Є.А.Сторожук[1], О.В.Кудін[2]

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ГЕОМЕТРИЧНО НЕЛІНІЙНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДОВГОЇ ТРИШАРОВОЇ ПЛАСТИНИ*

[1]Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: stevan@ukr.net;
[2]Запорізький національний університет,
вул. Жуковського, 66, 69600, Запоріжжя, Україна; e-mail: avk256@gmail.com

Abstract. The statement is given and the analytical (exact) solution is obtained for the geometrically nonlinear problem for a long three-layer rectangular plate under the action of a uniform surface load. The main equations are written according to the geometrically nonlinear theory in the quadratic approximation, the curved normal hypothesis, and Hooke's law for the transversely isotropic materials. The exact expressions for the components of the stress-strain state are obtained for a three-layer plate with rigidly fixed longitudinal edges. The numerical results of solving the geometrically nonlinear and linear boundary problems are given for three variants of the mechanical parameters of the filling material.

Key words: long three-layer plate, curved normal hypothesis, geometric nonlinearity, uniform pressure, exact solution.

Вступ.

Довгі шаруваті пластини, як елементи сучасних конструкцій, знаходять широке застосування в інженерній практиці. Вони є елементами обшивок крил і фюзеляжів літаків, корпусів кораблів і підводних човнів, резервуарів у хімічній промисловості, перекриттів інженерних споруд тощо. За значних рівнів діючих навантажень в даних елементах конструкцій виникають деформації поперечного зсуву та великі (скінченні) прогини.

При розв'язанні задач про напружено-деформований стан (НДС), коливання і стійкість шаруватих пластин використовують такі теорії: Кірхгофа – Лява [1, 2, 7, 13, 15], Тимошенка [6, 7, 13], ламаної лінії [5, 17], узагальненої ламаної лінії [4], частково уточнену або ітераційну теорію першого наближення Амбарцумяна [1, 2], уточнену теорію Амбарцумяна [1, 2], узагальнену теорію першого наближення (теорію викривленої нормалі) [9, 10] тощо.

Коротко опишемо основні властивості перерахованих вище теорій.

Застосування співвідношень класичної (Кірхгофа – Лява) або уточненої (Тимошенка) теорій до пакету шарів пластини в цілому у випадку, коли пружні властивості та товщини шарів суттєво відрізняються, може призвести до значних похибок при дослідженні НДС таких пластин.

Використання підходу за дискретного розгляду шарів (теорії ламаної лінії та узагальненої ламаної лінії) надає змогу більш адекватно врахувати особливості деформування кожного з шарів, але призводить до розв'язувальних систем більш високого порядку.

В ітераційній теорії Амбарцумяна [1, 2], яка використовує розв'язок поставленої задачі на основі класичної теорії Кірхгофа – Лява для всього пакету шарів (нульове

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

наближення), зміна переміщень за товщиною описується нелінійним законом, але зусилля, моменти і рівняння рівноваги при цьому приймаються такі самі, як і в класичній теорії. Ліві частини системи розв'язувальних рівнянь в переміщеннях не відрізняються від відповідних рівнянь класичної теорії. Поправки від врахування поперечних зсувів і обтиснення містяться в правих частинах. Таким чином, в даній теорії має місце невідповідність між переміщеннями (геометричною стороною теорії) і системою внутрішніх зусиль (статичною стороною теорії).

Вказані протиріччя були усунені при розробці узагальненої теорії першого наближення (теорії викривленої нормалі) [9, 10], в якій отримано повну відповідність між нелінійним законом розподілу переміщень, внутрішніми зусиллями і рівняннями рівноваги.

З аналізу публікацій по даній проблемі випливає, що на теперішній час при розрахунку шаруватих анізотропних структур застосовують два підходи. В першому підході використовуються теорії [4, 5, 8, 11, 18, 28], при розробці яких кінематичні гіпотези застосовуються до кожного шару окремо, внаслідок чого порядок розв'язувальної системи залежить від кількості шарів. При побудові теорій другого підходу [1, 2, 9, 10] розв'язувальні рівняння отримуються із залученням гіпотез до всього пакету шарів в цілому. Порядок системи рівнянь при цьому не залежить від кількості шарів. Згідно термінології, запропонованій автором статті [20], теоріям першого підходу дано назву дискретно-структурних, а другого – неперервно-структурних.

Значну кількість результатів з розрахунку шаруватих пластин отримано за допомогою чисельних і наближених аналітичних методів [6, 14, 16, 19, 27, 29].

Особливий інтерес представляє одержання аналітичних (точних) розв'язків крайових задач для пластин даного класу в геометрично нелінійній постановці.

Уперше аналітичний розв'язок геометрично нелінійної задачі про згин довгої ізотропної пластини по циліндричній поверхні отримано в роботі [3]. Точні розв'язки задач про циліндричний згин довгих шаруватих пластин наведені в працях [4, 21], в яких деформування пластин описується спрощеними рівняннями.

Нижче на основі теорії ламаної лінії дано постановку геометрично нелінійної задачі статики для довгої тришарової прямокутної пластини, отримано точний розв'язок даної задачі та наведено числові результати для трьох варіантів фізико-механічних характеристик матеріалу наповнювача за дії рівномірного тиску.

§1. Постановка задачі, гіпотези та основні співвідношення.

Розглянемо циліндричний згин нескінченно довгої прямокутної пластини шириною $2b$, яка складається з трьох трансверсально-ізотропних шарів зі сталою товщиною h_k $(k = 1, 2, 3)$ і навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивністю q. Віднесемо пластину до прямокутної декартової системи координат $Oxyz$, осі Ox, Oy якої проходять паралельно поздовжнім і поперечним краям пластини ($-b \le y \le b$; рис. 1). Граничні площини k-го шару мають рівняння $z = z_k$ і $z = z_{k+1}$ $(k = 1, 2, 3)$ та є еквідистантними площині зведення $z = 0$, положення якої в межах товщини ($h = h_1 + h_2 + h_3$) може бути довільним (рис. 2).

