Б.П.Маслов

ПОБУДОВА КРИТЕРІЮ ДОВГОТРИВАЛОГО РУЙНУВАННЯ ВНАСЛІДОК ПОВЗУЧОСТІ ТОНКОСТІННИХ ШАРУВАТИХ СТРУКТУР*

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: maslov@inmech.kiev.ua

Abstract. A model and criterion of long-term creep-induced failure for thin-walled layered shells is constructed, taking into account the influence of the type of stress state. The problems of calculating the time to failure under combined loading are considered. The solutions are built based on the concept of equivalent stresses. The problem of determining the local stresses in unidirectional and layered composites of random structure is formulated within the framework of the second-order nonlinear theory. The parameters of the stress concentration on the boundary of the components are determined. The possibility of predicting the long-term strength of the material is shown. The long-term strength curves for individual components of the combined stresses are necessary information about the material for the formulation of failure criteria.

Key words: hereditary creep, failure, criterion, thin-wall layered composite, numerical methods.

Вступ.

Фундаментальними проблемами механіки довготривалого деформування та руйнування є моделювання процесу повзучості та побудова відповідних критеріїв для волокнистих та шаруватих композитних матеріалів при комбінованому навантаженні [1, 2. 6, 7]. Такі задачі вважаються набагато більш важливими стосовно композитів та елементів конструкцій з них аніж для суто полімерних чи металевих виробів [5]. Різниця полягає в тому, що в багатьох практично важливих випадках попередній напружений стан традиційних однорідних матеріалів може вважатися одновимірним. З іншого боку навіть для простіших композитних структур типу шаруватих, армованих односпрямленими волокнами, напруження в кожному шарі є локально тривимірними. Це призводить до необхідності формулювання критеріїв руйнування при повзучості під дією комбінованого навантаження. Перспективним напрямком є розв'язок задач розрахунку довговічності тонкостінних циліндричних оболонок за умов двовісного комбінованого навантаження на основі концепції еквівалентних напружень з використанням класичних критеріїв руйнування [1, 3, 6]. Руйнування, або ж відмова, надалі розуміється як визначена величина, що має бути встановленою на початковому етапі проектування конструкції. Як правило, структурна відмова визначається відповідними критеріями, як надмірні деформації, текучість, або розрив. Неприйнятні деформації можуть виникнути, коли матеріал конструкції є спадково повзучим. Для таких обставин параметри руйнування можуть бути прогнозовані моделюванням та визначенням змінних у часі напружень, деформацій та внутрішньої енергії методами механіки спадкових середовищ.

1. Постановка задачі.

Процес руйнування найчастіше розглядається окремо від проблеми визначення ефективних пружних властивостей матеріалів. Більшість критеріїв руйнування отри-

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

мані емпіричним шляхом на базі експериментів, пов'язаних із деформуванням або розривом зразка внаслідок повзучості. Для їх формулювання проводиться велика кількість випробувань і аналізів даних. З іншого боку, визначальні закони виводяться більш раціональними засобами моделювання напружено-деформованого стану. Тому є можливість зменшити кількість тестувань, якщо деформації не виходять за межі діапазону спадкової повзучості. Поняття енергії формозміни як міри критичної величини напруженого стану, який може витримати матеріал у точці пружного матеріалу (критерій Мізеса), не можна перенести безпосередньо на спадкові матеріали, оскільки в'язкопружна деформація включає дисипативні механізми. Таким чином, в будь-який момент часу баланс внутрішньої енергії $W(\sigma, t)$ має бути записаним як сума

$$W(\sigma, t) = W_s(\sigma, t) + W_d(\sigma, t), \tag{1}$$

де $W_s(\sigma, t)$ – збережена енергія; $W_d(\sigma, t)$ – розсіяна енергія.

1.1. Визначальні співвідношення спадкової повзучості. Для опису процесу повзучості композиту скористаємося нелінійною моделлю спадкового типу, побудованою на основі гіпотези подібності ізохронних діаграм повзучості та діаграми миттєвого деформування [8, 10]

$$\frac{d\mathbf{e}(t)}{dt} = [\mathbf{H}(t)]^{-1}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma} * \dot{g})(t) = [\mathbf{H}(t)]^{-1}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{\sigma} * dg)(t). \tag{2}$$

Тут $g(t)$ – нормована функція повзучості із дробово-експоненціальним ядром спадковості, що характеризує вплив напружень в момент $t_1 < t$ на величину деформації повзучості в момент t; крапка над символом означає похідну за часом. Величина $\mathbf{H}(t) = \dfrac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{e}\partial \mathbf{e}}(t)$ фактично являє собою лінеаризований дотичний модуль повзучості матеріалу [3], при цьому $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{e}) = \dfrac{\partial W}{\partial \mathbf{e}}(\mathbf{e})$ – рівняння діаграми миттєвого деформування. Задача полягає в прогнозуванні параметрів повзучості композиту в залежності від способу армування, властивостей і об'ємного вмісту його компонентів. Деформації в спадковому матеріалі визначаються історією напружень $\boldsymbol{\sigma}(t_1)$, $t_1 \in [0, t]$, а також початковими умовами $\mathbf{e}(t = 0) = \mathbf{0}$. Тоді для квазілінійного середовища в загальній тензорній формі після інтегрування (2) можна записати [10, 11]

$$\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \mathbf{g}(t - t_1)\frac{d}{dt_1}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_1)dt_1; \ \mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma}, t)}{\partial \boldsymbol{\sigma}}, \tag{3}$$

де $\mathbf{g}(t) = \mathbf{J}(t)/\mathbf{J}(0)$ – нормований тензор податливості (функція ретардації). Або в короткій символічній формі [8]

$$\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{g} * \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = (\boldsymbol{\sigma} * \dot{\mathbf{g}})(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \tag{4}$$

тут знаком $*$ позначена операція інтегральної згортки. Таким чином, вираз $(\boldsymbol{\sigma} * \dot{\mathbf{g}})(t) = (\boldsymbol{\sigma} * d\mathbf{g})(t)$ являє собою згортку Стільть'єса [12]. Тут і далі прийнято наступні правила символьного позначення операцій із тензорами другого і четвертого рангів. Діадні і внутрішні добутки позначаються як: $(\mathbf{ab})_{ij} = a_{im}b_{mj}$; $(\mathbf{Ab})_{ij} = A_{ijkl}b_{lk}$; $(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ijkl} = a_{ij}b_{kl}$, де передбачається підсумовування за індексами, які повторюються; тензорні величини позначено жирними символами. Сферичний $\mathbf{I}_m$ і девіаторний $\mathbf{I}_d$ оператори задані: $\mathbf{I}_m = \dfrac{1}{3}\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}$; $\mathbf{I}_d = \mathbf{I} - \mathbf{I}_m$; $(\mathbf{1})_{ij} = \delta_{ij}$, $\mathbf{I}$ – одиничний симетричний тензор четвертого рангу.

