int_0^\infty \left[D_2(\lambda)\cosh\lambda(h_1+z_1) + D_1(\lambda)\sinh\lambda(h_1+z_1)\right]\cos\lambda x_1 \frac{d\lambda}{\lambda\sinh\lambda h_1}\,.$$

Представлення (2.1) відповідають парності функцій $u_2^{(i)}(x_1,\, z_1)$ і непарності функцій $u_1^{(i)}(x_1,\, z_1)$ по координаті $x_1$, тому далі розглядаємо лише значення $x_1 \ge 0$.

Задовольнімо наскрізні граничні умови. Використавши перші чотири умови в (1.9), приходимо до наступної системи рівнянь відносно невідомих функцій $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, $D_1(\lambda)$, $D_2(\lambda)$:

$$k_1^1 A + k_2^1 B - k_1^2\coth\mu\cdot C_1 - k_1^2 C_2 - k_2^2\coth\mu\cdot D_1 - k_2^2 D_2 = 0\,;$$

$$k_4^1 A + k_5^1 B + k_4^2 C_1 + k_4^2\coth\mu\cdot C_2 + k_5^2 D_1 + k_5^2\coth\mu\cdot D_2 = 0\,; \qquad (2.2)$$

$$k_1^2 C_1 - \mu k_2^2 C_2 + k_2^2 D_1 = 0\,; \quad \mu k_5^2 C_1 - k_4^2 C_2 - k_5^2 D_2 = 0 \quad (\mu = \lambda h_1)\,.$$

Визначаючи $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $D_1(\lambda)$ і $D_2(\lambda)$ через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$, отримаємо

$$A = -\Delta^{-1}\left[\left(s_1 + \mu s_2 + \mu\coth\mu\cdot s_3\right)C_1 + \left(s_4 + \mu s_5 + \mu\coth\mu\cdot s_6\right)C_2\right];$$

$$B = \Delta^{-1}\left[\left(r_1 + \mu r_2 + \mu\coth\mu\cdot r_3\right)C_1 + \left(r_4 + \mu r_5 + \mu\coth\mu\cdot r_6\right)C_2\right]; \qquad (2.3)$$

$$D_1 = -\frac{k_1^2}{k_2^2}C_1 + \mu C_2\,; \quad D_2 = \mu C_1 - \frac{k_4^2}{k_5^2}C_2\,,$$

де

$$\Delta = k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1\,; \quad s_1 = \left(k_2^1 k_4^2 k_2^2 - k_2^1 k_5^2 k_1^2\right)\Big/ k_2^2\,; \quad s_2 = k_5^1 k_2^2\,;$$

$$s_3 = k_2^1 k_5^2\,; \quad s_4 = \left(k_5^1 k_5^2 k_1^2 - k_5^1 k_2^2 k_4^2\right)\Big/ k_5^2\,; \quad s_5 = s_3\,; \quad s_6 = s_2\,;$$

$$r_1 = \left(k_1^1 k_4^2 k_2^2 - k_1^1 k_5^2 k_1^2\right)\Big/ k_2^2\,; \quad r_2 = k_4^1 k_2^2\,;$$

$$r_3 = k_1^1 k_5^2; \quad r_4 = \left(k_4^1 k_5^2 k_1^2 - k_4^1 k_2^2 k_4^2\right)\Big/ k_5^2 \; ; \; r_5 = r_3; \quad r_6 = r_2 \, .$$

Останні ж чотири умови (1.9) приводять до системи парних інтегральних рівнянь

$$\begin{gathered}
\int_0^\infty \lambda\left[(k+\mu\coth\mu)C_1 + \mu C_2\right]\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| \le a); \\
\int_0^\infty \left[\mu C_1 + (-k+\mu\coth\mu)C_2\right]\cos\lambda x_1 d\lambda = \text{const} \quad (|x_1| \le a);
\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered}
\int_0^\infty \left[\alpha_1(\mu)C_1 + \alpha_2(\mu)C_2\right]\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a); \\
\int_0^\infty \lambda\left[\beta_1(\mu)C_1 + \beta_2(\mu)C_2\right]\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a),
\end{gathered} \tag{2.5}$$