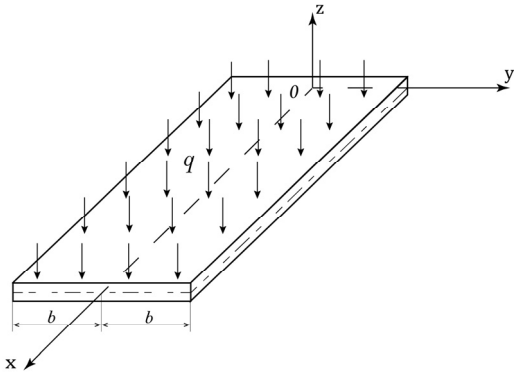


Рис. 1

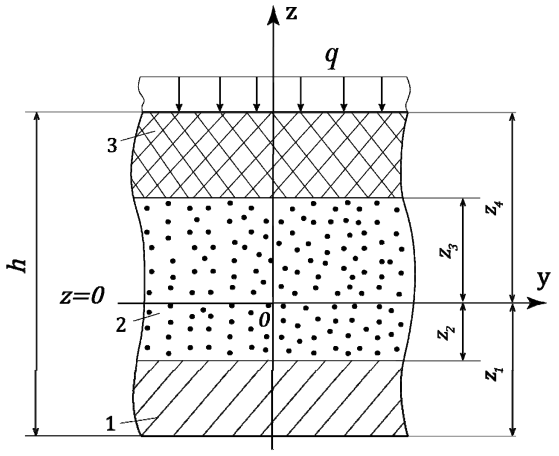


Рис. 2

Визначальними при дослідженні НДС даного класу гнучких пластин є рівняння геометрично нелінійної теорії в квадратичному наближенні, яка базується на гіпотезі викривленої нормалі [9, 10]. Фізичні співвідношення записані на основі закону Гука для трансверсально-ізотропних матеріалів. Вважаємо, що фізико-механічні параметри пластини є сталими величинами в межах кожного шару, тобто $\overline{G}(z)=\overline{G}_k$, $E(z)=E_k$, $\nu(z)=\nu_k$ для $z\in[z_k,z_{k+1}]$, де $\overline{G}_k$ – модуль зсуву матеріалу k-го шару в площині поперечного перерізу; E_k,ν_k – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона цього шару в площині ізотропії.

Приймається для кожного шару пластини рівність нулю поперечного нормального напруження $\sigma_{zz}^{(k)}$, квадратичний закон зміни за товщиною поперечного дотичного напруження $\sigma_{yz}^{(k)}$ і сталість нормального переміщення $w^{(k)}$ за товщиною

$$\sigma_{zz}^{(k)}=0;\quad \sigma_{yz}^{(k)}=\overline{G}_k f^{(k)}(z)\psi;\quad w^{(k)}=w;\quad z\in[z_k,z_{k+1}]\quad (k=1,\,2,\,3), \tag{1.1}$$

де ψ – шукана функція поперечного зсуву; w – нормальне переміщення (прогин) площини зведення; $f^{(k)}$ – квадратичні функції змінної z, які вибираються так, щоб дотичне напруження $\sigma_{yz}^{(k)}$ задовольняло умовам контакту між шарами і нульовим умовам на зовнішніх площинах, та визначаються за формулами

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z)&=0{,}5\,\overline{G}_k^{-1}\left[\sum_{i=1}^{k-1}B_i\left(z_{i+1}^2-z_i^2-2h_i\delta\right)+B_k\left(z^2-2\delta z-z_k^2+2\delta z_k\right)\right]= \\ &=f_2^{(k)}z^2+f_1^{(k)}z+f_0^{(k)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

У формулах (1.2) введені такі позначення:

$$\begin{gathered} B_k=E_k\big/(1-\nu_k^2);\quad \delta=\sum_{k=1}^{3}B_k(z_{k+1}^2-z_k^2)\Big/2\sum_{k=1}^{3}B_k h_k;\quad f_2^{(k)}=B_k/(2\overline{G}_k); \\ f_1^{(k)}=-\frac{\delta B_k}{\overline{G}_k};\quad f_0^{(k)}=\overline{G}_k^{-1}\left[0{,}5\sum_{i=1}^{k-1}B_i\left(z_{i+1}^2-z_i^2\right)-\delta\sum_{i=1}^{k-1}B_i\left(z_{i+1}-z_i\right)-B_k z_k\left(0{,}5z_k-\delta\right)\right]. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Тут стала величина δ знайдена з умови рівності нулю поперечного дотичного напруження на зовнішній площині $z=z_4$.

З рівняння стану для поперечного дотичного напруження визначаємо деформацію поперечного зсуву

$$e_{yz}^{(k)} = f^{(k)}(z)\psi \quad (k = 1,\ 2,\ 3)\,. \tag{1.4}$$

Зазначимо, що функція ψ з точністю до множника $[f^{(m)}(0)]^{-1}$ дорівнює величині деформації поперечного зсуву $e_{yz}^{(m)}$ в точці $z = 0$, де m – шар, через який проходить координатна площина $z = 0$.

Підставляючи вираз (1.4) для $e_{yz}^{(k)}$ у співвідношення Коші для деформації поперечного зсуву та інтегруючи його по z, отримаємо закон зміни тангенціального переміщення за товщиною пластини

$$u^{(k)}(z) = u - \frac{dw}{dy}z + \psi g^{(k)}(z) \quad (k = 1,\ 2,\ 3)\,, \tag{1.5}$$

де u – тангенціальне переміщення площини зведення; $g^{(k)}(z)$ – кубічні функції виду

$$g^{(k)}(z) = g_3^{(k)}z^3 + g_2^{(k)}z^2 + g_1^{(k)}z + g_0^{(k)}. \tag{1.6}$$

Тут

$$g_3^{(k)} = f_2^{(k)}/3; \quad g_2^{(k)} = f_1^{(k)}/2; \quad g_1^{(k)} = f_0^{(k)};$$

$$g_0^{(k)} = -g_3^{(k)}z_k^3 - g_2^{(k)}z_k^2 - g_1^{(k)}z_k + \Sigma_3^{(k)} + g_3^{(m)}z_m^3 + g_2^{(m)}z_m^2 + g_1^{(m)}z_m - \Sigma_3^{(m)}; \tag{1.7}$$

$$\Sigma_3^{(k)} = \sum_{i=1}^{k-1}\left[\left(z_{i+1} - z_i\right)g_1^{(i)} + \left(z_{i+1}^2 - z_i^2\right)g_2^{(i)} + \left(z_{i+1}^3 - z_i^3\right)g_3^{(i)}\right].$$

Зазначимо, що вирази для функцій $g^{(k)}(z)$ одержані шляхом інтегрування функцій $f^{(k)}(z)$ за такими формулами:

$$g^{(k)}(z) = \int_0^z f^{(k)}(z)dz = \int_0^{z_k} f^{(k)}(z)dz + \int_{z_k}^z f^{(k)}(z)dz;$$

$$\int_0^{z_k} f^{(k)}(z)dz = \int_{z_1}^{z_k} f^{(k)}(z)dz - \int_{z_1}^{z_m} f^{(k)}(z)dz - \int_{z_m}^0 f^{(m)}(z)dz.$$

З використанням співвідношень Коші та закону зміни тангенціального переміщення (1.5) для мембранної деформації k-го шару пластини матимемо вираз

$$e_{yy}^{(k)} = \varepsilon + \mu \cdot z + \chi g^{(k)}(z) \quad (k = 1,\ 2,\ 3)\,, \tag{1.8}$$

де $\varepsilon = \dfrac{du}{dy} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dw}{dy}\right)^2$; $\mu = -\dfrac{d^2w}{dy^2}$; $\chi = \dfrac{d\psi}{dy}$.