Якщо $f(t)$ є деякою неперервною функцією на інтервалі $0 \leqslant t < \infty$ і вона поводиться як експонента, коли $t \to \infty$, тоді перетворення функції Лапласа – Карсона (LC) має вигляд [3]

$$LC\{f(t)\} = f(s) = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt. \tag{5}$$

Застосовуючи LC-перетворення до (3) та (4), знайдемо $\mathbf{e}(s) = (\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma})(s) = \mathbf{S}^e(\mathbf{g}\boldsymbol{\sigma})(s)$. Тут передбачається, що миттєва пружна реакція матеріалу є фізично лінійною. Тобто, відбувається LC-перетворення $\mathbf{S}(s) = \mathbf{S}^e(\mathbf{g})(s)$ функції повзучості $\mathbf{S}^e\mathbf{g}(t)$. Надалі застосовується закон миттєвої деформації другого порядку деформацій [10]

$$\mathbf{e}(s) = (\mathbf{S}\boldsymbol{\sigma})(s) + (\underline{\mathbf{S}}(\tilde{\sigma})\boldsymbol{\sigma})(s), \tag{6}$$

де $(\underline{\mathbf{S}}(\tilde{\sigma})\boldsymbol{\sigma})(s)$ – деформації зміцнення (нелінійна функція еквівалентних напружень $\tilde{\sigma}(t)$ або $\tilde{\sigma}(s)$ в LC-області); $\mathbf{g}(t)$ – нормована функція повзучості.

У лінійній теорії в'язкопружності розв'язок задач можна отримати, використовуючи принцип відповідності [5, 12]. Природно узагальнити цей принцип на проблеми спадкової повзучості. Тут використовується квазілінійний варіант спадкових рівнянь повзучості [4, 8, 12], де введене поняття так званих модифікованих напружень $\boldsymbol{\sigma}^e(t) = \partial W / \partial \mathbf{e}(t)$ та модифікованих (відновлених пружних) деформацій $\mathbf{e}^e(t) = \partial W / \partial \boldsymbol{\sigma}(t)$. Функція $W(\mathbf{e})$ – пружна енергія; функція $W(\boldsymbol{\sigma})$ – додаткова пружна енергія. Для аналізу проблем прогнозування деформацій в рамках спадкової моделі повзучості (4), (6) використано узагальнений принцип відповідності Шепері [6, 11, 12]. Позначимо $\mathbf{x}$ – положення матеріальної точки в просторі; $\mathbf{e}(\mathbf{x},t)$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x},t)$ $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ – поточні деформації, напруження та переміщення, відповідно. Дотримуючись прийнятої гіпотези, ми припускаємо, що матеріал проявляє миттєву пружну реакцію і позначаємо $\mathbf{e}^e(\mathbf{x}, t)$, $\boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^e(\mathbf{x},t)$ миттєві пружні деформації, напруження та переміщення, відповідно. Матеріал, який виявляє пружні властивості, визначається як середовище, поведінка якого відповідає першому і другому законам термодинаміки [3, 6]. Звідси випливає існування функції накопиченої енергії $W(\mathbf{e})$ і додаткової енергії $W(\boldsymbol{\sigma})$, які дозволяють знайти миттєву деформацію (при повзучості) або миттєве напруження (процес релаксації).

1.2. Енергетичний критерій. Стандартна модель спадкової повзучості [5] не завжди є адекватною для моделювання поведінки конструктивних матеріалів у розширеному часовому масштабі. Тому використовуємо дробово-експоненціальну модель [8, 10]

$$e(t) = J_e\sigma(t) + \int_\infty^t J_i(1 - E_\mu(-\beta(t-t_1)))\frac{\partial\sigma(t_1)}{\partial t_1}dt_1. \tag{7}$$

Тут J_e, J_i – пружна та в'язка податливості; $E_\mu(-\beta t)$ – функція Міттаг – Лефлера; ξ, β, μ – параметри моделі спадкової повзучості. Розв'язок рівняння (6) для повзучості типу $\sigma(t) = \sigma H(t)$ визначається як

$$e(t) = J_e[1 + Y_\mu(t)]\sigma_0;\ Y_\mu(t) = j_i(1 - E_\mu(-\beta t));\ j_i = \frac{\xi}{\beta}. \tag{8}$$

Для цього випадку навантаження накопичену енергію в пружних елементах моделі та енергію, що розсіюється внаслідок спадкової повзучості, а також загальну енергію можна розрахувати відповідно до наступних виразів:

$$W(\sigma_0, t) = W_0[1 + 2Y_\mu(t)],\ W_0 = \sigma_0^2\frac{J_e}{2};$$

$$W_s(\sigma_0, t) = W_0[1 + j_i(1 - E_\mu(-\beta t))^2];\ W_d(\sigma_0, t) = W_0 Y_\mu(t). \quad (9)$$

Отже, внутрішні напруження $\sigma^i(t)$, накопичені внаслідок в'язкої деформації $e^i(t)$, визначаються як $\sigma^i(t) = \dfrac{e^i(t)}{J_i} = Y_\mu(t)\sigma_0$. Якщо прийняти постулат [5, 6], що при руйнуванні сума прикладених напружень σ_0 і накопичених внаслідок в'язкого деформування внутрішніх напружень σ_i залишається постійною, отримуємо співвідношення

$$\sigma^e + \sigma^i(t) = \sigma^0 = \sigma_\text{B}. \quad (10)$$

Тут σ_B – статична межа міцності. Для моделі типу (9) за достатнього часу $\sigma^i(t) \to \sigma_0$. Отже, відмови елементу внаслідок повзучості можна уникнути, якщо $2\sigma_0 < \sigma_\text{B}$. Якщо змінна часу t у виразі для енергії (8) прямує до нуля, ми отримуємо

$$\lim_{t\to 0} W(\sigma, t) = \frac{J_0}{2}\sigma_0^2. \quad (11)$$

Маючи на увазі (11) та застосовуючи статичну межу міцності σ_B, отримуємо вираз критичного значення енергії при деформуванні в умовах спадкової повзучості

$$W_R = \frac{J_0}{2}\sigma_\text{B}^2. \quad (12)$$

Руйнування логічно розглядати частиною повного конститутивного опису матеріалу. Іншими словами, довготривала міцність матеріалів в умовах повзучості пов'язана зі спадковими процесами та їх характеристиками. В енергетичних моделях довготривалого руйнування припускається, що здатність накопичувати енергію матеріалу зберігається до переходу від в'язкопружної реакції до пластичної текучості або до розриву (руйнування) крихких матеріалів. Якщо такого типу критерій застосувати до матеріалу з нульовою дисипацією (пружний матеріал), то він стає ідентичним закону руйнування Мізеса.

1.3. Критерій максимальних деформацій. Розглянемо також критерій максимальної деформації, який стверджує, що $e(t) \le e_\text{B}$, де e_B задається виразом $e_\text{B} = J_e\sigma_\text{B}$. З визначального співвідношення (8) для деформації повзучості, якщо час близький до нуля, отримуємо $\lim\limits_{t\to 0} e(t) = J_e\sigma_\text{B}$. Тому, важливо зауважити, що критерії максимальної деформації можна звести до простого співвідношення між прикладеним напруженням σ_0 і податливістю повзучості $J(t)$, з виразу (8), а саме

$$J(0)\sigma_B = J(t_R)\sigma_0;\ \frac{\sigma_\text{B}}{\sigma_0} = \frac{J(t_R)}{J(0)} = g(t_R). \quad (13)$$

Отже, критерій максимальної деформації стверджує, що нормована залежна від часу міцність $\sigma_f(t) = \sigma_0(t)/\sigma_\text{B}$ і нормована податливість повзучості $J(0)/J(t_R)$ є зворотними величинами. Для лінійно спадкового матеріалу при одновісному навантаженні маємо наступні вирази для накопиченої $W_s(\sigma, t)$ та розсіяної $W_d(\sigma, t)$ енергій [3, 6]:

$$W_s = \frac{1}{2}\sigma_0^2 J_e(1 + j_i) = \frac{1}{2E}\sigma_0^2(1 + j_i);\ W_d = \frac{1}{2}\sigma_0^2 J_i = \frac{1}{2E} j_i\sigma_0^2, \quad (14)$$

де E – модуль Юнга; ξ, β – параметри спадкової повзучості.

2. Основні рівняння спадкової механіки повзучості та руйнування анізотропних матеріалів.

Основоположне практичне значення має прогнозування наведених макроскопічних спадкових характеристик [2, 6, 8]. У цій роботі розглянемо трансверсально-ізотропний композитний матеріал з випадковою структурою в площині, перпендикулярній напрямку армування. В межах теорії спадкової повзучості малих деформацій визначальне співвідношення між деформаціями і напруженнями вважаємо фізично нелінійним відповідно до модельних уявлень [2, 5]. Тензор деформацій $\mathbf{e}(t)$ залежить від компонент тензора напружень $\boldsymbol{\sigma}(t)$ [3, 6]. Розглянемо матеріал із нелінійною матрицею, яка армована високомодульними ізотропними волокнами. Їх поведінка залишається лінійно пружною до моменту руйнування. Напрямок армування у кожному шарі задаємо вектором $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = (0, 0, 1)$. Застосуємо надалі також структурний тензор $\mathbf{a} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ та тензор поперечної ізотропії $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{1} - \mathbf{a}$. Для того, щоб відокремити напруження $\boldsymbol{\sigma}$ від тих, що виникають в поперечній площині ізотропії, використаємо адитивний розклад [3]

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_T + \boldsymbol{\sigma}_L, \tag{15}$$

де $\boldsymbol{\sigma}_T$ і $\boldsymbol{\sigma}_L$ являють собою поперечну та поздовжню компоненту, відповідно. Запишемо поперечну складову $\boldsymbol{\sigma}_T$ за допомогою тензора проектора $\boldsymbol{\theta}$ як

$$\boldsymbol{\sigma}_T = \boldsymbol{\theta}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{a} - \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{a}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{a}\,. \tag{16}$$

Тоді поздовжня складова $\boldsymbol{\sigma}_L$ випливає з рівняння (15). Можна переконатись, що компонента $\boldsymbol{\sigma}_T$ знаходиться в стані плоского напруженого стану. Тензор пружності $\mathbf{C}$ та обернений йому тензор податливості $\mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1}$ трансверсально-ізотропного односпрямованого композиту можна записати у вигляді [2, 7]

$$\mathbf{C} = \sum_{n=1}^{6} h_n \mathbf{H}^n;\ \mathbf{S} = \mathbf{C}^{-1} = \sum_{n=1}^{6} s_n \mathbf{H}^n. \tag{17}$$

Тут застосовано тензори $\mathbf{H}^n$ базису Хілла [4]

$$H^1_{ijkl} = \frac{1}{2}\theta_{ij}\theta_{kl};\ \ H^2_{ijkl} = \frac{1}{2}\theta_{ij}n_k n_l;\quad H^3_{ijkl} = \frac{1}{2}\theta_{kl}n_i n_j;$$

$$H^4_{ijkl} = n_i n_j n_k n_l;\ \ H^5_{ijkl} = \frac{1}{2}(\theta_{ik}\theta_{lj} + \theta_{il}\theta_{kj} - \theta_{ij}\theta_{kl}); \tag{18}$$

$$H^6_{ijkl} = \frac{1}{2}(\theta_{ik}n_l n_j + \theta_{il}n_k n_j + \theta_{jk}n_l n_i + \theta_{jl}n_k n_i).$$

Можна переконатись, що сума тензорів $\mathbf{H}^i$ утворює одиничний симетричний тензор четвертого рангу $\mathbf{I}$, а саме $\mathbf{I} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^4 + \mathbf{H}^5 + \mathbf{H}^6$. Пружні сталі h_n в обраному базисі зручно записати через параметри Хілла [3, 4], при цьому маємо на увазі їх зв'язок із технічними сталими композиту

$$h_1 = 2[2(1-\nu_T)/E_T - 4{\nu_L}^2/E_L]^{-1};\ \ h_2 = h_3 = 2k\nu_L;$$

$$h_4 = E_L + 4k{\nu_L}^2;\ \ \mu_T = G_T;\ \ \mu_L = G_L.$$

Коефіцієнт $\frac{1}{2}h_1$ являє собою модуль поперечного стиску або об'ємний модуль плоского деформування, коли відбувається поперечна дилатація без осьового видовження. Параметр h_4 відноситься до одновісного розтягу у напрямку армування, h_2

пов'язаний із поперечними деформаціями. Константи μ_T, μ_L являють собою поперечний та поздовжний модулі зсуву [4]. Параметри s_n розкладу тензора податливості $\mathbf{S}$ внаслідок виконання процедури обернення в обраному базисі мають вигляд [3]

$$s_1 = \frac{1+\nu_T}{E_T} = \frac{1}{2\mu_T};\ \ s_2 = -\frac{\nu_T}{E_T};\ \ s_3 = s_4 = \frac{\nu_T}{E_T} - \frac{\nu_L}{E_L};$$
$$s_5 = \frac{1}{\mu_L} - \frac{1}{\mu_T};\ \ s_6 = \frac{1}{E_T} + \frac{1+2\nu_L}{E_L} - \frac{1}{2\mu_L}. \tag{19}$$

Якщо вісь анізотропії спрямована в напрямку одиничного вектора $\mathbf{n}$, класична форма визначального рівняння, яке широко використовується в контексті армованих волокном матеріалів [4], є наступною:

$$\mathbf{e} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\sigma})}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\lambda}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + \hat{\alpha}\sigma_A)\mathbf{1} + (\hat{\alpha}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}) + \hat{\beta}\sigma_A)\mathbf{1}_A + \frac{1}{2\mu_T}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_L) + \frac{1}{2\mu_L}\boldsymbol{\sigma}_L;$$

$$2\hat{\lambda} = s_1 - \frac{1}{2\mu_T};\ \ \hat{\alpha} = s_2 - \hat{\lambda};\ \ \hat{\beta} = s_4 - \hat{\lambda} + 2\left(\hat{\alpha} + \frac{1}{4\mu_T} - \frac{1}{2\mu_L}\right).$$

Тут введено позначення

$$\mathbf{1}_A = \mathbf{n}\otimes\mathbf{n} = \delta_{i3}\delta_{j3};\ \ (\mathbf{1}_A)_{ij} = \delta_{i3}\delta_{j3};$$

$$\boldsymbol{\sigma}_L = (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n})\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n});\ \ (\boldsymbol{\sigma}_L)_{ij} = \sigma_{i3}\delta_{j3} + \delta_{i3}\sigma_{j3};$$

$$\boldsymbol{\sigma}_A = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n};\ \ (\boldsymbol{\sigma}_A)_{ij} = \delta_{i3}\sigma_{ij}\delta_{j3} = \sigma_{33};\ \ \mathbf{n} = [0,\,0,\,1] = \delta_{i3}.$$

3. Функція накопиченої енергії напружень та додаткова енергія.

Отже, макроскопічні напруження $\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \langle\boldsymbol{\sigma}\rangle$ та деформації $\overline{\mathbf{e}} = \langle\mathbf{e}\rangle$ трансверсально-ізотропного шару композиту пов'язані співвідношеннями, де використано основні пружні характеристики (17). Матрицю композиту вважаємо ізотропною та такою, що деформується нелінійно, виявляючи ефект зміцнення

$$e_{ij} = (S_{ij\alpha\beta} + \underline{S}^{ij\alpha\beta}(\tilde{\sigma}))\sigma_{\alpha\beta};\quad \underline{S}^{ij\alpha\beta}(\tilde{\sigma}) = \eta\tilde{\sigma}^n I^d_{ij\alpha\beta}. \tag{20}$$

Тут $\tilde{\sigma}$ – еквівалентні напруження; η, n – параметри миттєвого зміцнення [10]. Тобто, використовуємо інваріанти нелінійного ізотропного середовища

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{3J_2} = \left(\frac{3}{2}\sigma^d_{ij}\sigma^d_{ji}\right)^{\frac{1}{2}};\ \ \sigma_m = \frac{1}{3}\sigma_{ii}.$$

В анізотропному композитному матеріалі еквівалентні напруження $\tilde{\sigma}$ [2] виразимо через систему відповідних інваріантів [8] базису Хілла

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{3}{2}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{I}_H\cdot\boldsymbol{\sigma}) = \sum_{m=1}^{5}\beta_m T_m;\ h_1 = -\frac{1}{2};\ h_2 = -1;\ \ h_3 = 1;\ h_4 = \frac{3}{2};\ h_5 = 3;$$
$$T_1 = \sigma^2_{aa};\quad T_2 = \sigma_{aa}\sigma_{33};\quad T_3 = \sigma^2_{33};\quad T_4 = \sigma_{ab}\sigma_{ab};\quad T_5 = \sigma_{a3}\sigma_{3a},\quad (a,b = 1,2), \tag{21}$$

де ортотропний тензор $\mathbf{I}_H = \mathbf{H}$ критерію Хілла [4] у випадку ізотропного середовища переходить в одиницю Мізеса $\mathbf{I}_H = \mathbf{H} = \frac{3}{2}\mathbf{I}_d = \frac{3}{2}\left(\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\right);\ \tilde{\sigma}^2 = \sum_{n=1}^{6}h_n H^n.$

З цього випливає, що критерії руйнування повинні бути функціями трансверсально-ізотропних інваріантів тензора напружень і, отже, може бути застосованим метод, аналогічний використаному в [1, 7]. Тобто, має сенс використати структуру критерію миттєвого руйнування для волокнистого композиту [5]. Вважаємо, що вісь x_1 окремого ламінату спрямована у напрямку волокна і запишемо систему інваріантів Хашіна [7]

$$I_1 = \sigma_{11};\ I_2 = \sigma_{22} + \sigma_{33};\ I_3 = \sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} = \frac{1}{4}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + \sigma_{23}^2;$$
$$I_4 = \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2;\ I_5 = 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2. \tag{22}$$

Умову руйнування внаслідок повзучості представимо в узагальненій формі

$$F_f(I_1, I_4, t) = 1;\ \ F_m(I_2, I_3, I_4, I_5, t) = 1. \tag{23}$$

Використаємо надалі критерій, запропонований в роботі [7] для визначення руйнування матриці або волокон у композиті. Щодо матриці запишемо його у вигляді

$$\frac{(\sigma_{22} + \sigma_{33})^2}{\sigma_{TR}^2} + \frac{\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33}}{\tau_{TR}^2} + \frac{\sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2}{\tau_{LR}^2} = 1, \tag{24}$$

де $\sigma_{TR} = \sigma_T(t_R),\ \tau_{LR} = \tau_L(t_R),\ \tau_{TR} = \tau_T(t_R)$ є напруження відстроченого руйнування для $t = t_R$. Міцність σ_T, яка не залежить від часу, тут замінено відповідними характеристиками міцності на розрив та зсув внаслідок повзучості при $t = t_R$. Співвідношення $\sigma_T(t_R)$ являє собою функціональну залежність від часу міцності на розрив для одновісного навантаження, перпендикулярного напрямку волокна. $\tau(t_R)$ – аналогічне функціональне співвідношення для міцності при зсуві. Таким чином, тут використано експериментальні дані щодо довготривалої міцності для односпрямованих ламінатів. Для комбінованого навантаження типу довільного двовісного напруженого стану $[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]$ відповідний час руйнування може бути розрахований шляхом розв'язку рівняння (4). Кожне з (3), (4) розв'язується окремо і руйнування визначається критерієм, до якого призводить менший t_R. Ця процедура формує багатопараметричну умову руйнування трансверсально-ізотропного композиту.

Критерії довготривалого руйнування сформульовано з використанням поняття енергії формозміни [1, 6] як міри критичної величини напруженого стану (критерій Мізеса), що записана в трансверсально-ізотропному базисі типу Хілла.

4. Волокнисті композити. Локальні параметри повзучості.

Розглянемо миттєве нелінійно пружне деформування матриці, що описується співвідношеннями (1). Застосуємо рівняння сумісності деформацій [2]

$$\epsilon^{ikp}\epsilon^{jmq}e_{pq,km} = 0\,. \tag{25}$$

Тут ϵ^{ikp} – тензор Леві – Чівіти [3]. Функцію Гріна $G_{\alpha\beta rs}(\mathbf{x})$ рівнянь (25) знайдемо із наступної системи:

$$\epsilon^{ikp}\epsilon^{jmq}L_{pq\alpha\beta}G_{\alpha\beta rs,km}(\mathbf{x}) = -I_{ijrs}\delta(\mathbf{x});$$
$$G_{\alpha\beta rs,\alpha} = 0. \tag{26}$$

$L_{pq\alpha\beta}$ – сталий тензор податливості однорідного середовища порівняння [2, 8]. Одиничний тензор четвертого рангу I_{ijrs} розкладемо на потенційну та бивихрову частини [3, 13], тоді застосувавши перетворення Фур'є, отримаємо

$$k_k k_m \epsilon^{ikp} \epsilon^{jmq} L_{pq\alpha\beta} G_{\alpha\beta rs}(\mathbf{k}) = A_{kmpq\alpha\beta}(\mathbf{k}) G_{\alpha\beta rs}(\mathbf{k}) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(\delta_{ir} - \gamma_{ir})(\delta_{js} - \gamma_{js}) + (\delta_{jr} + \gamma_{jr})(\delta_{is} + \gamma_{is})\Big]; \quad \gamma_j = \frac{k_j}{k}; \quad k = |\mathbf{k}|. \tag{27}$$

Враховуючи, що для ізотропного середовища тензор $L_{ij\alpha\beta} = \langle S_{ij\alpha\beta} \rangle$ заданий формулами (20), отримаємо

$$\epsilon^{ikp} \epsilon^{jmq} L_{pq\alpha\beta} = a\delta_{\alpha\beta}(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{kj}\delta_{im}) + 2b\varepsilon_{ik\alpha}\varepsilon_{jm\beta}.$$

Отже, підставляючи (20) у (27), знайдемо після деяких перетворень Фур'є-образ тензорної функції Гріна $G_{ij\alpha\beta}$

$$G_{ijrs}(\mathbf{k}) = \frac{1}{4(b)k^2}\left[\frac{a+2b}{a+b}(\delta_{ij} - \gamma_{ij})(\delta_{rs} - \gamma_{rs}) - (\delta_{ir} - \gamma_{ir})(\delta_{js} - \gamma_{js}) - (\delta_{jr} - \gamma_{jr})(\delta_{is} - \gamma_{is})\right];$$

$$a = -\frac{\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}}{4\hat{\mu}(\hat{\lambda} + \hat{\mu})}; \quad b = \frac{1}{4\hat{\mu}}.$$

Розв'язок рівнянь (26) представимо в формі інтегральної згортки

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \bar{\sigma}_{ij} = \int G_{ijrs,mk}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \epsilon^{rkp} \epsilon^{smq} f_{pq}(\mathbf{y}) dV_y + \oint G_{ijrs,m}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \epsilon^{rkp} \epsilon^{smq} N_k f_{pq}(\mathbf{y}) dS_y$$

або

$$\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \Pi_{ij\alpha\beta} * f_{\alpha\beta}; \; f_{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha kp} \epsilon^{\beta mq} \Big[\delta S_{pq\alpha\beta}\sigma_{rs} + \underline{S}^{ij\alpha\beta}(\tilde{\sigma})\sigma_{rs}\Big]. \tag{28}$$

Використовуємо надалі метод еквівалентного середнього поля компонентів [2, 8]. Усереднимо рівняння (28) при умові, що координата-аргумент лівої частини рівняння знаходиться в об'ємі V_1, зайнятому волокнами

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle^{(1)} = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + \sum_{i=1}^{2} \boldsymbol{\Pi} * \langle f \mid i, 1 \rangle p_{1i}.$$

Тут p_{1i} – умовні ймовірності переходу з 1 в i-компонент; $\langle f \mid i, 1 \rangle$ – умовні моментні функції вигляду $\langle f \mid i, 1 \rangle = \langle f(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in V_i, \mathbf{x} \in V_1 \rangle$. В наближенні однорідності напруженого стану в матриці та волокнах, тобто $\langle f \mid i, 1 \rangle = \langle f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in V_i \rangle$, знаходимо

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \mid 1 \rangle = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle + c_2 \mathbf{P} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \langle \mathbf{f} \mid i \rangle,$$

де $\langle \mathbf{f} \mid i \rangle = \epsilon \otimes \epsilon \big[\delta \mathbf{S} \langle \boldsymbol{\sigma} \mid i \rangle + \underline{\mathbf{S}} \langle \boldsymbol{\sigma} \mid i \rangle\big]^{(i)}$.

Відокремимо в рівнянні (28) лінійну та нелінійну частини, щоб можна було використати метод послідовних наближень [10]

$$(\mathbf{I} - \mathbf{PF}) \langle \sigma \mid 1 \rangle = (\mathbf{I} - \mathbf{PH}) \langle \sigma \rangle + c_2 \mathbf{P} \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} \underline{\mathbf{S}}^{(i)} \langle \sigma \mid i \rangle. \tag{29}$$

Тут

$$\mathbf{F} = c_1 \mathbf{S}^{(2)} + c_2 \mathbf{S}^{(1)} - \mathbf{L}; \quad \mathbf{H} = \mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{L}; \quad P_{ijpq} = \int G_{ijrs,km}(x) \epsilon^{rkp} \epsilon^{smq} f(x) dV,$$

$f(\mathbf{x})$ – кореляційна функція композитного середовища.

Домножимо рівняння (29) на тензор $\left(\mathbf{I}-\mathbf{PF}\right)^{-1}$, в результаті отримуємо

$$\left\langle \boldsymbol{\sigma}\,|\,1\right\rangle =\left(\mathbf{I}+c_2\mathbf{Q}S^{(f)}\right)\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle +c_2\mathbf{Q}\sum_{i=1}^{2}\left(-1\right)^{i+1}\underline{\mathbf{S}}^{(i)}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\,|\,i\right\rangle ;\quad \mathbf{Q}=\left(\mathbf{I}-\mathbf{PF}\right)^{-1}\mathbf{P}.$$

Усереднимо визначальне рівняння (20) при умові, що напружений стан волокон та матриці є однорідним. Тоді, враховуючи (29), будемо мати

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{e}\right\rangle &=\mathbf{S}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle +c_1c_2\mathbf{S}^{(f)}\mathbf{Q}\sum_{i=1}^{2}\left(-1\right)^{i+1}\underline{\mathbf{S}}^{(i)}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\,|\,i\right\rangle +\sum_{i=1}^{2}c_i\underline{\mathbf{S}}^{(i)}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\,|\,i\right\rangle =\\ &=\mathbf{J}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle +\sum_{i=1}^{2}c_i(\mathbf{B}_{(1)}^{T}\underline{\mathbf{S}})^{(i)}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\,|\,i\right\rangle ,\end{aligned}\tag{30}$$

де

$$\mathbf{B}_{(1)}^{(i)}=\mathbf{I}+\left(-1\right)^{i+1}\left(1-c_i\right)\mathbf{QS}^{(f)};\quad \mathbf{B}_{(1)}^{T(i)}=\mathbf{I}+\left(-1\right)^{i+1}\left(1-c_i\right)\mathbf{S}^{(f)}\mathbf{Q}\,.$$

Якщо використати представлення

$$2J_2^{(i)}=2J_2\left(\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle^{(i)}\right)=\left(\left\langle \sigma_{pq}\right\rangle\left\langle \sigma_{qp}\right\rangle-\frac{1}{3}\left\langle \sigma_{pp}\right\rangle^2\right)^{(i)}=\sum_{m=1}^{5}(\alpha_mT_m)^{(i)};$$

$$T_1=\left\langle \sigma_{aa}\right\rangle^2;\ T_2=\left\langle \sigma_{aa}\right\rangle\left\langle \sigma_{33}\right\rangle;\quad T_3=\left\langle \sigma_{33}\right\rangle^2;\ T_4=\left\langle \sigma_{ab}\right\rangle\left\langle \sigma_{ab}\right\rangle;$$

$$T_5=\left\langle \sigma_{a3}\right\rangle\left\langle \sigma_{3a}\right\rangle,\quad \left(a,\,b=1,\,2\right);\quad \left(p,\,q=1,\,2,\,3\right),$$

то з (19) отримуємо наступний вираз

$$\left\langle \mathbf{e}\right\rangle =\mathbf{S}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle +\sum_{i=1}^{2}c_i\left(\sum_{m=1}^{5}(\alpha_mT_m)^{(i)}\right)^{\frac{N-1}{2}}(\mathbf{B}_{(1)}^{T}\underline{\mathbf{S}}\mathbf{B}_{(n)})^{(i)}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle .\tag{31}$$

Тензор $B_{(n)}^{(i)}$ знаходимо в результаті ітераційного процесу, який можна задати такою формулою

$$\mathbf{B}_{(n+1)}^{(i)}=\mathbf{B}_{(1)}^{(i)}+\left(-1\right)^{i+1}\left(1-c_i\right)\sum_{v=1}^{2}\left(-1\right)^{v+1}(\underline{\mathbf{S}}\mathbf{B}_{(n)})^{(v)}.\tag{32}$$

Якщо нелінійні властивості має тільки матриця, що, як правило, спостерігається в реальних композитах, то отримані формули можна спростити

$$\begin{aligned}\left\langle \mathbf{e}\right\rangle &=\mathbf{S}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle +c_2\left(\sum_{m=1}^{5}\alpha_{m(n)}^{(2)}\right)T_m^{\frac{N-1}{2}}(\mathbf{B}_{(1)}^{T}\underline{\mathbf{S}}\mathbf{B}_{(n)})^{(2)}\left\langle \boldsymbol{\sigma}\right\rangle ;\\ \mathbf{B}_{(n+1)}^{(2)}&=(\mathbf{B}_{(1)}+c_1\underline{\mathbf{S}}\mathbf{B}_{(n)})^{(2)}.\end{aligned}\tag{33}$$

У цій роботі розглядається дещо ідеалізована модель, передбачається відсутність дефектів у компонентах та на межі між ними [6]. Статистичними характеристиками напруженого стану двокомпонентного композиту є значення середніх по компонентам напружень. Експериментальні дослідження показують, що руйнація композиту,

як правило, починається з руйнування одного з компонентів [6, 7], тому з метою оцінки характеристик міцності матеріалу вводимо коефіцієнти концентрації напружень в компонентах, які визначаються рівністю

$$K_{\sigma}^{(i)} = \left[\frac{\left(\left\langle \sigma_{pq}^{d} \right\rangle \left\langle \sigma_{qp}^{d} \right\rangle \right)^{(i)}}{\left\langle \sigma_{pq}^{d} \right\rangle \left\langle \sigma_{qp}^{d} \right\rangle} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{34}$$

З формул (33), (34) випливає, що при дії одновимірних макроскопічних навантажень коефіцієнти концентрації напружень в компонентах можна представити формулами

$$K_{\sigma_{33}}^{(i)} = \left| n_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{(i)} \right|; \quad K_{\sigma_{11}}^{(i)} = \left[\left(l_{B(n)}^{(i)} - k_{B(n)}^{(i)} \right)^2 + 3 m_{B(n)}^{(i)2} \right]^{\frac{1}{2}};$$

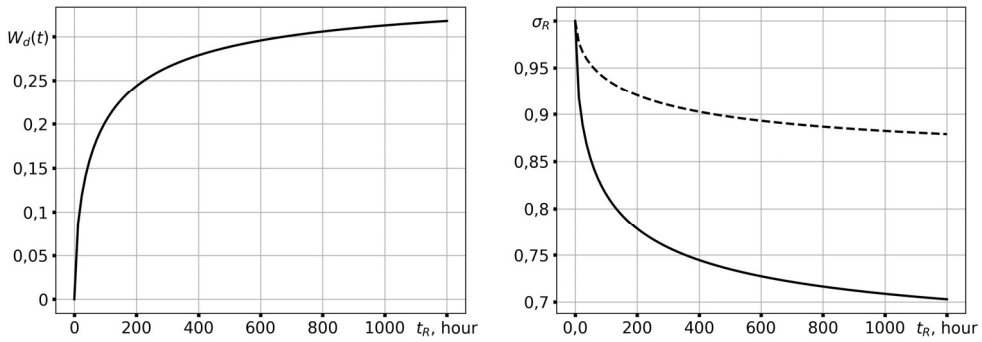
$$K_{\sigma_{12}}^{(i)} = 2 \left| p_{B(n)}^{(i)} \right|; \quad K_{\sigma_{12}}^{(i)} = 2 \left| m_{B(n)}^{(i)} \right|. \tag{35}$$

Для прикладу розглянемо спадкову повзучість композиту, утвореного з алюмінієвої матриці типу Al 2024 S [6], що армована орієнтованими високомодульними односпрямленими волокнами. Пружні характеристики компонентів наведено в [8]. Для прогнозування довготривалої міцності беремо до уваги спадкові властивості алюмінієвої матриці. Реологічні параметри дробово-експоненціального ядра отримано ідентифікацією експериментальних даних з [5] та наведено в таблиці.

Таблиця

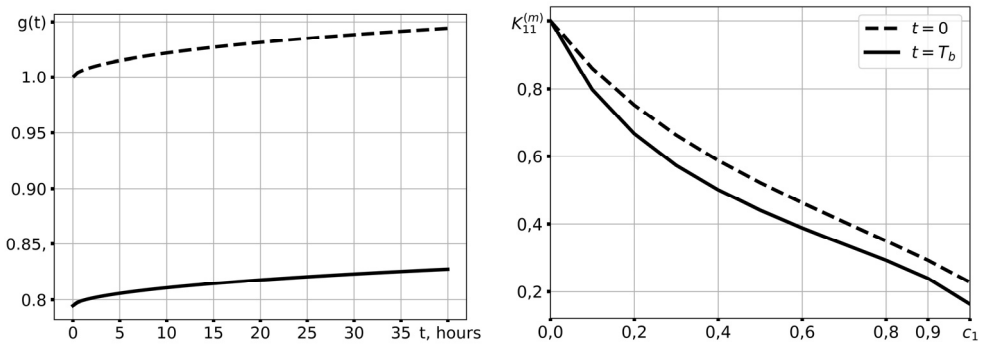
Матеріал	Параметри ядра			
	ξ	μ	β	Джерело
Al 2024S	0,054	0,5918	0,0298	[8]

Надалі для комп'ютерного моделювання використовувалися чисельні алгоритми в середовищі Fortran 95 та метод скінченних елементів стосовно багатошарового ламінату [13]. Результати розрахунків наведено на рис. 1 – 3. На рис. 1 зображено порівняльні графіки залежності накопиченої енергії формозміни $W_s(\sigma, t)$ (a) та критичного напруження $\sigma_R(t)$ від часу t *(б)*.



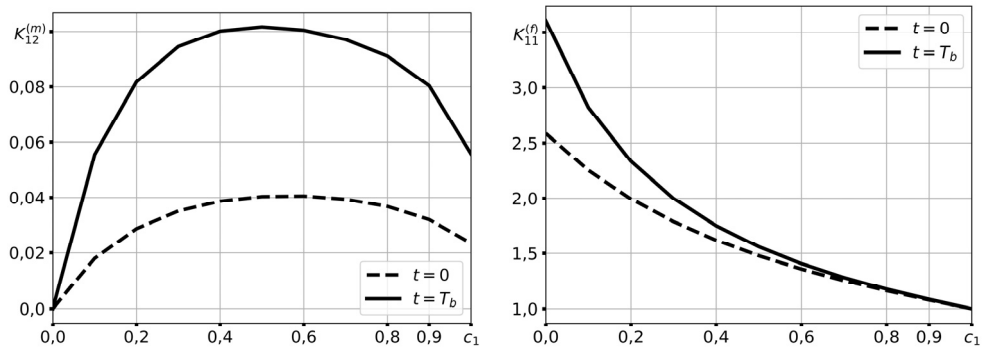
а *б*

Рис. 1



а *б*

Рис. 2



а *б*

Рис. 3

На рис. 2 наведено результати порівняння поперечної функції повзучості матриці композиту (штрихова лінія) та композиту (суцільна) (*а*) та залежність концентрації напружень σ_{11} в матриці і в армованій матриці від часу (*б*).

Порівняльні графіки залежності концентрації напружень зсуву σ_{l2} в матриці і в армованій матриці від коефіцієнту армування (*а*) та критичного напруження у волокнах $\sigma_{11}(c_1)$ від коефіцієнту армування *(б)* зображено на рис. 3.

Повний тривимірний стан напружень реалізується переважно біля отворів у ламінаті та на краях ламінату. Це складні випадки, які вимагають аналізу чисельними методами [8, 13]. На основі отриманих результатів розподілу напружень застосовано критерій руйнування внаслідок повзучості типу (3), (4) для трансверсально-ізотропного композитного матеріалу. Проведені чисельні розрахунки показують важливість впливу спадкових властивостей на перерозподіл напружень біля волокон. Якщо навантаження проводиться під кутом до осі армування, то необхідно застосувати перетворення повороту системи координат в площині ламінату [2]. Подальший аналіз доцільно розвинути на задачі прогнозування довготривалої міцності матеріалу внаслідок повзучості та розвитку пошкодженості структури [1, 7, 9].

Висновок.

Прогнозування довготривалого руйнування пов’язане зі значними труднощами у порівнянні з випадком крихкої поведінки матеріалу. Фундаментальні визначальні рівняння для напружень, деформації та методи їх аналізу базуються на постулатах механіки суцільного середовища, яка припускає, що матеріал є суцільним до нескінченно малих розмірів. Звичайно, це не відповідає дійсності для будь-якого реального конструктивного матеріалу, в тому числі композитного. Тому потрібен варіант моделі кон-

тинууму із залежними від часу параметрами. Видається перспективним застосування спадкової теорії повзучості із можливістю використання відомих раніше класичних підходів [1, 7] до побудови критеріїв руйнування та їх узагальнення на задачі прогнозування залежних від часу відмов внаслідок повзучості.

Розповсюджена структура типу композитний ламінат містить однонаправлено армовані шари, що знаходяться у комбінованому напруженому стані. Перспективною є задача побудови критеріїв довготривалого руйнування внаслідок повзучості за умов складного напруженого стану [8, 9], формулювання системи базових експериментів для визначення матеріальних констант та чисельно-експериментальна апробація критеріїв на задачах розрахунку часу до руйнування тонкостінних композитних елементів конструкцій.

РЕЗЮМЕ. Побудовано модель та критерій довготривалого руйнування внаслідок повзучості для тонкостінних шаруватих оболонок із врахуванням впливу виду напруженого стану. Розглянуто задачі розрахунку часу до руйнування при комбінованому навантаженні. Розв'язки будуються на основі концепції еквівалентних напружень. Сформульовано в рамках нелінійної теорії другого порядку задачу визначення локальних напружень у односпрямлених та шаруватих композитах випадкової структури. Отримано розв'язок стохастичної крайової задачі про визначення концентрації напружень в односпрямованому композиті з металевою матрицею. Для отримання повної системи рівнянь другого порядку використано метод послідовних наближень. Визначено параметри концентрації напружень на границі компонентів. Наведені приклади показують важливість впливу нелінійних властивостей на перерозподіл напружень біля волокон. Показано можливість прогнозування довготривалої міцності матеріалу. Необхідною інформацією про матеріал для формулювання критеріїв руйнування є криві довготривалої міцності для окремих компонентів комбінованих напружень.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: спадкова повзучість, руйнування, критерій, волокнистий композит, чисельні методи.

1. *Голуб В.П.* Классические критерии разрушения в решении задач усталости при двухосном комбинированном нагружении // Вісник НТУУ «КПІ», «Машинобудування». – 2014. – № 72. – С. 109 – 117.
2. *Механика композитов* (под общей ред. Гузя А.Н.): в12-и томах. Т. 3. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Шикула Е.Н. и др.* Статистическая механика и эффективные свойства материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 390 с.
3. *Asaro R.J., Lubarda V.A.* Mechanics of Solids and Materials. – Cambridge: UP, 2006. – 880 p.
4. *Balbi V., Shearer T., Parnell W.J.* A modified formulation of quasi-linear viscoelasticity for transversely isotropic materials under finite deformation // Proc. R. Soc. London. – 2018. – **A 474**. **–** 20180231.
5. *Brinson H.F., Brinson L.C.* Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction. – New York: Springer, 2015. – 482 p.
6. *Christensen R.M.* The Theory of Materials Failure. – Oxford: University Press, 2013. – 292 p.
7. *Hashin Z.* Fatigue Failure Criteria for Unidirectional Fiber Composites // Transactions of the ASME. – 1981. – **48**, N 12. – P. 846 – 852.
8. *Maslov B.* Nonlinear Hereditary Creep of Transversely Isotropic Composites of Random Structure. In: *Guz A.N., Altenbach H., Bogdanov V., Nazarenko V.M.* (eds.) Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials, vol. 191. – Cham: Springer, 2023. – P. 367 – 390.
9. *Maslov B.P.* Thermal-stress concentration near inclusions in viscoelastic random composites // J. Engng. Mathem. – 2008. – N 61. – P. 339 – 355.
10. *Maslov B.P.* Nonlinear Hereditary Creep of Isotropic Composites of Random Structure // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58,** N 1. – P 75 – 90.
11. *Schapery R.A.* Correspondence principles and a generalized integral for large deformation and fracture analysis of viscoelastic media // Int. J. of Fract. – 1984. – **25**, N 3. – P. 195 – 223.
12. *Rajagopal K.R., Wineman A.S.* A quasi-correspondence principle for Quasi-Linear viscoelastic solids // Mech. Time-Depend Mater. – 2008. – **12**, N 1. – P. 1–14.
13. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z.* The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals Sixth edition. – Burlington: Elsevier, 2005. – 802 p.

Надійшла 31.10.2023 Затверджена до друку 11.06.2024