де

$$\alpha_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2\coth x + a_3 x\coth x \; ; \quad \alpha_2(x) = b_0 + a_3 x + a_1 x\coth x \; ;$$

$$\beta_1(x) = c_0 + d_3 x + d_1 x\coth x \; ; \quad \beta_1(x) = d_0 + d_1 x + d_2\coth x + d_3 x\coth x \; ;$$

$$k = \frac{k_4^2 k_2^2 - k_5^2 k_1^2}{k_2^2 k_5^2}; \quad a_0 = \frac{r_1 p_2^1 - s_1 p_1^1}{\Delta}; \quad a_1 = -p_2^2 + \frac{r_2 p_2^1 - s_2 p_1^1}{\Delta}; \quad a_2 = \frac{k_1^2}{k_2^2} p_2^2 - p_1^2 \; ;$$

$$a_3 = \frac{r_3 p_2^1 - s_3 p_1^1}{\Delta}; \quad b_0 = -p_1^2 + \frac{k_4^2}{k_5^2} p_2^2 + \frac{r_4 p_2^1 - s_4 p_1^1}{\Delta}; \quad c_0 = -\frac{k_1^2}{k_2^2} + \frac{r_1}{\Delta};$$

$$d_0 = \frac{r_4}{\Delta}; \quad d_1 = 1 + \frac{r_5}{\Delta}; \quad d_2 = -\frac{k_4^2}{k_5^2}; \quad d_3 = \frac{r_6}{\Delta}$$

та до додаткової умови

$$\int_0^\infty \left[\beta_1(\mu)C_1 + \beta_2(\mu)C_2\right]\sin\lambda a d\lambda = 0 \, . \tag{2.6}$$

Далі зведемо систему парних інтегральних рівнянь (2.4), (2.5) до системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду.

Для зручності запишемо інтегральні рівняння (2.5) у наступній формі:

$$\int_0^\infty Y_1(\lambda)\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a); \quad \int_0^\infty \lambda Y_2(\lambda)\cos\lambda x_1 d\lambda = 0 \quad (|x_1| > a),$$

де

$$Y_1(\lambda) = \alpha_1(\mu)C_1(\lambda) + \alpha_2(\mu)C_2(\lambda); \quad Y_2(\lambda) = \beta_1(\mu)C_1(\lambda) + \beta_2(\mu)C_2(\lambda) \, . \tag{2.7}$$

Вибір функцій $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$ у вигляді

$$Y_1(\lambda) = \lambda^{-2}\int_0^a \varphi(t)\left(\cos\lambda t - \cos\lambda a\right)dt; \quad Y_2(\lambda) = -h_1\lambda^{-3}\int_0^a \psi(t)\left(\cos\lambda t - \cos\lambda a\right)dt \tag{2.8}$$

дозволяє автоматично задовольнити умови (2.5). В (2.8) функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – нові невідомі функції, неперервні зі своїми похідними на відрізку $[0, a]$.

Виразивши з (2.7) $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ через $Y_1(\lambda)$, $Y_2(\lambda)$ та підставивши отримані вирази в (2.4), для безрозмірних змінних $\xi \equiv a^{-1}x_1$, $\eta \equiv a^{-1}t$ приходимо до наступної системи інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду

$$\int_0^1 \left[ \int_0^\infty P_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda} d\lambda \right] f(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \int_0^1 \left[ \int_0^\infty P_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} d\lambda \right] g(\eta)\, d\eta = 0;$$

$$\int_0^1 \left[ \int_0^\infty Q_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} d\lambda \right] f(\eta)\, d\eta + \tag{2.9}$$

$$+ \int_0^1 \left[ \int_0^\infty Q_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^3} d\lambda \right] g(\eta)\, d\eta = \text{const},$$

$$\beta = h/a, \quad 0 \le \xi < 1, \quad 0 \le \eta \le 1$$

відносно невідомих безрозмірних функцій $f(\xi) \equiv a\varphi(a\xi)$; $g(\xi) \equiv a\psi(a\xi)$.

Константа «const», яка фігурує в (2.9), пов'язана з додатковою умовою (2.6). Остання ж, в свою чергу, з урахуванням (2.8) представляється так:

$$\int_0^1 g(\eta)\left(1-\eta^2\right) d\eta = 0. \tag{2.10}$$

Функції $P_1$, $P_2$, $Q_1$, $Q_2$, що входять до ядер інтегральних рівнянь (2.9), мають такий вигляд:

$$P_1(x) = \frac{(k + x\coth x)\beta_2(x) - x\beta_1(x)}{\delta(x)}; \quad P_2(x) = \frac{(-k - x\coth x)\alpha_2(x) + x\alpha_1(x)}{\delta(x)};$$

$$Q_1(x) = \frac{x\beta_2(x) + (k - x\coth x)\beta_1(x)}{\delta(x)}; \quad Q_2(x) = \frac{x\alpha_2(x) + (-k + x\coth x)\alpha_1(x)}{\delta(x)};$$

$$\delta(x) = \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x).$$

Таким чином, проблема зводиться до задачі (2.9), (2.10) на власні значення відносно параметра видовження $\lambda_1^1 = \lambda_1^2 = \lambda_1 < 1$. Параметр $\lambda_1$ (коефіцієнт укорочення вздовж осі $Ox_1$) характеризує докритичний стан та складним нелінійним чином входить до ядер інтегральних рівнянь (2.9).

**§3. Дослідження ядер інтегральних рівнянь.**

Система інтегральних рівнянь (2.9), доповнена умовою (2.10), була отримана у загальній формі для стисливих і нестисливих тіл у випадку, коли матеріали півплощини «1» і смуги «2» описуються однаковими пружними потенціалами (для високоеластичних матеріалів), для яких має місце випадок рівних коренів характеристичного рівняння.

Неперервність ядер інтегральних рівнянь (2.9) порушується лише у таких двох випадках:

1). Коли виконується умова

$$\Delta \equiv k_4^1 k_2^1 - k_5^1 k_1^1 = 0. \tag{3.1}$$

У цьому випадку з системи рівнянь (2.2) коефіцієнти $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ виражаються через $C_1(\lambda)$, $C_2(\lambda)$ неєдиним чином.

Значення $\lambda_1^{cr}$, яке отримується з (3.1), є критичними значенням, що відповідає поверхневій нестійкості півплощини (з матеріалу «1» або «2») без тріщини [5] та визначається видом пружного потенціалу. В задачі про кусково-однорідну площину з вільною від навантажень міжфазною тріщиною верхня оцінка для критичного значення параметру $\lambda_1$ також дорівнює $\lambda_1^{cr}$ – максимальному зі значень, що відповідає поверхневій нестійкості матеріалу однієї з півплощин [26]. З фізичних міркувань очевидно, що критичні значення параметру $\lambda_1$ задачі, що досліджується, лежать в області

$$\lambda_1^{cr} < \lambda_1 < 1,$$

в якій рівність (3.1) не виконується.

2). Коли виконується умова

$$\delta(x) \equiv \alpha_1(x)\beta_2(x) - \alpha_2(x)\beta_1(x) = 0 \ (x > 0). \tag{3.2}$$

В цьому випадку знаменники функцій $P_1, P_2, Q_1, Q_2$, що входять до ядер інтегральних рівнянь (2.9), перетворюються на нуль.

Досліджувати трансцендентне рівняння (3.2), яке містить степеневі та гіперболічні (або показникові) функції та складним чином залежить від сталих обох матеріалів «1» та «2», необхідно окремо для кожного конкретного виду пружного потенціалу. Числові результати в задачі, що розглядається, будуть отримані для потенціалу *Бартенєва – Хазановича* (нестисливе тіло) та потенціалу *гармонічного типу* (стисливе тіло). Для означених матеріалів і дослідимо рівняння (3.2).

Потенціал *Бартенєв – Хазановича* характеризується однією сталою $\mu_i$ для кожного матеріалу «1», «2», яка у випадку малих докритичних деформацій, що тут розглядається, переходить у коефіцієнт Ляме відповідного матеріалу і ототожнюється з його жорсткістю. Для потенціалу *Бартенєва – Хазановича* у випадку плоскої задачі мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{gathered} n_1^i = n_2^i = \left(\lambda_1\right)^2; \quad \lambda_2^i = \left(\lambda_1\right)^{-1}; \quad \sigma_{11}^{0(i)} = 2\mu_i(\lambda_1 - \lambda_2^i)(\lambda_1)^{-2}; \\ \lambda_1^{cr} = 0,577; \quad \varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0,423, \quad i = 1, 2 \end{gathered} \tag{3.3}$$

( $\varepsilon_1^i = 1 - \lambda_1^i$ – укорочення відповідного матеріалу вздовж осі $Ox_1$ ).

Потенціал *гармонічного типу* характеризується двома сталими: $\mu_i$ (у випадку малих докритичних деформацій це коефіцієнт Ляме матеріалу) та $\nu_i$ (у випадку малих докритичних деформацій це коефіцієнт Пуассона матеріалу) для кожного матеріалу «1» та «2», які визначають, відповідно, жорсткість матеріалу та його здатність до стисливості. Для потенціалу *гармонічного типу* у випадку плоскої задачі мають місце наступні співвідношення:

$$\begin{gathered} n_1^i = n_2^i = 1; \quad \lambda_2^i = 1 - \nu_i\left(1 - \nu_i\right)^{-1}\left(\lambda_1 - 1\right); \quad \sigma_{11}^{0(i)} = 2\mu_i(\lambda_1 - \lambda_2^i)(\lambda_1)^{-1}; \\ \lambda_1^{cr} = 0,5; \quad \varepsilon_1^{cr} = 1 - \lambda_1^{cr} = 0,5, \ \ i = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Дослідження показує, що у випадку потенціалу *Бартенєва – Хазановича* члени рівняння (3.2) не залежать окремо від жорсткостей $\mu_1$ та $\mu_2$ матеріалів, а залежать тільки від їх відношення $g = \mu_2/\mu_1$. У випадку потенціалу *гармонічного типу* члени рівняння (3.2) залежать від відношення жорсткостей матеріалів $g = \mu_2/\mu_1$ та від коефіцієнтів Пуассона матеріалів $\nu_1$ та $\nu_2$.

Для обох досліджуваних потенціалів можна сформулювати спільний висновок стосовно рівняння (3.2):

*якщо* $g > 1$, тобто матеріал смуги «2» є жорсткішим за матеріал півплощини «1», *то рівняння має* додатні корені при деяких значеннях параметру $\lambda_1$ з області $\lambda_1^{cr} < \lambda_1 < 1$ для кожного фіксованого значення $g$;

*якщо* $g \le 1$, тобто матеріал півплощини «1» є жорсткішим за матеріал смуги «2» (або жорсткості обох матеріалів однакові), *то рівняння не має* додатних коренів для всіх значень параметру $\lambda_1$ з області $\lambda_1^{cr} < \lambda_1 < 1$.

Вивченню випадку $g > 1$ буде присвячено Частину II поточного дослідження.

В даній роботі обмежимось вивченням випадку, коли матеріал півплощини жорсткіший за матеріал смуги ( $g \le 1$). В цьому разі для всіх досліджуваних значень параметрів задачі функції $P_1,\ P_2,\ Q_1,\ Q_2$, що входять до ядер інтегральних рівнянь (2.9), є неперервними.

Справедливі наступні асимптотики указаних функцій:

$$P_1(x),\ P_2(x),\ Q_1(x),\ Q_2(x) \to 0, \text{ при } x \to 0;$$

$$P_1(x) \to \frac{k(d_0 + d_2)}{a_0 d_0 + a_2 d_0 + a_0 d_2 + a_2 d_2 - b_0 c_0}, \text{ при } x \to \infty;$$

$$P_2(x) \to \frac{-k b_0}{a_0 d_0 + a_2 d_0 + a_0 d_2 + a_2 d_2 - b_0 c_0}, \text{ при } x \to \infty; \qquad (3.5)$$

$$Q_1(x) \to \frac{k c_0}{a_0 d_0 + a_2 d_0 + a_0 d_2 + a_2 d_2 - b_0 c_0}, \text{ при } x \to \infty;$$

$$Q_2(x) \to \frac{-k(a_0 + a_2)}{a_0 d_0 + a_2 d_0 + a_0 d_2 + a_2 d_2 - b_0 c_0}, \text{ при } x \to \infty.$$

Виходячи з асимптотик (3.5), неважко переконатися, що всі невласні інтеграли (від 0 до $\infty$) у (2.9), які є ядрами відповідних інтегральних рівнянь, є збіжними для всіх допустимих значень змінних $\xi,\ \eta$ і значень параметрів $\lambda_1^{cr} < \lambda_1 < 1,\ g \le 1$.

**§4. Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь на власні значення.**

Чисельне дослідження системи інтегральних рівнянь (2.9), доповнених умовою (2.10), будемо проводити з використанням методу Бубнова – Гальоркіна [6].

Апроксимуючи невідомі функції $f(\xi)$, $g(\xi)$ у вигляді лінійної комбінації перших *N* координатних функцій повної на відрізку $[0,1]$ системи функцій 1, $\xi,\ \xi^2, \ldots$

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^{N} f_j \xi^{j-1};\quad g(\xi) = \sum_{j=1}^{N} g_j \xi^{j-1},$$

приходимо до наступної системи однорідних лінійних рівнянь розмірністю $(2N+1)\times(2N+1)$ відносно невідомих коефіцієнтів розкладів $f_j$, $g_j$ та деякої невідомої сталої $c$

$$\sum_{j=1}^{N} f_{ij}^{(1)} f_j + \sum_{j=1}^{N} g_{ij}^{(1)} g_j = 0;\quad \sum_{j=1}^{N} f_{ij}^{(2)} f_j + \sum_{j=1}^{N} g_{ij}^{(2)} g_j + c_i \cdot c = 0;\quad \sum_{j=1}^{N} g_j^{(3)} g_j = 0,\ \ i = \overline{1, N}. \qquad (4.1)$$

Коефіцієнти системи (4.1) мають наступний вигляд:

$$f_{ij}^{(1)} = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^{\infty} P_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda} d\lambda \right] \eta^{j-1} d\eta \right\} \xi^{i-1} d\xi ;$$

$$g_{ij}^{(1)} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^{\infty} P_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} d\lambda \right] \eta^{j-1} d\eta \right\} \xi^{i-1} d\xi ;$$

$$f_{ij}^{(2)} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^{\infty} Q_1(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^2} d\lambda \right] \eta^{j-1} d\eta \right\} \xi^{i-1} d\xi ;$$

$$g_{ij}^{(2)} = \int_0^1 \left\{ \int_0^1 \left[ \int_0^{\infty} Q_2(n^{-1/2}\beta\lambda) \frac{(\cos\lambda\eta - \cos\lambda)\cos\lambda\xi}{\lambda^3} d\lambda \right] \eta^{j-1} d\eta \right\} \xi^{i-1} d\xi ;$$

$$c_i = \frac{1}{i}; \quad g_j^{(3)} = \frac{2}{j(j+2)}, \; i, j = \overline{1, N} .$$

Для наочності наведемо вигляд системи (4.1) ще й у матричній формі

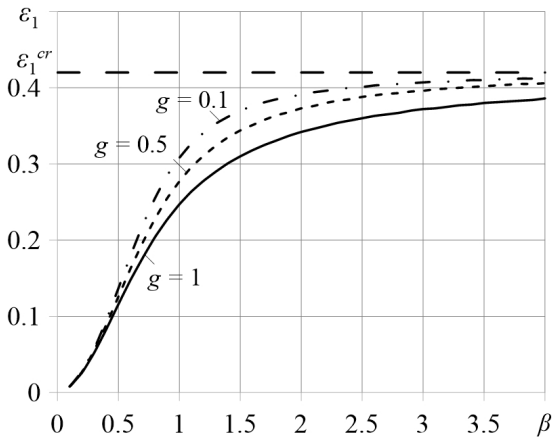
$$\begin{pmatrix} f_{11}^{(1)} & \cdot & \cdot & f_{1N}^{(1)} & g_{11}^{(1)} & \cdot & \cdot & g_{1N}^{(1)} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{N1}^{(1)} & \cdot & \cdot & f_{NN}^{(1)} & g_{N1}^{(1)} & \cdot & \cdot & g_{NN}^{(1)} & 0 \\ f_{11}^{(2)} & \cdot & \cdot & f_{1N}^{(2)} & g_{11}^{(2)} & \cdot & \cdot & g_{1N}^{(2)} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{N1}^{(2)} & \cdot & \cdot & f_{NN}^{(2)} & g_{N1}^{(2)} & \cdot & \cdot & g_{NN}^{(2)} & c_N \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & g_1^{(3)} & \cdot & \cdot & g_N^{(3)} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ f_N \\ g_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ g_N \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Дослідження задачі на власні значення для системи лінійних рівнянь (4.1), до якої зводиться вихідна задача, полягає у знаходженні першого значення параметру $\lambda_1 < 1$ (при зменшенні $\lambda_1$, починаючи зі значення $\lambda_1 = 1$, що відповідає неперервному збільшенню зовнішнього стискаючого навантаження), при якому вказана система має неєдиний розв'язок. Тобто, визначається значення $\lambda_1$, при якому визначник системи лінійних рівнянь (4.1) обертається в нуль.

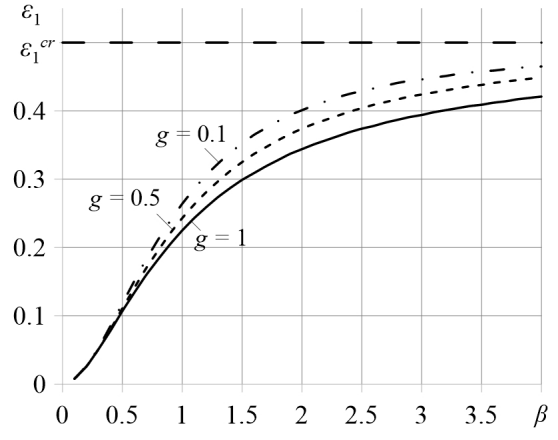
**§5. Аналіз одержаних результатів.**

В даному параграфі наведемо конкретні числові результати дослідження системи однорідних лінійних рівнянь (4.1) на власні значення для випадків, коли матеріали кусково-однорідного тіла описуються потенціалом *Бартенєва – Хазановича* (нестисливе тіло) [1] та потенціалом *гармонічного типу* (стисливе тіло) [35], для яких справедливі, відповідно, співвідношення (3.3) та (3.4). Розглядається випадок $g \le 1$.

На рис. 2 зображено залежність значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ від значення відносної (нормованої на половину довжини тріщини) ширини смуги $\beta = h/a$ для різних значень $g = \mu_2/\mu_1$ відношення жорсткості матеріалу смуги (матеріал «2») до жорсткості матеріалу півплощини (матеріал «1»). Рис 2, *а* відповідає випадку потенціалу *Бартенєва – Хазановича*, а рис. 2, *б* – потенціалу *гармонічного типу.*




*а*




*б*

*Рис. 2*

Як свідчать графіки, зображені на рис. 2, у обох випадках для фіксованих значень геометричного параметру задачі $\beta = h/a$ значення критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ (і, відповідно, критичні значення стискаючих навантажень) збільшується зі зменшенням жорсткості матеріалу покриття по відношенню до жорсткості матеріалу основи.

Результати для однакових матеріалів «1» і «2» (суцільні криві на графіках, наведених на рис. 2) повністю узгоджуються з результатами [23, 36] для приповерхневої тріщини в однорідному матеріалі. Аналогічно до випадку однорідного тіла, у задачі, що досліджується (при $g \le 1$), значення параметру критичного відносного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ не залежить від значень коефіцієнтів Пуассона матеріалів «1» і «2» (рис. 2, *б*, потенціал *гармонічного типу*).

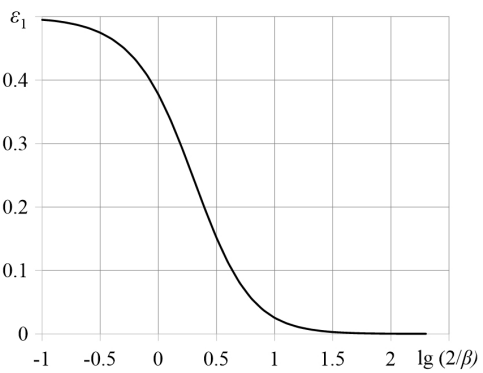
Таким чином, приходимо до висновку, що при стиску кусково-однорідного напівобмеженого матеріалу з покриттям вздовж міжфазної приповерхневої тріщини у випадку, коли жорсткість матеріалу шару покриття є меншою за жорсткість матеріалу основи, реалізується механізм втрати стійкості, який є аналогічним до того, що має місце, коли напівобмежене тіло є однорідним, і який пов'язаний з локальною втратою стійкості матеріалу біля тріщини та не пов'язаний з внутрішньою чи поверхневою втратою стійкості конструкційного матеріалу.

Горизонтальні штрихові прямі $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{cr}$ на рис. 2 відповідають критичним значенням для поверхневої нестійкості півплощин, виготовлених з відповідних матеріалів. З наведених результатів випливає, що при $\beta \to \infty$ критичні значення $\varepsilon_1$ асимптотично наближаються до верхньої оцінки значень цих величин, що відповідають одній міжфазній тріщині в нескінченному кусково-однорідному матеріалі [26] і є рівними значенням цих величин для приповерхневої нестійкості півплощини, виготовленої з відповідного матеріалу.

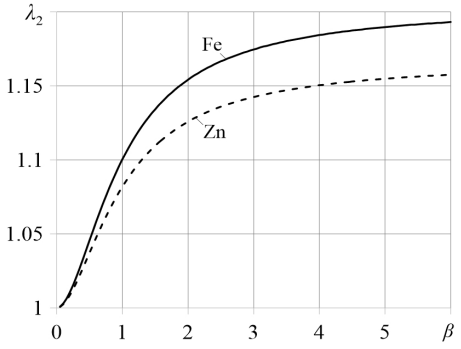
На рис. 3 наведено результати дослідження критичних параметрів задачі про стиск вздовж міжфазної приповерхневої тріщини для конкретного конструкційного матеріалу з тонким шаром покриття – оцинкованого заліза. Цинк ( $\nu_2 = \nu_{zn} = 0,25$ ) та залізо ( $\mu_2 = \mu_{zn} = 36\,\text{Гпа}$, $\mu_1 = \mu_{Fe} = 82\,\text{Гпа}$, $\nu_1 = \nu_{Fe} = 0,29$ ) є матеріалами, які при малих докритичних деформаціях можуть бути описані моделлю пружного стисливого тіла з потенціалом *гармонічного типу*.

З використанням логарифмічної шкали на рис. 3, *а* для широкого діапазону довжини $2a$ міжфазної тріщини, віднесеної до товщини $h$ тонкого шару цинкового покриття, зображено залежність значення параметру критичного укорочення $\varepsilon_1 = 1 - \lambda_1$ від параметру $\lg 2/\beta = \lg(2a/h)$.

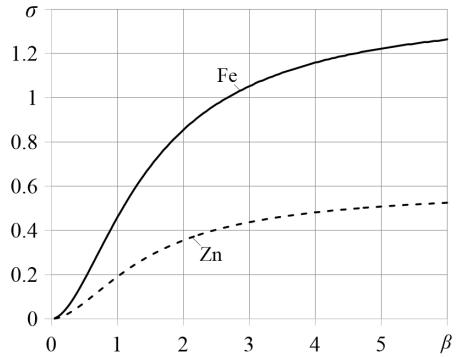
На рис. 3, *б, в* зображено, відповідно, залежність значення критичного відносного укорочення $\lambda_2^i$, $i = 1,2$ вздовж осі $Ox_2$ та значення безрозмірного критичного напруження стиску $\sigma^i = -\sigma_{11}^{0(i)} / 2\mu_1$, $i = 1,2$ від значення відносної ширини смуги $\beta = h/a$. Суцільна крива відповідає матеріалу основи «1» ( $Fe$, залізо), а штрихова – матеріалу тонкого покриття «2» ( $Zn$, цинк).




*а*




*б*




*в*

*Рис. 3*

**Висновки.**

В рамках тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено (за умов плоскої деформації) задачу про стиск напівобмеженого тіла вздовж тріщини, яка розташована на прямолінійній межі поділу двох компонентів зазначеного тіла: напівобмеженої основи та менш жорсткого по відношенню до неї покриття (досліджується випадок рівних коренів характеристичних рівнянь для обох матеріалів). Вивчено залежності значень критичного відносного укорочення вздовж лінії поділу середовищ та критичного навантаження від відносної (віднесеної до довжини тріщини) товщини шару покриття та від фізико-механічних характеристик матеріалів.

Результати обчислень, які отримані для пружних матеріалів з потенціалом гармонічного типу і з потенціалом Бартенєва – Хазановича, показують, що при суттєвому збільшенні відносної товщини покриття значення критичних параметрів у випадку задачі про півплощину з міжфазною тріщиною між основою та покриттям асимптотично прямують до верхньої оцінки значень критичних параметрів, які отримуються в задачі про стиск нескінченної кусково-однорідної площини вздовж однієї тріщини.

За однакових фізико-механічних характеристик покриття і основи значення критичних параметрів задачі, що розглядається, збігаються з відповідними значеннями критичних параметрів, одержаних при дослідженні задачі про стиск однорідної півплощини вздовж приповерхневої тріщини.

Сукупний аналіз одержаних результатів дозволяє зробити висновок про те, що у випадку, коли жорсткість матеріалу покриття є меншою за жорсткість матеріалу основи, аналогічно до випадку приповерхневої тріщини в однорідному матеріалі, першочергово реалізується механізм втрати стійкості, пов'язаний з локальною втратою стійкості рівноваги частини матеріалу біля тріщини.

РЕЗЮМЕ. З використанням співвідношень тривимірної лінеаризованої теорії стійкості деформівних тіл досліджено плоску статичну задачу про стиск напівобмеженого тіла (основи) з тонким шаром покриття вздовж приповерхневої тріщини, розташованої на прямолінійній межі поділу двох різних матеріалів. Використовується модель кусково-однорідного середовища за припущення, що матеріал покриття є менш жорстким за матеріал основи. Для випадку, коли для обох матеріалів корені відповідних характеристичних рівнянь є рівними, визначено критичні значення параметрів навантаження та проаналізовано їх залежності від фізико-механічних характеристик матеріалів і геометричних параметрів задачі.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: матеріал з покриттям, приповерхнева міжфазна тріщина, стиск вздовж тріщини, критичні зусилля.

1. *Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н.* О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // Высокомолекулярные соединения. – 1960. – **2**, № 1. – С. 21 – 28.
2. *Гузь А.Н.* Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. – 276 с.
3. *Гузь А.Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Плоская задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **259**, № 6. – С. 1315 – 1318.
4. *Гузь А.Н.* Об одном критерии разрушения твердых тел при сжатии вдоль трещин. Пространственная задача // Докл. АН СССР. – 1981. – **261**, № 1. – С. 313 – 315.
5. *Гузь А.Н.* Основы механики разрушения композитов при сжатии: в 2-х томах. – Киев: «ЛИТЕРА», 2008. – Т. 1. Разрушение в структуре материала. – 592 с.; Т. 2. Родственные механизмы разрушения. – 736 с.
6. *Михлин С.Г., Смолицкий Х.Л.* Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. – Москва: Наука, 1965. – 383 с.
7. *Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З.* Основы механики разрушения материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 488 с.
8. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. − 640 с.
9. *Bogdanov V.L.* On a circular shear crack in a semiinfinite composite with initial stresses // Material Sciences. – 2007. – **43**, N 3. – P. 321 – 330.
10. *Bogdanov V.L.* Influence of initial stresses on the stress state of a composite with a periodic system of parallel coaxial normal tensile cracks // J. Math. Sciences (United States). – 2012. – **186**, N 1. – P. 1 – 13.
11. *Bogdanov V.L.* On one approach in fracture mechanics of composites with parallel cracks under the action of initial (residual) stresses // Mech. Comp. Mater. – 2023. – **59**, N 2. – P. 239 – 262.
12. *Bogdanov V.L., Dovzhyk M.V., Nazarenko V.M.* Fracture of highly elastic and composite materials in compression along near-surface crack // Mech. Comp. Mater. – 2023. – **59**, N 2. – P. 411 – 418.
13. *Bogdanov V.L., Kipnis A.L.* Investigation of the fracture of a semibounded body compressed along a near-surface interface crack // J. Math. Sciences (United States). – 2021. – **253**, N 1. – P. 99 – 107.
14. *Bogdanov V.L., Nazarenko V.M.* Compression of a composite material along a macrocrack near the surface // Mech. Comp. Mater. – 1994. – **30**, N 3. – P. 352 – 358.
15. *Bogdanov V.L., Nazarenko V.M.* Study of the Compressive Failure of a Semi-Infinite Elastic Material with a Harmonic Potential // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 10. – P. 760 – 765.

16. *Dvorak G.J.* Composite materials: Inelastic behaviour, damage, fatigue and fracture // Int. J. Solids and Struct. – 2000. – **37**, N 1 – 2. – P. 155 – 170.
17. *Griffith A.A.* The phenomenon of rupture and flow in solids // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser.A. – 1920. – **221**. – P. 163 – 198.
18. *Guz A.N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1999. – 555 p.
19. *Guz A.N.* Establishing The Foundations of the Mechanics of Fracture of Materials Compressed Along Cracks (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 1. – P. 1 – 57.
20. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture Mechanics: to Fiftieth Anniversary of Studies (Review). III // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 3 – 100.
21. *Guz A.N.* Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. – Advanced Structure Materials, Vol. 159. – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2021. – 366 p.
22. *Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M.* Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. – Advanced Structured Materials, Vol. 138. – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. – 490 p.
23. *Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M.* Two-Dimensional Problems on the Fracture of Bodies Under Compression Along Cracks. In: *Guz A.N., Bogdanov V.L., Nazarenko V.M.* Fracture of Materials Under Compression Along Cracks. – Advanced Structured Materials, Vol. 138. – Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2020. – P. 149 – 248.
24. *Guz A.N., Guz I.A.* Analytical solution of stability problem for two composite half-plane compressed along interfacial cracks // Composites. Part B. – 2000. – **31**, N 5. – P. 405 – 418.
25. *Guz A.N., Guz I.A.* The Stability of the Interface Between Two Bodies Compressed Along Interface Cracks. 1. Exact Solution for the Case of Unequal Roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 4. – P. 482 – 491.
26. *Guz A.N., Guz I.A.* The Stability of the Interface Between Two Bodies Compressed Along Interface Cracks. 2. Exact Solution for the Case of Equal Roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 5. – P. 615 – 622.
27. *Guz A.N., Guz I.A.* The Stability of the Interface Between Two Bodies Compressed Along Interface Cracks. 3. Exact Solution for The Case of Equal and Unequal Roots // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, N 6. – P. 759 – 768.
28. *Guz A.N., Guz I.A.* Mixed Plane Problems of Linearized Solids Mechanics. Exact Solutions // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, N 1. – P. 1 – 29.
29. *Guz I.A*. The Strength of a Composite Formed by Longitudinal – Transverse Stacking of Orthotropic Layers with a Crack at the Boundary // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 11. – P. 921 – 924.
30. *Guz I.A.* Investigation of the Stability of a Composite in Compression Along Two Parallel Structural Cracks at the Layer Interface // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, N 11. – P. 841 – 847.
31. *Guz I.A*. Problems of the Stability of Composite Materials in Compression Along Interlaminar Cracks: Periodic System of Parallel Macrocracks // Int. Appl. Mech. – 1995. – **31**, N 7. – P. 551 – 557.
32. *Guz I.A.* On modelling of a failure mechanism for layered composites with interfacial cracks // ZAMM. – 1998. – **78,** Sup. N 1. – P. S429 – S430.
33. *Guz I.A., Kokhanenko Yu.V.* Stability of Laminated Composite Material in Compression Along Microcrack // Int. Appl. Mech. – 1993. – **29**, N 9. – P. 702 – 708.
34. *Irwin G.R.* Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate // J. Appl. Mech. – 1957. – **24.** – P. 361 – 364.
35. *John F.* Plane strain problems for a perfectly elastic material of harmonic type // Common. Pure and Appl. Math. – 1960. – **13**, N 2. – P. 239 – 296.
36. *Nazarenko V.M.* Two-Dimensional Problem of the Fracture of Materials in Compression Along Surface Cracks // Sov. Appl. Mech. – 1986. – **22**, N 10. – P. 970 – 978.
37. *Winiarski B., Guz I.A.* Plane problem for layered composites with periodic array of interfacial cracks under compressive static loading // Int. J. of Fracture. – 2007. – **144**, N 2. – P. 113 – 119.
38. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction for transversely isotropic layered material under compressive loading // Finite Elem. in Analysis and Design. – 2008. – **44**, N 4. – P. 197 – 213.
39. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of fibre volume fraction on the onset of fracture in laminar materials with an array of coplanar interface cracks // Composite Sci. and Technology. – 2008. – **68**, N 12. – P. 2367 – 2375.
40. *Winiarski B., Guz I.A.* The effect of cracks interaction in orthotropic layered materials under compressive loading // The Phil. Trans. of the Royal Soc. A. – 2008. – **366**, N 1871. – P. 1835 – 1839.

Надійшла 14.12.2023 Затверджена до друку 11.06.2024