Враховуючи (1.8), за допомогою співвідношень закону Гука для трансверсально-ізотропного матеріалу виразимо тангенціальне нормальне напруження k-го шару через компоненти деформації пластини

$$\sigma_{yy}^{(k)} = B_k e_{yy}^{(k)} = B_k\left[\varepsilon + \mu \cdot z + \chi g^{(k)}(z)\right] \quad (k = 1,\ 2,\ 3)\,. \tag{1.9}$$

Введемо інтегральні характеристики напружень в шаруватій пластині – внутрішні зусилля N, Q і згинні моменти M, H:

$$N=\int_{z_1}^{z_4}\sigma_{yy}^{(k)}dz=\sum_{k=1}^{3}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sigma_{yy}^{(k)}dz;\quad Q=\int_{z_1}^{z_4}\sigma_{yz}^{(k)}f^{(k)}(z)dz=\sum_{k=1}^{3}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sigma_{yz}^{(k)}f^{(k)}(z)dz;$$
$$M=\int_{z_1}^{z_4}\sigma_{yy}^{(k)}zdz=\sum_{k=1}^{3}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sigma_{yy}^{(k)}zdz;\quad H=\int_{z_1}^{z_4}\sigma_{yy}^{(k)}g^{(k)}(z)dz=\sum_{k=1}^{3}\int_{z_k}^{z_{k+1}}\sigma_{yy}^{(k)}g^{(k)}(z)dz. \tag{1.10}$$

Силові фактори N і M мають той самий зміст, що і в класичній теорії пластин – тангенціальне зусилля і згинний момент. Силові фактори Q і H – це поперечне зусилля і згинний момент вищого порядку, які виникають у зв'язку із врахуванням деформацій поперечного зсуву та нелінійністю зміни тангенціального переміщення за товщиною пластини.

Підставляючи у (1.10) вирази для напружень (1.1) і (1.9), отримаємо співвідношення пружності для шаруватої пластини, що зв'язують внутрішні силові фактори з компонентами деформації площини зведення:

$$N=D_N\varepsilon+D_K\mu+D_L\chi;\quad Q=D_Q\psi;$$
$$M=D_K\varepsilon+D_M\mu+D_G\chi;\quad H=D_L\varepsilon+D_G\mu+D_H\chi. \tag{1.11}$$

Тут $D_N, D_K, D_L, D_M, D_G, D_H, D_Q$ – характеристики жорсткості тришарової пластини, які обчислюються за формулами

$$D_N=\int_{z_1}^{z_4}B_k dz=\sum_{k=1}^{3}B_k h_k;\quad D_K=\int_{z_1}^{z_4}B_k z dz=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}B_k(z_{k+1}^2-z_k^2);$$

$$D_L=\int_{z_1}^{z_4}B_k g^{(k)}(z)dz=\sum_{k=1}^{3}B_k\int_{z_k}^{z_{k+1}}g^{(k)}(z)dz;\quad D_M=\int_{z_1}^{z_4}B_k z^2 dz=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3}B_k(z_{k+1}^3-z_k^3);$$

$$D_G=\int_{z_1}^{z_4}B_k z g^{(k)}(z)dz=\sum_{k=1}^{3}B_k\int_{z_k}^{z_{k+1}}z g^{(k)}(z)dz; \tag{1.12}$$

$$D_H=\int_{z_1}^{z_4}B_k[g^{(k)}(z)]^2dz=\sum_{k=1}^{3}B_k\int_{z_k}^{z_{k+1}}[g^{(k)}(z)]^2dz;$$

$$D_Q=\int_{z_1}^{z_4}\overline{G}_k[f^{(k)}(z)]^2dz=\sum_{k=1}^{3}\overline{G}_k\int_{z_k}^{z_{k+1}}[f^{(k)}(z)]^2dz.$$

Зазначимо, що для тришарової пластини з симетричною за товщиною структурою вирази для характеристик жорсткості пластини спрощуються, зокрема $D_K=0,\ D_L=0.$

З варіаційного принципу Лагранжа отримаємо рівняння рівноваги:

$$\frac{dN}{dy}=0;\quad \frac{d^2M}{dy^2}+\frac{d}{dy}\left(N\frac{dw}{dy}\right)-q=0;\quad \frac{dH}{dy}-Q=0. \tag{1.13}$$

При розв'язанні конкретних крайових задач до системи рівнянь (1.13) потрібно приєднати відповідні граничні умови.

У випадку жорсткого закріплення поздовжніх країв граничні умови мають вигляд:

$$u(\pm b)=0;\ w(\pm b)=0;\ \frac{dw(\pm b)}{dy}=0;\ \psi(\pm b)=0. \tag{1.14}$$

Першу з умов (1.14) на одному краї можна замінити еквівалентною умовою

$$\Delta = \int_{-b}^{b} \frac{du}{dy} dy = 0, \tag{1.15}$$

яка означає, що зближення між краями відсутнє.

§2. Аналітичний (точний) розв'язок геометрично нелінійної задачі для довгої тришарової пластини.

Інтегруючи перше рівняння системи (1.13), отримуємо, що

$$N = \text{const}. \tag{2.1}$$

Виразимо за допомогою співвідношення пружності для тангенціального зусилля N деформацію ε через компоненти деформації μ і χ

$$\varepsilon = \frac{N}{D_N} - \frac{D_K}{D_N}\mu - \frac{D_L}{D_N}\chi. \tag{2.2}$$

Підставивши цей вираз для ε у формули для моментів, одержимо

$$M = D_M^* \mu + D_G^* \chi + \frac{D_K}{D_N} N; \quad H = D_G^* \mu + D_H^* \chi + \frac{D_L}{D_N} N, \tag{2.3}$$

де $D_M^* = D_M - \frac{D_K^2}{D_N}$; $D_H^* = D_H - \frac{D_L^2}{D_N}$; $D_G^* = D_G - \frac{D_K D_L}{D_N}$.

Враховуючи (1.8), (2.1), (2.3) та використовуючи друге і третє рівняння рівноваги (1.13), приходимо до розв'язувальної системи

$$\begin{gathered} D_M^* \frac{d^4 w}{dy^4} - N\frac{d^2 w}{dy^2} - D_G^* \frac{d^3 \psi}{dy^3} + q = 0; \\ D_G^* \frac{d^3 w}{dy^3} - D_H^* \frac{d^2 \psi}{dy^2} + D_Q \psi = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Введемо безрозмірні величини [22, 23]

$$\tilde{w} = \frac{w}{h}; \quad \tilde{u} = \frac{bu}{h^2}; \quad \eta = \frac{y}{b}; \quad \tilde{\psi} = \frac{b^3 \psi}{h}; \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{b^2 \varepsilon}{h^2}; \quad \tilde{\mu} = \frac{b^2 \mu}{h}; \quad \tilde{\chi} = \frac{b^4 \chi}{h};$$

$$\tilde{\Delta} = \frac{b\Delta}{h^2}; \quad \tilde{q} = \frac{b^4 q}{h D_M^*}; \quad \tilde{N} = \frac{b^2 N}{D_M^*}; \quad \tilde{Q} = \frac{bQ}{h D_M^*}; \quad \tilde{M} = \frac{b^2 M}{h D_M^*}; \quad \tilde{H} = \frac{H}{h D_M^*}; \tag{2.5}$$

$$\beta_1 = \frac{D_H^*}{b^2 D_Q}; \quad \beta_2 = \frac{D_G^*}{D_Q}; \quad \beta_3 = \frac{D_G^*}{b^2 D_M^*}; \quad \beta_4 = \frac{D_M^*}{h^2 D_N}; \quad \beta_5 = \frac{D_K}{h D_N}; \quad \beta_6 = \frac{D_L}{b^2 h D_N}.$$

Система (2.4) у безрозмірних величинах записується наступним чином:

$$\begin{gathered} \frac{d^4 \tilde{w}}{d\eta^4} - \tilde{N}\frac{d^2 \tilde{w}}{d\eta^2} - \beta_3 \frac{d^3 \tilde{\psi}}{d\eta^3} + \tilde{q} = 0; \\ \beta_2 \frac{d^3 \tilde{w}}{d\eta^3} - \beta_1 \frac{d^2 \tilde{\psi}}{d\eta^2} + \tilde{\psi} = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Система (2.6) є системою лінійних звичайних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами відносно безрозмірних прогину $\tilde{w}$ і функції поперечного зсуву $\tilde{\psi}$.

Загальний розв'язок однорідної системи, яка відповідає системі (2.6), будемо шукати методом Ейлера, а частинний розв'язок неоднорідної системи – методом невизначених коефіцієнтів.

Квадрати ненульових коренів характеристичного рівняння однорідної системи обчислюються за формулою

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1+\beta_1\widetilde{N} \mp \sqrt{(1-\beta_1\widetilde{N})^2 + 4\widetilde{N}\beta_2\beta_3}}{2(\beta_1 - \beta_2\beta_3)}. \tag{2.7}$$

Оскільки, як показав числовий аналіз, величини параметрів $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ задовольняють нерівностям $\beta_2\beta_3 > 0$ і $\beta_1 - \beta_2\beta_3 > 0$, то з (2.7) випливає, що $\lambda_1^2 > 0$ і $\lambda_2^2 > 0$. Отже, ненульові корені характеристичного рівняння ($\pm\lambda_1, \pm\lambda_2$) є дійсними числами.

Тоді загальний розв'язок системи (2.6) матиме вигляд

$$\begin{gathered}\tilde{w} = C_1 + C_2\eta + a_1(C_3\operatorname{ch}\lambda_1\eta + C_4\operatorname{sh}\lambda_1\eta) + a_2(C_5\operatorname{ch}\lambda_2\eta + C_6\operatorname{sh}\lambda_2\eta) + 0{,}5\tilde{q}\eta^2/\tilde{N};\\ \tilde{\psi} = \beta_2[\lambda_1^3(C_3\operatorname{sh}\lambda_1\eta + C_4\operatorname{ch}\lambda_1\eta) + \lambda_2^3(C_5\operatorname{sh}\lambda_2\eta + C_6\operatorname{ch}\lambda_2\eta)],\end{gathered} \tag{2.8}$$

де C_i $(i = \overline{1,6})$ – сталі інтегрування; $a_1 = \beta_1\lambda_1^2 - 1$; $a_2 = \beta_1\lambda_2^2 - 1$.

З шести останніх граничних умов (1.14) знайдемо сталі інтегрування C_i $(i = \overline{1,6})$:

$$C_1 = b_0\tilde{q}; \quad C_3 = b_1\tilde{q}; \quad C_5 = b_2\tilde{q}; \quad C_2 = C_4 = C_6 = 0. \tag{2.9}$$

Праві частини перших трьох формул (2.9) записані з використанням позначень:

$$\begin{gathered}b_2 = -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2\tilde{N}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\operatorname{sh}\lambda_2}; \quad b_1 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1\tilde{N}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)\operatorname{sh}\lambda_1};\\ b_0 = -0{,}5/\tilde{N} - a_1b_1\operatorname{ch}\lambda_1 - a_2b_2\operatorname{ch}\lambda_2.\end{gathered} \tag{2.10}$$

Враховуючи у співвідношеннях (2.8) отримані значення сталих інтегрування (2.9), одержимо остаточні вирази для прогину і функції поперечного зсуву:

$$\begin{gathered}\tilde{w} = (b_0 + a_1b_1\operatorname{ch}\lambda_1\eta + a_2b_2\operatorname{ch}\lambda_2\eta + 0{,}5\eta^2/\tilde{N})\tilde{q};\\ \tilde{\psi} = \beta_2(b_1\lambda_1^3\operatorname{sh}\lambda_1\eta + b_2\lambda_2^3\operatorname{sh}\lambda_2\eta)\tilde{q}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

Тут невідомою залишилась величина $\tilde{N}$. Для її визначення використаємо умову відсутності зближення поздовжніх країв:

$$\tilde{\Delta} = \int_{-1}^{1}\frac{d\tilde{u}}{d\eta}d\eta = \int_{-1}^{1}\left[\beta_4\tilde{N} - \beta_5\tilde{\mu} - \beta_6\tilde{\chi} - \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{w}}{d\eta}\right)^2\right]d\eta = 0. \tag{2.12}$$

Після виконання інтегрування в (2.12) з врахуванням (2.11) отримаємо залежність між параметрами тангенціального зусилля і навантаження у вигляді такого рівняння:

$$\begin{gathered}8\beta_4\tilde{N} - \left\{\lambda_1a_1^2b_1^2(\operatorname{sh}2\lambda_1 - 2\lambda_1) + \lambda_2a_2^2b_2^2(\operatorname{sh}2\lambda_2 - 2\lambda_2) + 4\lambda_1\lambda_2a_1a_2b_1b_2\left[\frac{\operatorname{sh}(\lambda_1+\lambda_2)}{\lambda_1+\lambda_2} - \right.\right.\\ \left.\left. - \frac{\operatorname{sh}(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1-\lambda_2}\right] + \frac{8a_1b_1(\lambda_1\operatorname{ch}\lambda_1 - \operatorname{sh}\lambda_1)}{\lambda_1\tilde{N}} + \frac{8a_2b_2(\lambda_2\operatorname{ch}\lambda_2 - \operatorname{sh}\lambda_2)}{\lambda_2\tilde{N}} + \frac{4}{3\tilde{N}^2}\right\}\tilde{q}^2 = 0.\end{gathered} \tag{2.13}$$

Оскільки параметр тангенціального зусилля $\tilde{N}$ входить у вирази для $\lambda_1, \lambda_2, a_1, a_2$, то рівняння (2.13) є трансцендентним і не може бути розв'язане аналітично відносно параметра $\tilde{N}$. Тому спочатку за допомогою рівняння (2.13) чисельно знаходимо залежність $\tilde{q}(\tilde{N})$. Далі з виразів для $\tilde{w}, \tilde{\psi}$ (2.11), перебираючи $\tilde{N}$ і враховуючи зв'язок $\tilde{q}(\tilde{N})$, одержуємо залежності $\tilde{w}(\tilde{q}), \tilde{\psi}(\tilde{q})$.

Зазначимо, коли $\widetilde{N} = 0$, то з умови (2.12) випливає, що $\widetilde{q} = 0$, а з (2.11) – $\widetilde{w} = 0$, $\widetilde{\psi} = 0$.

Таким чином, точний розв'язок геометрично нелінійної крайової задачі для довгої тришарової пластини отримано в параметричній формі з величиною $\tilde{N}$ в якості параметра.

Безрозмірні мембранна і згинні компоненти деформації, поперечне зусилля і згинні моменти визначаються за формулами:

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{d\tilde{u}}{d\eta} + \frac{1}{2}\left(\frac{d\tilde{w}}{d\eta}\right)^2 = \beta_4\tilde{N} - \beta_5\tilde{\mu} - \beta_6\tilde{\chi};$$

$$\tilde{\mu} = -\frac{d^2\tilde{w}}{d\eta^2} = -(a_1 b_1 \lambda_1^2 \operatorname{ch}\lambda_1\eta + a_2 b_2 \lambda_2^2 \operatorname{ch}\lambda_2\eta + \tilde{N}^{-1})\tilde{q}; \tag{2.14}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{d\tilde{\psi}}{d\eta} = \beta_2(b_1\lambda_1^4 \operatorname{ch}\lambda_1\eta + b_2\lambda_2^4 \operatorname{ch}\lambda_2\eta)\,\tilde{q};$$

$$\tilde{Q} = \beta_7\tilde{\psi}; \quad \tilde{M} = \tilde{\mu} + \beta_3\tilde{\chi} + \beta_5\tilde{N}; \quad \tilde{H} = \beta_3\tilde{\mu} + \beta_1\beta_7\tilde{\chi} + \beta_6\tilde{N}. \tag{2.15}$$

Тут функція $\tilde{\psi}$ обчислюється з використанням співвідношення (2.11), а параметр β_7 дорівнює відношенню β_3/β_2.

Вирази для безрозмірних тангенціального нормального напруження $\tilde{\sigma}_{yy}^{(k)}$ ($\tilde{\sigma}_{yy}^{(k)} = b^3\sigma_{yy}^{(k)}/D_M^*$) і поперечного дотичного напруження $\tilde{\sigma}_{yz}^{(k)}$ ($\tilde{\sigma}_{yz}^{(k)} = b^3\sigma_{yz}^{(k)}/D_M^*$) мають вигляд

$$\tilde{\sigma}_{yy}^{(k)} = \widetilde{B}_k[\widetilde{b}(\widetilde{\varepsilon} + \widetilde{\mu}\cdot\widetilde{z}) + \widetilde{\chi}\widetilde{g}^{(k)}(\widetilde{z})/\widetilde{b}]; \quad \tilde{\sigma}_{yz}^{(k)} = \widetilde{\bar{G}}_k\tilde{f}^{(k)}(\tilde{z})\tilde{\psi}, \quad k = 1,2,3, \tag{2.16}$$

де

$$\tilde{z} = z/h; \quad \tilde{g}^{(k)}(\tilde{z}) = g^{(k)}(z)/h^3; \quad \tilde{f}^{(k)}(\tilde{z}) = f^{(k)}(z)/h^2; \quad \tilde{b} = b/h;$$

$$\tilde{B}_k = h^3\,B_k/D_M^*; \quad \widetilde{\bar{G}}_k = h^3\,\bar{G}_k/D_M^*.$$

Лінійна задача. Розв'язок даної задачі в лінійно-пружній постановці записується наступним чином:

$$\tilde{w} = (b_0 + b_1\eta^2 + b_2\beta_2\beta_3 \operatorname{ch}\lambda\eta - \eta^4/24)\tilde{q}; \quad \tilde{\psi} = \beta_2(b_2\lambda \operatorname{sh}\lambda\eta + \eta)\tilde{q}. \tag{2.17}$$

Тут

$$\lambda^2 = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2\beta_3}; \quad b_0 = -\frac{\lambda + 12\beta_2\beta_3(\lambda - 2\operatorname{cth}\lambda)}{24\lambda}; \quad b_1 = \frac{1 + 6\beta_2\beta_3}{12}; \quad b_2 = -\frac{1}{\lambda \operatorname{sh}\lambda}.$$

З умови відсутності зближення поздовжніх країв $\widetilde{\Delta} = 0$ випливає, що у випадку пластини з жорстко закріпленими поздовжніми краями, навантаженої рівномірним нормальним тиском, тангенціальне зусилля $\widetilde{N} = 0$.

Тоді для безрозмірних мембранної і згинних компонентів деформації пластини отримаємо такі вирази:

$$\widetilde{\varepsilon} = \frac{d\widetilde{u}}{d\eta} = -\beta_5\widetilde{\mu} - \beta_6\widetilde{\chi};$$

$$\tilde{\mu} = -\frac{d^2\tilde{w}}{d\eta^2} = -(2b_1 + b_2\beta_2\beta_3\lambda^2 \operatorname{ch}\lambda\eta - 0{,}5\eta^2)\tilde{q}; \tag{2.18}$$

$$\tilde{\chi} = \frac{d\tilde{\psi}}{d\eta} = \beta_2(b_2\lambda^2 \operatorname{ch}\lambda\eta + 1)\tilde{q}.$$

Поперечне зусилля $\widetilde{Q}$ і згинні моменти $\tilde{M}, \tilde{H}$ обчислюються за формулами (2.15), в яких враховано, що $\widetilde{N} = 0$, а тангенціальне нормальне $\tilde{\sigma}_{yy}^{(k)}$ і поперечне дотичне $\tilde{\sigma}_{yz}^{(k)}$ напруження – за формулами (2.16).

§3. Окремі моделі тришарових пластин, які випливають з моделі викривленої нормалі.

1. Модель Кірхгофа – Лява. Якщо прийняти $\overline{G}_k = \infty$, то перейдемо до рівнянь класичної теорії шаруватих пластин, в якій гіпотеза прямої нормалі застосовується до всього пакету шарів. Тоді з (1.2), (1.6), (1.7) випливає, що $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z) = 0$, а у відповідності з (1.12) отримаємо $D_L = D_G = D_H = D_Q = 0$. У розв'язувальній системі (2.4) залишається тільки одне (перше) рівняння, зменшується її порядок, кількість розв'язувальних функцій і граничних умов.

В безрозмірних величинах розв'язувальне рівняння і граничні умови геометрично нелінійної теорії Кірхгофа – Лява для тришарових пластин записуються так

$$\frac{d^4\widetilde{w}}{d\eta^4} - \widetilde{N}\frac{d^2\widetilde{w}}{d\eta^2} = -\widetilde{q}; \tag{3.1}$$

$$\widetilde{u}(\pm 1) = 0;\ \widetilde{w}(\pm 1) = 0;\ \frac{d\widetilde{w}(\pm 1)}{d\eta} = 0; \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\Delta} = \int_{-1}^{1}\frac{d\widetilde{u}}{d\eta}d\eta = 0. \tag{3.3}$$

Розв'язок рівняння (3.1), який задовольняє граничним умовам (3.2), має вигляд

$$\tilde{w} = (b_0 + b_1 \operatorname{ch}\lambda\eta + 0{,}5\eta^2 / \tilde{N})\tilde{q}, \tag{3.4}$$

де $\lambda^2 = \widetilde{N};\ b_0 = (2\operatorname{cth}\lambda - \lambda)/2\lambda\tilde{N};\ b_1 = -1/\lambda\tilde{N}\operatorname{sh}\lambda.$

З умови відсутності зближення поздовжніх країв (3.3) отримаємо рівняння, яке описує залежність між параметрами тангенціального зусилля і навантаження:

$$8\beta_4\tilde{N} - \left[\lambda b_1^2(\operatorname{sh}2\lambda - 2\lambda) + \frac{8b_1(\lambda\operatorname{ch}\lambda - \operatorname{sh}\lambda)}{\lambda\tilde{N}} + \frac{4}{3\tilde{N}^2}\right]\tilde{q}^2 = 0. \tag{3.5}$$

2. Модель Тимошенка. Якщо у наведених вище співвідношеннях моделі викривленої нормалі прийняти $f^{(k)}(z) = 1$ і $g^{(k)}(z) = z$, то з формул (1.12) випливає, що

$D_L = D_K$ і $D_G = D_H = D_M$. Врахувавши одержані залежності між характеристиками жорсткості пластини та ввівши кут повороту нормалі $\vartheta = \psi - \frac{dw}{dy}$, отримаємо рівняння моделі Тимошенка, в якій гіпотеза прямої лінії виконується для всього пакету шарів пластини.

Система розв'язувальних рівнянь для гнучких тришарових пластин, побудована з використанням гіпотез Тимошенка, матиме вигляд

$$(1+\beta\tilde{N})\frac{d^2\tilde{w}}{d\eta^2}+\frac{d\tilde{\vartheta}}{d\eta}=\beta\tilde{q}; \quad \frac{d\tilde{w}}{d\eta}-\beta\frac{d^2\tilde{\vartheta}}{d\eta^2}+\tilde{\vartheta}=0. \tag{3.6}$$

Тут $\beta = \frac{D_M^*}{b^2 D_Q}$; $D_Q = \sum_{k=1}^{3} \overline{G}_k h_k$; $\tilde{\vartheta} = b\vartheta/h$.

Розв'язок системи (3.6) за умови жорсткого закріплення поздовжніх країв пластини записується наступним чином:

$$\begin{aligned} \tilde{w} &= (b_0 + b_1 \operatorname{ch}\lambda\eta + 0{,}5\eta^2/\tilde{N})\tilde{q}; \\ \tilde{\vartheta} &= -[\lambda(1+\beta\tilde{N})b_1 \operatorname{sh}\lambda\eta + \eta/\tilde{N}]\tilde{q}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

де $\lambda^2 = \frac{\tilde{N}}{1+\beta\tilde{N}}$; $b_0 = \frac{2\lambda \operatorname{cth}\lambda - \tilde{N}}{2\tilde{N}^2}$; $b_1 = -\frac{\lambda}{\tilde{N}^2 \operatorname{sh}\lambda}$.

Зв'язок між параметрами тангенціального зусилля і навантаження для моделі Тимошенка визначається тим самим співвідношенням, що й для моделі Кірхгофа – Лява, тобто рівнянням (3.5).

Варто відмітити, що з формул (3.7) за умови $\beta = 0$ одержимо розв'язок для класичної теорії тришарових пластин (3.4).

3. Модель ламаної лінії. Приймаючи $f^{(1)}(z) = f^{(3)}(z) = 0$; $f^{(2)}(z) = 1$; $g^{(1)}(z) = z_2$; $g^{(2)}(z) = z$; $g^{(3)}(z) = z_3$, із співвідношень моделі викривленої нормалі отримаємо рівняння моделі ламаної лінії, в якій для наповнювача мають місце гіпотези Тимошенка, а для несучих шарів – гіпотези Кірхгофа – Лява. Розв'язувальна система, кількість невідомих функцій і граничних умов у цьому випадку залишаються такими самими, що й для моделі викривленої нормалі. Замінити потрібно тільки вирази для частини безрозмірних параметрів:

$$\tilde{\psi} = \frac{b\psi}{h}; \quad \tilde{\chi} = \frac{b^2\chi}{h}; \quad \tilde{Q} = \frac{b^3 Q}{h D_M^*}; \quad \tilde{H} = \frac{b^2 H}{h D_M^*};$$

$$\beta_2 = \frac{D_G^*}{b^2 D_Q}; \quad \beta_3 = \frac{D_G^*}{D_M^*}; \quad \beta_6 = \frac{D_L}{h D_N}.$$

§4. Числові результати.

Представимо результати розрахунків для нескінченно довгої тришарової прямокутної пластини з жорстко закріпленими поздовжніми краями за дії на пластину рівномірного тиску.

Розрахунки виконані для пластини з симетричною за товщиною структурою і такими геометричними та фізико-механічними параметрами:

$$h_1/h = h_3/h = 0{,}2; \quad h_2/h = 0{,}6; \quad b/h = 10; \quad E_1 = E_3 = 38{,}4 \text{ ГПа}; \quad E_2 = 2 \text{ ГПа};$$

$$\overline{G}_1 = \overline{G}_3 = 0{,}2 \text{ ГПа}; \quad \nu_1 = \nu_3 = 0{,}238; \quad \nu_2 = 0{,}3.$$

Числові результати розв'язання геометрично нелінійної і лінійної задач отримані для трьох значень (варіантів) модуля зсуву матеріалу наповнювача в площині поперечного перерізу: 1) $\overline{G}_2 = 0{,}2$ ГПа ($\mathrm{K}=1$); 2) $\overline{G}_2 = 0{,}08$ ГПа ($\mathrm{K}=2$); 3) $\overline{G}_2 = 0{,}006$ ГПа ($\mathrm{K}=3$).

За координатну площину прийнята серединна площина другого шару.

На рис. 3, 4 показано залежність безрозмірного прогину в початку координат $\widetilde{w}(0)$ від величини параметра навантаження $\widetilde{q}$, отриману для трьох значень модуля поперечного зсуву матеріалу наповнювача ($\mathrm{K}=1, 2, 3$) в результаті розв'язання геометрично нелінійних (рис. 3) і лінійних (рис. 4) задач.

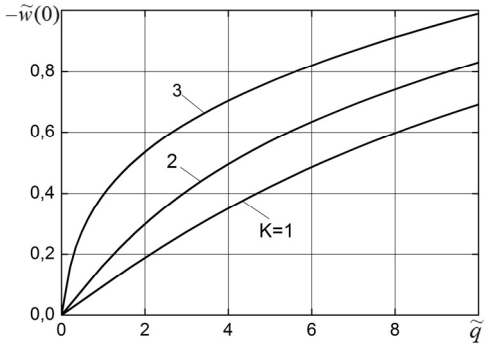


Рис. 3

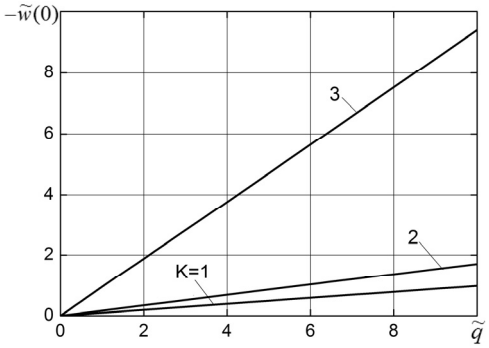


Рис. 4

В таблиці для величини параметра навантаження $\widetilde{q}=8$ наведені значення тангенціального нормального напруження на опорі ($\widetilde{\sigma}^{+}_{yy}(1), \widetilde{\sigma}^{-}_{yy}(1)$) і в початку координат ($\widetilde{\sigma}^{+}_{yy}(0), \widetilde{\sigma}^{-}_{yy}(0)$) на верхній (із знаком «+» зверху) і нижній (із знаком «–» зверху) площинах, а також значення безрозмірного прогину в початку координат $\widetilde{w}(0)$. Результати одержані для трьох варіантів розрахунку ($\mathrm{K}=1, 2, 3$) як для задач в геометрично нелінійній постановці (ГНЗ), так і в лінійній (ЛЗ).

Таблиця

НДС	$\widetilde{q}=8$					
	K = 1		K = 2		K = 3	
	ГНЗ	ЛЗ	ГНЗ	ЛЗ	ГНЗ	ЛЗ
$\tilde{\sigma}^{+}_{yy}(1)$	427,8	456,0	472,1	588,8	491,1	1278,5
$\tilde{\sigma}^{-}_{yy}(1)$	–362,1	–456,0	–367,4	–588,8	329,9	–1278,5
$\tilde{\sigma}^{+}_{yy}(0)$	–51,81	–114,3	–16,02	–135,2	42,38	–452,1
$\tilde{\sigma}^{-}_{yy}(0)$	117,5	114,3	120,7	135,2	118,8	452,1
$\tilde{w}(0)$	0,5974	0,7765	0,7419	1,362	0,9017	7,523

З аналізу даних, наведених в таблиці, випливає, що максимальні напруження при жорсткому закріпленні поздовжніх країв мають місце на опорі як для нелінійних, так і лінійних задач.

Величина модуля поперечного зсуву матеріалу наповнювача суттєво впливає як на значення компонентів НДС (таблиця), так і на характер залежності прогину від навантаження (рис. 3, 4). Із зменшенням величини модуля $\overline{G}_2$ вплив геометричної нелінійності зростає. Модуль поперечного зсуву матеріалу наповнювача більш істотно впливає на результати розв'язання задач в лінійній постановці. Так, на основі да-

них таблиці при $\widetilde{q}=8$ зменшення модуля $\overline{G}_2$ від значення 0,2 ГПа до 0,006 ГПа призводить до збільшення максимальних напружень на 14,8% для ГНЗ і на 180,4% для ЛЗ та збільшення максимальних прогинів в 1,51 раз для ГНЗ і в 9,69 раз для ЛЗ.

Врахування геометричної нелінійності призводить до зменшення максимальних напружень і прогинів в порівнянні з результатами розв'язання задач в лінійній постановці. Так, при $K=1$ зменшення складає 6,2% для максимальних напружень і 23,1% для максимальних прогинів, при $K=2$ – 19,8% для максимальних напружень і 45,5% для максимальних прогинів та при $K=3$ – 61,6% для максимальних напружень і 88,0% для максимальних прогинів.

Висновки.

В роботі отримано аналітичний (точний) розв'язок крайової задачі для нескінченно довгої прямокутної тришарової пластини з врахуванням геометричної нелінійності та деформацій поперечного зсуву. На основі неперервно-структурної узагальненої теорії першого наближення (теорії викривленої нормалі) [9, 10], геометрично нелінійної теорії в квадратичному наближенні, закону Гука для трансверсально-ізотропних матеріалів і варіаційного принципу Лагранжа побудовано систему розв'язувальних рівнянь в безрозмірних величинах для довгої тришарової пластини довільної за товщиною структури та з жорстко закріпленими поздовжніми краями. Розв'язок даної системи одержано в параметричній формі з величиною тангенціального зусилля в якості параметра. Наведено точні вирази для прогину, функції поперечного зсуву, внутрішніх зусиль і моментів, тангенціального нормального і поперечного дотичного напружень. Показано, яким чином з моделі викривленої нормалі можна отримати співвідношення таких моделей тришарових пластин: Кірхгофа – Лява, Тимошенка та ламаної лінії. Для тришарової пластини симетричної за товщиною структури наведено числові результати для трьох варіантів фізико-механічних характеристик матеріалу наповнювача за дії рівномірного тиску. В подальшому представляє інтерес аналітичне, чисельне і аналітично-чисельне розв'язання задач про НДС і стійкість шаруватих пластин і циліндричних оболонок кругового та некругового поперечного перерізу з врахуванням як особливостей деформування, так і нелінійних властивостей матеріалів [12, 22 – 26].

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку та отримано аналітичний (точний) розв'язок геометрично нелінійної задачі для довгої тришарової прямокутної пластини за дії рівномірного поверхневого навантаження. Основні рівняння записані згідно з геометрично нелінійною теорією у квадратичному наближенні, гіпотезою викривленої нормалі та законом Гука для трансверсально-ізотропних матеріалів. Для тришарової пластини з жорстко закріпленими поздовжніми краями одержано точні вирази для компонентів напружено-деформованого стану. Для трьох варіантів механічних параметрів матеріалу наповнювача наведено числові результати розв'язання геометрично нелінійних і лінійних крайових задач.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: довга тришарова пластина, гіпотеза викривленої нормалі, геометрична нелінійність, рівномірний тиск, точний розв'язок.

1. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – Москва: Наука, 1974. – 446 с.
2. *Амбарцумян С.А.* Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1987. – 320 с.
3. *Бубнов И.Г.* Труды по теории пластин. – Москва: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1953. – 424 с.
4. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – Москва: Машиностроение, 1988. – 288 с.
5. *Григолюк Э.И., Чулков П.П.* Устойчивость и колебания трехслойных оболочек. – Москва: Машиностроение, 1973. – 170 с.

6. *Григоренко Я.М., Крюков Н.Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
7. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Механика композитов: в 12-ти томах. Т. 7. Концентрация напряжений – Киев: «А.С.К.», 1998. – 387 с.
8. *Марчук М.В., Пакош В.С., Харченко В.М.* Власні частоти шаруватих композитних пластин-смуг з податливими до трансверсальних зсуву та стиснення складовими // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 2. – С. 151 – 156.
9. *Пискунов В.Г., Верижженко В.Е.* Линейные и нелинейные задачи расчета слоистых конструкций. – Киев: Будівельник, 1986. – 176 с.
10. *Рассказов А.О., Соколовская И.И., Шульга Н.А.* Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища школа, 1986. – 191 с.
11. *Chen W., Wu Z.* A selective review on recent development of displacement-based laminated plate theories // Recent Patents on Mechanical Engineering. – 2008. – **1**. – P. 29 – 44.
12. *Chernyshenko I.S., Storozhuk E.A.* Inelastic Deformation of Flexible Cylindrical Shells with a Curvilinear Hole // Int. Appl. Mech. – 2006. – **42**, N 12. – P. 1414 – 1420.
13. *Christensen R.M*. Mechanics of Composite Materials. – New York: J. Wiley & Sons, 1979. – 348 p.
14. *Engholm M., Pedersen T., Thomsen E. V.* Modeling of plates with multiple anisotropic layers and residual stress // Sensors and Actuators A: Physical. – 2016. – **240**. – P. 70 – 79.
15. *Khdeir A.A.* Comparison between shear deformable and Kirchhoff theories for bending, buckling and vibration of antisymmetric angle-ply laminated plates // Compos. Struct. – 1989. – **13**, N 3. – P. 159 – 172.
16. *Latheswary S., Valsarajan K.V., Rao Y.V.K.S.* Free vibrations analysis of laminated plates using higher-order shear deformation theory // J. Institution Eng. (India): Series A. – 2004. – **85**. – P. 18 – 24.
17. *Li R., Kardomateas G.A.* Nonlinear high-order core theory for sandwich plates with orthotropic phases // AIAA Journal – 2008. – **46**, N 11. – P. 2926 – 2934.
18. *Matsunaga H.* Assessment of a global higher-order deformation theory for laminated composite and sandwich plates // J. Compos. Mater. – 2002. – **56**. – P. 279 – 291.
19. *Pandya B.N., Kant T.* Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model // Composites Sci. and Techn. – 1988. – **32**. – P. 137 – 155.
20. *Piskunov V.G.* An iterative analytical theory in the mechanics of layered composite systems // Mech. Compos. Mater. – 2003. – **39**, N 1. – P. 1 – 16.
21. *Reddy J.N.* Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. – Boca Raton: CRC Press LLC, 2004. – 831 p.
22. *Storozhuk E.A.* Exact Solution of a Geometrically Nonlinear Problem for a Shear-Compliant Oval Cylindrical Shell // Int. Appl. Mech. – 2022. – **58**, N 6. – P. 653 – 672.
23. *Storozhuk E.A.* Nonlinear Deformation and Stability of Transverse Shear-Compliant Long Cylindrical Panels with Noncircular Cross-Section // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, N 6. – P. 666 – 684.
24. *Storozhuk E.A., Chernyshenko I.S.* Stress Distribution in Physically and Geometrically Nonlinear Thin Cylindrical Shells with Two Holes // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, N 11. – P. 1280 – 1287.
25. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Analytical-Numerical Solution of Static Problems for Noncircular Cylindrical Shells of Variable Thickness // Int. Appl. Mech. – 2017. – **53**, N 3. – P. 313–325.
26. *Storozhuk E.A., Yatsura A.V.* