С.Ю.Бабич[1], Н.О.Ярецька[2]

ЗМІШАНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИХ ДВОХ СПІВВІСНИХ ЦИЛІНДРІВ ТА ШАРУ*

[1] Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАНУ,
вул. П. Нестерова, 3, 03057, Київ-57, Україна;
e-mail: desc@inmech.kiev.ua
[2]Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11, 29016, Хмельницький, Україна;
e-mail: yaretskano@khmnu.edu.ua, massacran2@ukr.net

Abstract. The study is carried out in a general form for the theory of large (finite) initial deformations and two variants of the theory of small initial deformations within the framework of the linearized theory of elasticity with an arbitrary structure of the elastic potential. In the case of an equal root of the characteristic equation, the mixed contact problem is solved for prestressed two elastic coaxial finite cylinders and layer without taking into account frictional forces. To solve the problem, the fundamental results such as Hankel transform, pair integral equations, and other methods of the theory of contact problems of the linearized theory of elasticity were used.

Key words: the linearized theory of elasticity, initial (residual) stresses, contact problem, cylindrical punch, layer.

Вступ.

Вивчення впливу початкових напружень на передачу навантаження при контактній взаємодії пружних тіл є актуальною проблемою для фундаментальних та практичних досліджень з механіки деформованого твердого тіла у різних галузях промислового комплексу. Особливо це стосується розрахунків важливих характеристик для градирень, водонапірних веж, димових труб та інших висотних споруд, а також розрахунку важких фундаментних плит і будівельних перекриттів, що знаходяться в межах дії гравітаційних сил**.** Тому одним із важливих факторів дослідження передачі навантаження між пружними тілами, що контактують, є вивчення впливу початкових напружень. Початкові (залишкові, технологічні) напруження практично завжди присутні в реальних конструкціях, тому розробка ефективних методів розрахунку напружено-деформованого стану з їх врахуванням є безсумнівно важливою науково-технічною проблемою.

У багатьох працях навчального, монографічного та наукового характеру [4, 19], включно із публікаціями у періодичних виданнях [19, 22], досить детально вивчені питання, які стосуються передачі навантаження у пружних, пластичних та в'язкопружних тілах без дії на них початкових напружень. Кількість таких публікацій доволі велика. Але практичні запити сьогодення висувають ряд інженерно-технічних задач, які потребують використання некласичних моделей, що значно ускладнюють

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

постановку та їх розв'язок з математичної точки зору. До таких моделей належать моделі, які враховують властивості, що пов'язані з мікромеханікою фрикційної взаємодії, а саме: поверхневими властивостями матеріалу, жорсткістю поверхні, зносостійкістю поверхні тіл, тепловиділенням, тертям та, особливо, врахуванням початкових напружень [9 – 11, 13, 14, 20, 21, 23]. Постановка та розв'язок таких задач, враховуючи їх актуальність та складність розв'язання, все ще вимагають до себе уваги наукової спільноти.

Дії, які сприяють виникненню початкових (залишкових, технологічних) напружень, – це виробничі процеси виготовлення матеріалів, складання конструкцій, геостатичні та геодинамічні сили земної кори, технологічні операції, деформація мерзлих ґрунтів, процеси у кровоносних судинах живих істот та зняття навантаження у пластичних тілах.

У процесі роботи в елементах конструкцій доречно навмисно іноді створювати початкові напруження. Це дає змогу компенсувати контактні напруження, що виникають, та підвищити міцність конструкцій і матеріалів з яких вони виготовлені. Також відзначимо, що початкові напруження виникають як залишкові внаслідок процедури виготовлення або попередньої технологічної обробки.

Впровадження у виробничий процес нових штучних матеріалів, що здатні витримувати достатньо великі початкові деформації, призвело до особливого зацікавлення дослідженнями контактної взаємодії попередньо напружених тіл. Проблема контактних задач із врахуванням початкових напружень виникла в цілому ряді фундаментальних та прикладних наукових напрямках, таких як: механіка матеріалів та елементів конструкцій, неруйнівні методи визначення навантажень, механіка композитів, сейсмологія, механіка гірських порід, геофізика, біомеханіка [13] тощо. Отже, необхідність дослідження впливу початкових напружень на передачу навантаження тіл, що піддаються контакту, є важливим аспектом вивчення вказаних проблем.

Для розв'язку контактних задач, що враховують наявність початкових напружень, історично склалися два підходи, що розвивалися паралельно. Першим підходом був розв'язок контактних задач для тіл з пружними потенціалами конкретної структури, а другим підходом було дослідження задач для пружних тіл з початковими напруженнями при довільній структурі пружного потенціалу.

До першого напрямку належать наукові праці зарубіжних вчених, таких як: Курашіге [21], Александров, Арутюнян [8], а також Далівал, Сінх, Рокне [12] та інші.

Другий напрямок отримав свій розвиток за рахунок фундаментальних досліджень українського вченого, академіка НАН України професора Гузя О.М [5, 6, 14 – 19]. Він вперше розв'язав ряд контактних задач для стисливих і нестисливих тіл, на думку авторів, одним із найбільш ефективних підходів для матеріалів з однорідними початковими напруженнями та довільною формою пружного потенціалу. Даний метод розв'язку оснований на теорії потенціалу для просторових контактних задач та теорії функції комплексної змінної для плоских задач. Подальшого розвитку другий напрямок розв'язку контактних задач для тіл з початковими напруженнями отримав у працях його послідовників: Рудницького, Григоренка, Назаренка, Глухова, Рамського, Діхтярука, Матняка, Примаченко та, зокрема, авторів даної статті.

Серед великої кількості праць навчального та монографічного характеру, оглядових статей та інших публікацій у закордонних та вітчизняних виданнях перерахованих вище українських авторів слід відзначити роботи [1, 5 – 7, 9, 10, 14, 18, 19, 24].

У даній статті дослідження виконано у межах другого підходу, оскільки, на думку авторів статті, його перевага полягає у тому, що він дозволяє розв'язати поставлену контактну задачу в єдиній загальній формі для стисливих (нестисливих) попередньо напружених тіл при довільній структурі пружного потенціалу. А для першого підходу одна і та сама задача (для попередньо напружених тіл) розглядається різними авторами для різних потенціалів конкретного типу.

Враховуючи вище сказане, в роботі запропоновано розв'язок змішаної контактної задачі для попередньо напружених двох співвісних циліндрів та шару з початковими напруженнями.

Задача розглянута у загальному вигляді для стисливих (нестисливих) тіл для теорії великих (кінцевих) початкових деформацій та двох варіантів теорії малих початкових деформацій при довільній структурі пружного потенціалу без врахування сил тертя з використанням співвідношень лінеаризованої теорії пружності [5, 6, 24] для випадку рівних коренів характеристичного рівняння [6, 24].

Відзначимо, що усі величини, які відносяться до пружних циліндричних співвісних штампів, позначаються верхніми індексами «(1)» та «(2)», а шару – без відповідного індексу. Також зробимо припущення, що початкові напружено-деформовані стани у штампах та шарі однакові.

У класичному випадку (при відсутності початкових напружень) подібна контактна задача була розглянута у [4], а у випадку ідентичних циліндрів, що тиснуть на шар з початковими напруженнями – в [7]. В роботі [2] наведено розв'язок контактної задачі про взаємодію параболічного штампа із попередньо напруженим шаром, де система парних інтегральних рівнянь (що при цьому отримується) розв'язується за допомогою подання шуканих функцій напружень у вигляді відрізку ряду за функціями Бесселя з невідомими коефіцієнтами та подальшим отриманням скінченних систем лінійних алгебраїчних рівнянь для їх знаходження. А контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром розглянута в статті [3].

§1. Постановка задачі та основні співвідношення.

Розглянемо пружний нескінченний попередньо-напружений шар, у який втискаються два скінченних співвісних пружних циліндричних штампи з початковими напруженнями (рис. 1). Припустимо, що пружні тіла виготовлені з різних стисливих або нестисливих ізотропних матеріалів з потенціалом довільної структури. Причому коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга для «верхнього» та «нижнього» штампів позначимо ν^i, E^i $(i=1,2)$, відповідно, а для шару – ν, E. Товщину шару після виникнення в ньому початкового напруженого стану позначимо через $h=\lambda_3\tilde{h}$, де $\tilde{h}$ – товщина шару у природному стані; R^i, $H^i(i=1,2)$ – радіуси та висоти пружних штампів, відповідно. Будемо вважати, що зовнішні осесиметричні навантаження прикладені тільки

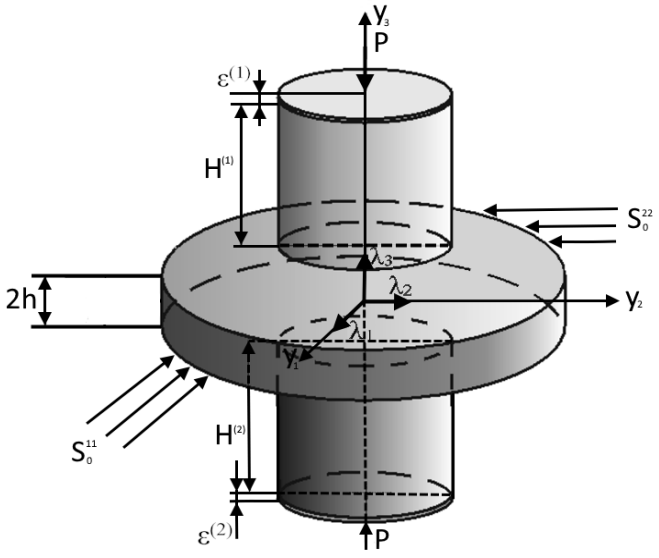


Рис. 1

до вільних торців пружних штампів так, що їх точки зміщуються в напрямку осі Oy_3 на сталі величини $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}$ відносно площини $y_3 = 0$, а поверхні поза ділянкою контакту залишаються вільними від впливу зовнішнього навантаження, дія сил тертя в зоні контакту відсутня.

Дослідження виконано в координатах початкового деформованого стану Oy_i $(i = 1,2,3)$, що пов'язані з лагранжевими координатами: $y_i = \lambda_i x_i \, (i = 1,2,3)$, де λ_i – коефіцієнти видовження, що визначають переміщення початкового стану.

Прийнято, що пружні потенціали – двічі неперервно-диференційовані функції алгебраїчних інваріантів тензора деформації Гріна [5]. Крім того, дія штампа викликає у півпросторі мале збурення основного напружено-деформованого стану.

Також, у даному дослідженні будемо розглядати три стани тіл з початковими напруженнями: 1) природний, коли у тілах відсутні напруження; 2) початковий стан та 3) збурений стан, всі величини якого складаються із суми відповідних величин початкового стану та збурень. Відзначимо, що збурення при цьому є набагато меншими відповідних величин початкового стану [5].

Скажімо, що початкові стани штампів та шару – однорідні й для них виконуються співвідношення [5, 22]:

$$y_m = x_m + U_m^0; \quad U_m^0 = \delta_{mi}(\lambda_m - 1)\lambda_i^{-1} y_i \quad (i, m = \overline{1,3}),$$

де δ_{mi} – символ Кронекера.

Тоді основне рівняння у переміщеннях [5, 14] для стисливих тіл має вигляд

$$L'_{m\alpha} U_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \omega'_{ij\alpha\beta} \, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta \quad (i,\ m,\ \alpha,\ \beta\ = \overline{1,3}), \tag{1.1}$$

а для нестисливих тіл має виконуватися умова нестисливості:

$$\begin{gathered} L'_{m\alpha} U_\alpha + q'_{\alpha m} \, \partial p' / \partial y_\alpha = 0; \quad L'_{m\alpha} = \kappa'_{im\alpha\beta} \, \partial^2 / \partial y_i \partial y_\beta; \\ q'_{ij} \, \partial U_j / \partial y_i = 0; \quad q'_{ij} = \lambda_i q_{ij} \quad (i, j, m, \alpha, \beta\ = \overline{1,3}), \end{gathered} \tag{1.2}$$

де $q^{ij} = \delta_{ij} + \partial U_j^0 / \partial x_i \quad (i, j = \overline{1,3})$ – для нестисливого ізотропного тіла для першого варіанта теорії малих початкових деформацій та $q^{ij} = \delta_{ij} \quad (i, j = \overline{1,3})$ – для нестисливого ізотропного тіла для другого варіанта теорії малих початкових деформацій, p' – скалярна функція, що пов'язана із гідростатичним тиском у деформованому початковому стані.

Вирази для компонент тензора напружень для стисливих і нестисливих тіл при $y_i = \text{const}$ $(i = 1,\ 2,\ 3)$ матимуть вигляд

$$Q'_{ij} = \begin{cases} \omega'_{ij\alpha\beta} \dfrac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} - \text{для стисливих тіл;} & \omega'_{ij\alpha\beta} = \dfrac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \omega_{ij\alpha\beta}; \\ \kappa'_{ij\alpha\beta} \dfrac{\partial U_\alpha}{\partial y_\beta} + q'_{ij}\, p - \text{для нестисливих тіл;} & \kappa'_{ij\alpha\beta} = \dfrac{\lambda_i \lambda_\beta}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \kappa_{ij\alpha\beta}, \end{cases}$$

де $\omega'_{im\alpha\beta} = \omega'_{im\alpha\beta}(S_0^{11}, S_0^{22}, S_0^{33})$, $\kappa'_{im\alpha\beta} = \kappa'_{im\alpha\beta}(S_0^{11}, S_0^{22}, S_0^{33})$, $\omega_{im\alpha\beta} = \omega_{im\alpha\beta}(S_0^{11}, S_0^{22}, S_0^{33})$, $\kappa_{im\alpha\beta} = \kappa_{im\alpha\beta}(S_0^{11}, S_0^{22}, S_0^{33})$ – складові тензора модулів пружності четвертого порядку у деформованому початковому та природному (недеформованому) станах, відповідно; S_0^{11}, S_0^{22} – компоненти симетричного тензора початкових напружень, p – скалярна функція, що пов'язана із гідростатичним тиском у природному (недеформованому) стані.

При однорідних початкових напруженнях має місце умова:

$$S_0^{11} = S_0^{22} \neq 0; \quad S_0^{33} = 0; \quad \lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3. \tag{1.3}$$

Враховуючи (1.3), розв'язок рівнянь (1.1), (1.2) представимо через функцію $\tilde{\chi}$, яка у циліндричних координатах (r, θ, y_3) задовольняє рівнянням

$$\tilde{\chi} = \tilde{\chi}_1 + y_3\tilde{\chi}_2, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2'^2\,\partial^2/\partial y_3^2\right)\tilde{\chi}_1 = 0, \quad \left(\Delta_1 + \xi_2'^2\,\partial^2/\partial y_3^2\right)\tilde{\chi}_2 = 0, \tag{1.4}$$

де $\Delta_1 = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\,\partial/\partial r$.

Як було зазначено вище, у даній статті обмежимося випадком рівних коренів $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$ характеристичного рівняння, що відповідає рівнянням (1.4).

У системі колових циліндричних координат (r, θ, z_i), де $z_i = v_i^{-1} y_3$; $v_i = \sqrt{n_i}$ $(i = 1, 2)$; $n_1 = \xi_2'^2$; $n_2 = \xi_3'^2$ такій постановці відповідають граничні умови:

1. На торцях пружних штампів

$$u_3^{(i)} = (-1)^i \varepsilon^i; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad \forall\ r \in [0, R^i], \quad y_3 = (-1)^{i+1} h + (-1)^{i+1} H^i, \ (i = \overline{1,2}). \tag{1.5}$$

2. На бічній поверхні пружних штампів

$$Q_{rr}^{(i)} = 0; \quad Q_{3r}^{(i)} = 0, \quad \forall\ y_3 \in [0, H^i], \quad r = R^i, \ (i = \overline{1,2}). \tag{1.6}$$

3. На межі пружного шару в області контакту

$$U_3 = U_3^{(i)}; \quad Q_{33} = Q_{33}^{(i)}; \quad Q_{3r} = Q_{3r}^{(i)} = 0, \ \forall\ r \in [0, R^i], \quad y_3 = (-1)^i h, \ (i = \overline{1,2}). \tag{1.7}$$

4. На межі пружного шару поза областю контакту

$$Q_{33} = Q_{3r} = 0, \quad \forall\ r \in [R^i, +\infty], \quad y_3 = (-1)^i h \quad (i = \overline{1,2}). \tag{1.8}$$

Умови рівноваги мають вигляд:

$$\int_0^{R^1} r[Q_{33}]_{y_3=h}\,dr - \int_0^{R^2} r[Q_{33}]_{y_3=-h}\,dr = 0. \tag{1.9}$$

А рівнодійна зовнішніх сил визначається рівністю:

$$P = -2\pi \int_0^{R^1} r[Q_{33}]_{y_3=h}\,dr = -2\pi \int_0^{R^2} r[Q_{33}]_{y_3=-h}\,dr. \tag{1.10}$$

Для замикання постановки просторової лінеаризованої задачі про контактну взаємодію попередньо напруженого нескінченного шару та двох скінченних співосних циліндричних штампів з початковими напруженнями з математичних міркувань будемо вважати, що напруження та переміщення в шарі при $|y_3| \to \infty$ та $r \to \infty$ спадають, а зважаючи на прийняту модель суцільного середовища на межі контактної взаємодії штампів та шару – необмежені.

Напружено-деформований стан у попередньо напруженому шарі будемо визначати згідно лінеаризованих рівнянь [5] у вигляді

$$U_3 = \theta_3\left[\int_0^\infty f(\xi)\xi^{-1}J_0(\xi\rho)\,d\xi - \int_0^\infty f(\xi)\xi^{-1}F\left(\xi h^{(i)}\right)J_0(\xi\rho)\,d\xi\right];$$

$$Q_{33} = \theta_1 \int_0^\infty f(\xi)J_0(\xi\rho)\,d\xi, \tag{1.11}$$

де

$$\theta_1 = c_{44} l_1 \left(1+m_1\right)\tilde{k};\quad h^{(i)} = \frac{h}{R^i};\quad \theta_3 = \frac{m_1\left(s_1 - s_0\right)}{\sqrt{n_1}};\quad f\left(\xi\right) = \frac{\xi^3 B_2}{\left(R^i\right)^3\left(1-F\left(\xi\right)\right)};$$

$$m_i = \begin{cases} \dfrac{\omega'_{1111} n_i - \omega'_{3113}}{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}; \\ \dfrac{\lambda_1 q_1}{\lambda_3 q_3} n_i; \end{cases} \quad l_i = \begin{cases} \dfrac{\omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} + \dfrac{\omega'_{1313} - \omega'_{1331}}{\omega'_{1313}} \dfrac{\omega'_{1133} + \omega'_{1313}}{\omega'_{1111} n_i + \omega'_{1133}}; \\ \dfrac{\kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} + \dfrac{\kappa'_{1313} - \kappa'_{1331}}{\kappa'_{1313}} \dfrac{\lambda_3 q_3}{\lambda_3 q_3 + \lambda_1 q_1 n_i}; \end{cases} \quad C_{44} = \begin{cases} w'_{1313}; \\ \kappa'_{1313}; \end{cases}$$

$s_0 = (1+m_2)(1+m_1)^{-1}$; $s_1 = (m_1 - 1)m_1^{-1}$; $\tilde{k} = s_0 - s_1$; $J_v(x)$ – функції Бесселя дійсного аргументу; $q_i = \lambda_i^{-1} (i = \overline{1,3})$ для теорії кінцевих (великих) деформацій, $q_i = \lambda_i$ $(i = \overline{1,3})$ для першого варіанту теорії малих початкових деформацій та $q_i = 1$ $(i = \overline{1,3})$ – для другого варіанту теорії малих початкових деформацій; $\rho = r/R^i$, $0 \le \rho \le 1$.

Вид функції $F(\xi)$ визначимо із граничних умов (1.5) – (1.10) та наступним співвідношенням при $n_1 = n_2$:

$$F(\xi h^{(i)}) = \frac{\dfrac{1}{\tilde{k}} \dfrac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}} - e^{-\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}} + 1}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}\right)} G\left(\frac{2h^{(i)}\xi}{\sqrt{n_1}}\right) \quad (i = \overline{1,2}),$$

де $s = s_0 l_2 l_1^{-1}$; $\xi = \dfrac{z_i v_i}{R^i}$; $G(t) \approx 1 - \left(s - s_0 + 1\right)^{-1} \dfrac{t}{\operatorname{sht}} - 0{,}14t\left(\left(s - s_0\right)\left(s - s_0 + 1\right)\operatorname{cht}\right)$.

Загальний розв'язок для визначення напружено-деформованого стану у циліндричних пружних штампах з початковими напруженнями у випадку рівних коренів $(\xi_2'^2 = \xi_3'^2)$ характеристичного рівняння (1.4) приймемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^{(i)} &= (1 + z_1\sqrt{n_1})\left[A_0^{(i)} z_1 + C_0^{(i)} z_1\left(3r^2 - 2{z_1}^2\right)\right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty}\left\{(A_k^{(i)} + z_1\sqrt{n_1} B_k^{(i)}) I_0\left(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1} r\right)\cdot \bar{K}_1^{(i)}\left(\gamma_k^{(i)} z_1\sqrt{n_1}\right) + \right. \\ &\left. + J_0\left(\alpha_k^{(i)} r\right)\left(\bar{K}_2^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)} z_1\right) + z_1\sqrt{n_1}\bar{K}_3^{(i)}\left(\alpha_k^{(i)} z_1\right)\right)\right\} \quad (i = \overline{1,2}), \end{aligned} \tag{1.12}$$

де $I_v(x)$ – функція Бесселя уявного аргументу $(v = 0;1)$; α_k, γ_k – власні значення задачі (1.5) – (1.10); $\bar{K}_1^{(i)}(x) = C_k^{(i)}\sin(x) + D_k^{(i)}\cos(x)$; $\bar{K}_2(\alpha^i{}_k z_1) = \dfrac{R^i s_0}{\mu_k}\operatorname{ch}\left((\mu_k z_1)/R^i\right) +$ $+ E_i^{(k)}\operatorname{sh}\left((\mu_k z_1)/R^i\right)$; $\bar{K}_3(\alpha^i{}_k z_2) = -\operatorname{sh}(\mu_k z_1)/R^i - M_i^{(k)}\operatorname{ch}(\mu_k z_1)/R^i$; $\mu_k = \alpha_k^i R^i$; $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}$, $C_k^{(i)}, D_k^{(i)}, E_k^{(i)}, M_k^{(i)}$ – деякі сталі коефіцієнти, що визначаються із граничних умов (1.5) – (1.10).

Тоді напружено-деформований стан у попередньо напруженому циліндричному штампі для стисливих (нестисливих) тіл та рівних коренів рівняння (1.4), із врахуванням граничних умов (1.5) – (1.10), представимо у вигляді

$$U_3'^{(i)} = \varepsilon^i \left\langle \frac{m_2 - 1}{\sqrt{n_1}} + \left[1 - \frac{2E^i}{H^i\theta_2}\left(r^2 - 2z_1^2 + 4m_1 z_1\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}} + z_1\right)\right)\right]\chi^i{}_0 + \right.$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\chi^i{}_k\left\{\frac{R^{i2}}{2}b_{1i}^{(k)}\gamma^i{}_k I_0(\gamma^i{}_k\sqrt{n_1}r)\left[\left(H^i\left(1+\frac{s_0(1-I_0(\sqrt{n_1}\gamma^i{}_kR^i))}{\sqrt{n_1}\gamma^i{}_kR^iI_1(\sqrt{n_1}\gamma^i{}_kR^i)}\right)+\sqrt{n_1}z_1\right)m_1\sin(\gamma^i{}_k\sqrt{n_1}z_1)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-m_2}{\gamma_k^i}\cos(\gamma_k^i\sqrt{n_1}z_1)\right]-$$

$$\left.-\frac{J_0(\alpha_k^ir)}{\sqrt{n_1}}\left[m_1\alpha_k^i\left(\bar{K}_2\left(\alpha_k^iz_1\right)+z_1\sqrt{n_1}\bar{K}_3\left(\alpha_k^iz_1\right)\right)+(m_2-1)\sqrt{n_1}\bar{K}_5\left(\alpha_k^iz_1\right)\right]\right\}\Bigg\rangle;$$

$$Q_{33}^{\prime(i)}=C_{44}\varepsilon^i\left\langle-\frac{8E^i\sqrt{n_1}}{H^i\theta_2R^{i2}}\chi^i{}_0\left[\left(1+m_1\right)l_1\left(\frac{1}{\sqrt{n_1}}+z_1\right)+\left(1+m_2\right)l_2z_1\right]+\right. \qquad (1.13)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^i\left\{\frac{(R^i)^2}{2}b_{1i}^{(k)}\gamma_k^in_1I_0(\gamma_k^i\sqrt{n_1}r)\left[(1+m_1)l_1\gamma_k^i\left(H^i\left(1+s_0\frac{1-I_0(\gamma_k^i\sqrt{n_1}R^i)}{\gamma_k^i\sqrt{n_1}R^iI_1(\gamma_k^i\sqrt{n_1}R^i)}\right)+\right.\right.\right.$$

$$\left.+\sqrt{n_1}z_1\right)\cos(\gamma_k^i\sqrt{n_1}z_1)+(1+m_2)l_2\sin(\gamma_k^i\sqrt{n_1}z_1)\Big]-$$

$$\left.\left.-\alpha_k^iJ_0(\alpha_k^ir)\left[(1+m_1)\frac{l_1\alpha_k^i}{\sqrt{n_1}}\left(\bar{K}_4(\alpha_k^iz_1)+\sqrt{n_1}z_1\bar{K}_5(\alpha_k^iz_1)\right)+(1+m_2)l_2\bar{K}_3(\alpha_k^iz_1)\right]\right\}\right\rangle \quad (i=\overline{1,2}),$$

де χ_k^i – шукані сталі; $\bar{K}_4(\alpha^i{}_kz_1)=R^is_0\mu_k^{-1}\mathrm{sh}\left((\mu_kz_1)/R^i\right)+E_i^{(k)}\mathrm{ch}\left((\mu_kz_1)/R^i\right)$; $\bar{K}_5(\alpha^i{}_kz_2)=$

$=-\mathrm{ch}\left((\mu_kz_1)/R^i\right)-M_i{}^{(k)}\mathrm{sh}\left((\mu_kz_1)/R^i\right)$; $\theta_2=E^i\left(\frac{8}{n_1}m_1(1+H^i)-\frac{4H^i}{\sqrt{n_1}}+(1-m_2)\frac{(R^i)^2}{H^i}\right)$,

$(i=\overline{1,2})$; $\bar{b}_{1i}^{(k)}$ – визначається із граничних умов (1.5) – (1.10).

§2. Метод розв'язку.

Використовуючи розв'язок для циліндричних штампів (1.13) та задовольняючи третій умові (1.5) та другій умові (1.7), знаходимо власні значення задачі Штурма – Ліувілля для рівних коренів:

$$\gamma_k^{(i)}=\frac{2\pi k}{H^i};\quad \alpha_k^{(i)}=\frac{\mu_k}{R^i}\ \ (J_1(\mu_k)=0)\ \ (i=1,2;\ k=0,1,2,...). \qquad (2.1)$$

З перших граничних умов (1.5) – (1.6) визначимо невідому функцію $f(\xi)$ для (1.11) з подвійних інтегральних рівнянь:

$$\int_0^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi}J_0(\xi r)d\xi=g(r)\ \ \text{при}\ r<R^i;\quad \int_0^{\infty}f\left(\xi\right)J_0\left(\xi r\right)d\xi=0\text{, при}\ r>R^i\text{, }\left(i=1,2\right); \quad (2.2)$$

$$g\left(\rho\right)=-\frac{\varepsilon^i}{\theta_3}\left[1-\chi_0^i-\frac{2}{\theta_2}(m_2-1)(R^i)^2\chi_0^i+\theta_4\sum_{k=1}^{\infty}\chi_k^iJ_0(\mu_k\rho)+\right.$$

$$\left.+\frac{(R^i)^2}{2}(m_2-1)\sum_{k=1}^{\infty}\bar{b}_{1i}^{(k)}\chi_k^iI_0(\gamma_k^{(i)}\sqrt{n_1}\rho)\right]+\int_0^{\infty}\frac{f\left(\xi\right)}{\xi}F(\xi h^{(i)})J_1(\xi h^{(i)})d\xi\quad(i=\overline{1,2})\text{,}$$

де

$$\theta_2=E^i\left(\frac{8}{n_1}m_1(1+H^i)-\frac{4H^i}{\sqrt{n_1}}+(1-m_2)\frac{(R^i)^2}{H^i}\right);\quad \theta_4=\frac{1}{n_1}\left(\sqrt{n_1}(m_2-1)-m_1s_0\right)\ \ \left(i=1,2\right);$$

$$\rho = \frac{r}{R^i}; \quad 0 \le \rho \le 1.$$

Розв'язок системи (2.2) знайдемо відповідно до формули [5]:

$$f(\xi) = \frac{2\xi}{\pi}\left(\cos\xi \int_0^1 \frac{y\tilde{f}(y)}{\sqrt{1-y^2}}dy + \int_0^1 \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du \int_0^1 \xi y \sin(\xi y)\tilde{f}(yu)dy \right).$$

Тоді отримаємо:

$$\frac{f(\xi)}{\xi} = -\frac{2}{\pi\theta_3}\overline{p}(\xi) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(t)F(t\cdot h^{(i)})\psi(\xi,t)}{t}dt, \quad (i=\overline{1,2}), \tag{2.3}$$

де

$$\overline{p}(\xi) = \varepsilon^j \left[(1-\chi_0^j)\psi(\xi,0) - 2\frac{(R^j)^2}{\theta_2}(m_2-1)\chi_0^j\psi(\xi,0) + \theta_4\sum_{k=1}^\infty \chi_k^j\psi(\xi,\mu_k) + \right.$$

$$\left. + \frac{(R^j)^2}{2}(m_2-1)\sum_{k=1}^\infty \overline{b}_{1j}^{(k)}\chi_k^j\psi\left(\xi, i\gamma_k^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)\right] \quad (j=1,2)$$

$$\left(\psi(x,y) = \frac{x\sin x\cos y - y\sin y\cos x}{x^2-y^2}, \quad \psi(x,0) = \frac{\sin x}{x}\right).$$

Для визначення сталих коефіцієнтів $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}, D_k^{(i)}, E_k^{(i)}, M_k^{(i)}$ та функції $f(\xi)$ було введено нові змінні:

$$\chi_0^i = -\frac{\tilde{k}\theta_2 l R^i}{8\varepsilon^i E^i}\int_0^\infty \frac{f(\xi)}{\xi}J_0(\xi)d\xi; \quad \chi_k^i = \frac{\mu_k N_k^{(i)}}{\varepsilon^i R^i} \quad (i=\overline{1,2}), \tag{2.4}$$

де $N_k^{(i)}$ $(i=\overline{1,2})$ – деякі сталі коефіцієнти, через які із граничних умов (1.5) – (1.10) визначаються інші сталі коефіцієнти $A_k^{(i)}, B_k^{(i)}, C_k^{(i)}, D_k^{(i)}, E_k^{(i)}, M_k^{(i)}$.

Проінтегруємо рівність (2.3) по $\rho J_0(\mu_n\rho)d\rho$

$$\int_0^\infty f(\xi)d\xi\int_0^\infty \rho J_0(\xi\rho)J_0(\mu_k\rho)d\rho =$$

$$= \frac{\varepsilon^i R^i}{2\tilde{k}}\left\langle \sum_{m=1}^\infty \frac{(\gamma_m^{(i)})^2 n_1 J_0(\mu_k)\overline{b}_{1i}^{(k)}\left(\gamma_m^{(i)}\sqrt{n_1}R^i\right)I_1\left(\gamma_m^{(i)}\sqrt{n_1}R^i\right) + s_0\left(1-I_0\left(\gamma_m^{(i)}\sqrt{n_1}R^i\right)\right)}{\mu_k^2 + \left(\gamma_m^{(i)}\sqrt{n_1}R^i\right)^2}H^i\chi_m^i - \right.$$

$$\left. - \frac{\mu_k}{\left(R^i\right)^2}J_0^2(\mu_k)\left(\frac{\mu_k}{R^i\sqrt{n_1}}E_k^{(i)} + sM_k^{(i)}\right)\chi_k^i\right\rangle \quad (i=\overline{1,2}) \tag{2.5}$$

та врахуємо інтеграли

$$\int_0^\infty \psi(\eta,\mu_k)J_1(\eta)d\eta = \int_0^1 \rho J_0(\mu_k\rho)\int_0^\infty \eta J_0(\eta\rho)d\eta d\rho = \psi(0,\mu_k); \quad \int_0^\infty \psi(\eta,0)J_1(\eta)d\eta = 1;$$

$$\int_0^\infty \eta\psi(\eta,\mu_k)\int_0^1 \rho J_0(\mu_n\rho)J_0(\eta\rho)d\rho d\eta = \psi(\mu_n,\mu_k).$$

Отримаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих χ_k^i $(i=1,2,...)$, що входять до (1.2), (1.9), (1.10), (2.2) та (2.3):

$$\eta_k^{(i)}\chi_k^i + \sum_{n=0}^{\infty}\eta_{kn}^{(i)}\chi_n^i = \beta_k^{(i)} \quad (i=1,2;\ k=0,1,2,...); \tag{2.6}$$

$$\eta_0^{(i)} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[1+\frac{(m_2-1)(R^i)^2}{\theta_2}+\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\psi(u,0)+\frac{2(m_2-1)(R^i)^2}{\theta_2}\psi_1(u,0)\right)F(h^{(i)}u)\psi_{j-1}(u,0)du\right];$$

$$\beta_0^{(i)} = \frac{1}{\pi}\left[1-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(u,0)F(h^{(i)}u)\psi_{j-1}(u,0)du\right];$$

$$\eta_k^{(i)} = \frac{\mu_k J_0(\mu_k)}{2\theta_3\tilde{k}R^i}\left[\frac{\mu_k}{R^i\sqrt{n_1}}E_k^{(i)} - sM_k^{(i)}\right] \quad (i=\overline{1,2});$$

$$\eta_{0n}^{(j)} = \frac{1}{\pi}\left[\theta_4\psi_1(0,\mu_n)+\frac{(m_2-1)(R^i)^2}{2}b_{1j}^{(n)}\psi\left(0,i\gamma_n^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)+\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\theta_4\psi(u,\mu_n)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(m_2-1)(R^i)^2}{2}b_{1j}^{(n)}\psi\left(u,i\gamma_n^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)F(h^{(i)}u)\psi_{j-1}(u,\mu_n)\right)du\right] \quad (j=\overline{1,2});$$

$$\eta_{00}^{(i)} = \frac{2E^i}{\theta_2\theta_3\tilde{k}lR^i};\ \beta_k^{(i)} = \frac{2}{\pi}\left[\psi(0,\mu_k)+\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\psi(u,\mu_k)F(h^{(i)}u)\psi_{j-1}(u,0)du\right];$$

$$\eta_{k0}^{(j)} = \frac{2}{\pi}\left[\psi(0,\mu_n)\left(1+\frac{2(m_2-1)(R^j)^2}{\theta_2}\right)+\frac{2}{\pi\varepsilon^j\theta_3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\theta_4\psi(u,\mu_n)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(m_2-1)(R^j)^2}{2}b_{1j}^{(k)}\psi\left(u,i\gamma_k^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)F(h^{(i)}u)\psi_{j-1}(u,0)\right)du\right] \quad (j=\overline{1,2});$$

$$\eta_{kn}^{(j)} = -\frac{2}{\pi}\left[\theta_4\psi(\mu_k,\mu_n)+\frac{(m_2-1)(R^j(R^j)^2}{2}b_{1j}^{(k)}\psi\left(\mu_n,i\gamma_k^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)+\right.$$

$$+\frac{2}{\pi\varepsilon^j\theta_3}\sum_{j=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\left(\theta_4\psi(u,\mu_k)+\frac{(m_2-1)(R^j)^2}{2}b_{1j}^{(k)}\psi\left(u,i\gamma_k^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)F(h^{(i)}u)\psi_{j-1}(u,\mu_n)\right)du+$$

$$\left.+\frac{1}{2\tilde{k}\theta_3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\gamma_m^j)^2 n_1 J_0(\mu_k)b_{1j}^{(n)}\left(\gamma_m^{(j)}\sqrt{n_1}R^j I_1\left(\gamma_m^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)+s_0\left(1-I_0\left(\gamma_m^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)\right)\right)}{\mu_k^2+\left(\gamma_m^{(j)}\sqrt{n_1}R^j\right)^2}\right],$$

де $\psi_n(x,y)=\int t^n\cos xt\cos ytdt,\ \psi_0(x,y)=\psi(x,y).$

Відзначимо, що коефіцієнти системи залежать від величин, що визначають структуру пружного потенціалу.

Використавши умову рівноваги (1.10), встановимо зв'язок між осіданням та рівнодіючою навантаження P у вигляді

$$P^{(i)} = \frac{8\pi\varepsilon^i E^i \theta_1}{\tilde{k}\theta_2 H^i R^i}\chi_0^i \quad (i = 1, 2).$$

Визначивши невідомі сталі χ_0^i $(i = 1, 2, ...)$ із системи лінійних алгебраїчних рівнянь (2.6), обчислимо компоненти переміщень та напружень у пружних штампах та пружному шарі за формулами (1.11) та (1.13).

§3. Числові результати.

Числовий аналіз представлений для гармонічного потенціалу при умові, що тіла виготовлені з одного стисливого ізотропного матеріалу, для якого модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона, відповідно, дорівнюють: $E^1 = E^2 = E = 110$ГПа; $v^1 = v^2 = v = 0,3$, а решта величин мають числові значення: $R^1 = R^2 = 0,02$м; $H^1 = H^2 = 0,2$м; $h^{(1)} = h/R^1 = 2$; $\varepsilon^1 = 0,0003$м; $\delta = E/E_1 = 1$ (для стисливого матеріалу); $0 \le \rho \le 1$; $\lambda_1 = 0,7;\ 0,9;\ 1;\ 1,1;\ 1,3$. Алгоритм чисельного розв'язку базується на методі редукції та реалізований у вигляді програми в пакеті Maple.

Графіки на рис. 2 ілюструють вплив початкових напружень в області контакту пружних штампів та шару на розподіл нормальних контактних напружень. На рис. 2 Q'_{33} – нормальні напруження в області контакту пружних штампів та шару з початковими напруженнями.

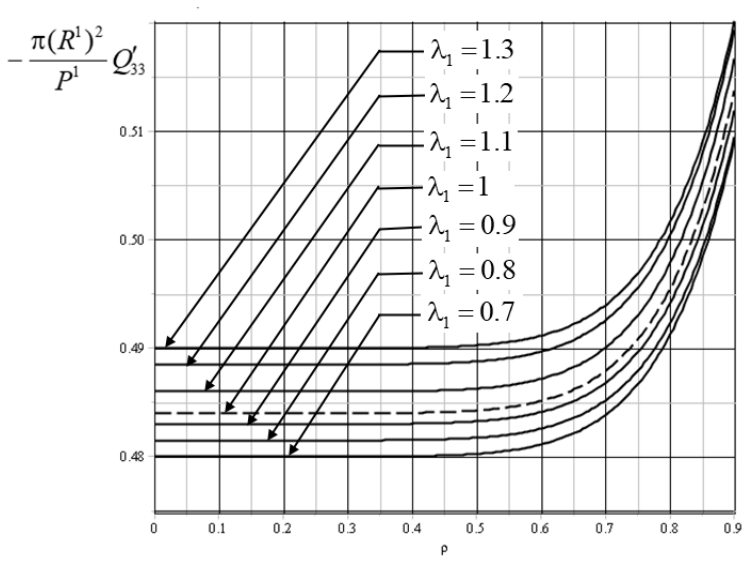


Рис. 2

Графіки для нормальних переміщень $-U_3'^{(1)}/\varepsilon^1$ в зоні контакту зображено на рис. 3. Маємо зауважити, що на рис. 2 – 3 усі величини представлені у безрозмірному вигляді.

Також, на рис. 2 – 3 пунктирна крива відповідає контакту без початкових напружень ($\lambda_1 = 1$), а суцільна – з початковими напруженнями. Причому, у випадку відсутності початкових напружень ($\lambda_1 = 1$) графік розподілу контактних напружень відповідає відомим розв'язкам контактної задачі про тиск двох співвісних циліндрів на шар [6].

З рис. 2. видно, що при розтягу нормальні напруження приймають більші значення, ніж їх відповідні значення при стиску та у випадку відсутності початкових напружень. А при стиску нормальні напруження приймають менші значення, ніж при розтягу та при відсутності початкових напружень.

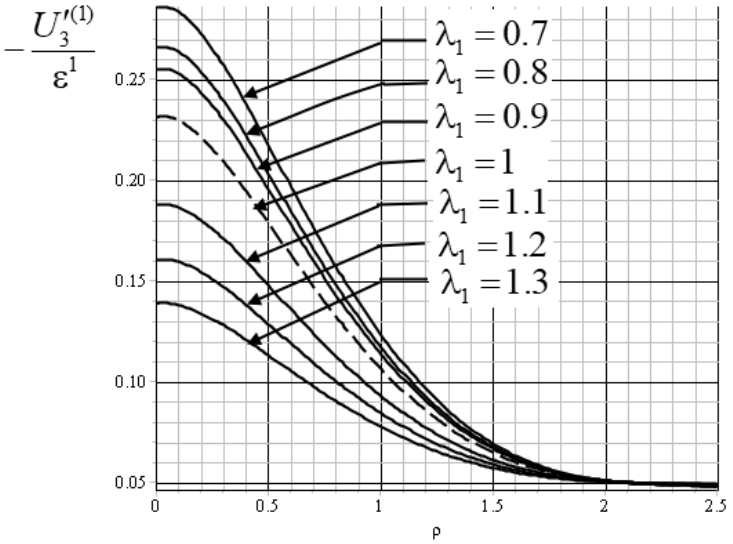


Рис. 3

Переміщення на межі контакту (рис. 3) приймають більші значення при стиску, ніж у випадку відсутності початкових напружень та розтягу. А у випадку розтягу – приймають менші значення, ніж у випадку відсутності початкових напружень та стиску.

Висновок.

На основі числового аналізу можна зробити висновок, що початкові напруження суттєво впливають на основні характеристики напружено-деформованого стану тіл, що контактують. Крім того, вплив початкових напружень на розподіл контактних характеристик пружних штампів та пружного шару полягає у тому, що:

– у випадку стиску (λ_1<1) наявність початкових напружень у шарі та штампах призводять до зменшення величини контактних напружень порівняно із випадком відсутності початкових напружень. А у випадку розтягу (λ_1>1) – до збільшення контактних напружень;

– при наближенні $\rho \to 1$, тобто в точках зміни граничних умов (при наближенні до кутової точки) (рис. 2), контактні напруження надзвичайно зростають, що підтверджувалось дослідженнями [5, 6].

– наявність початкових напружень у шарі при стиску (λ_1<1) призводить до збільшення нормальних переміщень $-U_3'^{(1)} / \varepsilon^1$ в області контакту, а при розтягу (λ_1>1) – до їх зменшення.

Таким чином, можна відзначити вплив початкових напружень на контактну взаємодію двох пружних циліндрів та пружного шару. Отримані результати можуть бути використані у розрахунках конструкцій та деталей на міцність.

РЕЗЮМЕ. Дослідження виконано в загальному вигляді для теорії великих початкових (кінцевих) деформацій і двох варіантів теорії малих початкових деформацій у межах лінеаризованої теорії пружності з довільною структурою пружного потенціалу. У випадку рівних коренів характеристичного рівняння отримано розв'язок змішаної контактної задачі для попередньо напружених двох пружних співвісних скінченних циліндрів і шару без врахування сил тертя. Для розв'язання задачі використано перетворення Ханкеля, парні інтегральні рівняння та інші методи теорії контактних задач лінеаризованої теорії пружності.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: лінеаризована теорія пружності, початкові (залишкові) напруження, контактна задача, циліндричний штамп, шар.

1. *Багно О.М.* Про вплив скінченних початкових деформацій на поверхневу нестійкість нестисливого пружного шару, що взаємодіє з півпростором ідеальної рідини // Доповіді НАН України. – 2021. – №1. – P. 24 – 32.
2. *Габрусєв Г.В., Габрусєва І.Ю., Пиндус Т.Б.* Тиск параболічного штампа на попередньо напружений шар // Міжвузівський збірник «Наукові нотатки», Луцьк. – 2019. – **68**. – С. 13 – 18.
3. *Габрусєва І.Ю., Шелестовський Б.Г.* Контактна взаємодія кільцевого штампа з попередньо напруженим ізотропним шаром // Вісник «Математичні методи та фізико-механічні поля». – 2011. – **54**, № 3. – С. 138 – 146.
4. *Грилицкий Д.В., Кизыма Я.М.* Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости. – Львов: Вища школа, 1981. – 136 с.
5. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. – Saarbrücken: LAPLAMBERT Academic Publishing, 2015. – 468 с.
6. *Гузь А.Н., Рудницкий В.Б.* Основы теории контактного взаимодействия упругих тел с начальными (остаточными) напряжениями. – Хмельницький: Вид. ПП Мельник, 2006. – 710 с.
7. *Максимчук Д.М.* Розв'язання контактної задачі для попередньо напруженого шару та двох співвісних пружних штампів з початковими (залишковими) напруженнями // Доповіді НАН України. – 2015. – №4. – P. 49-55.
8. *Aleksandrov V.M., Arutyunyan N.Ky*. Contact problems for prestressed deformed bodies // Sov. Appl. Mech. – 1984. – **20,** N 3. – P. 209 – 215.
9**.** *Babych S.Yu., Glukhov Y.P.* On One Dynamic Problem for a Multilayer Half-Space with Initial Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 43 – 52.
10. *Babych S.Yu., Yarets'ka N.O*. Contact Problem for an Elastic Ring Punch and a Half-Space with Initial (Residual) Stresses // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 3. – P. 297 – 305.
11. *Bagno O.M*. Effect of Finite Initial Strains on the Wave Process in the System of an Incompressible Half-Space and an Ideal Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 6. – P. 644 – 654.
12. *Dhaliwal R.S., Singh B.M., Rokne J.G.* Axisymmetric contact and crack problems for a initially stressed Neo-Hooken elastic layer // Int. J. Eng. Sci. – 1980. – **18**, N 1. – P. 169 – 179.
13. *Du Y., Stewart P.S., Hill N.A., Yin H., Penta R., Köry J., Luo X., Ogden R.* Nonlinear indentation of second-order hyperelastic materials. // J. of the Mechanics and Physics of Solids. – 2023. – **171**. – P. 105139.
14. *Guz A.N.* Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics. – Cham: Springer, 2021. – 366 p.
15. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Normal Waves in an Elastic Compressible Half-Space Interacting with a Layer of a Compressible Ideal Fluid // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 6. – P. 585 – 595.
16. *Guz A.N., Bagno A.M.* Influence of Prestresses on Quasi-Lamb Modes in Hydroelastic Waveguides // Int. Appl. Mech. – 2020. – **56**, N 1. – P. 1 – 12.
17. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: On the Occasion of the 50th Anniversary of Research (Review). III // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 4. – P. 343 – 415.
18. *Guz A.N*. On General List of References to the Monograph «Eight Non-Classical Problems of Fracture Mechanics» // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 1. – P. 1 – 29.
19. *Guz A.N., Rushchitsky J.J.* For the 100-th anniversary of the S.P. Timoshenko Institute of Mechanics of the NASU: books (Monographs and textbooks) published by the Institute // Int. Appl. Mech. – 2018. – **54**, N 2. – P. 121 – 142.
20. *Kaminsky A.O., Kurchakov E.E*. Tensor-Nonlinear Constitutive Equations for an Elastic Body with Primary Anisotropy // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 2. – P. 154 – 159.
21. *Kurashige M.* Circular crack problem for initially stressed neo-Hookean solid // ZAMM. – 1969. – **49**, N 8. – P. 671 – 678.
22. *Muravskii G.B*. Response of an elastic half-space with power-law nonhomogeneity to static loads // Arch. Appl. Mech. – 2008. – **78**. – P. 965 – 987.
23. *Rudnitskii V.B., Dikhtyaruk N.N.* Interaction between an Infinite Stringer and Two Identical Prestressed Strips: Contact Problem // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53,** N 2. – P. 149 – 155.
24. *Yarets'ka N*. Contact Problems for Cylindrical Stamps and Elastic Bodies with Initial (Residual) Stresses. In: *Guz, A.N., Altenbach, H., Bogdanov, V., Nazarenko, V.M.* (eds) Advances in Mechanics. Advanced Structured Materials, vol.191. – Cham: Springer, 2023. – P. 539 – 543.

Надійшла 30.10.2023 Затверджена до друку 11.06.2024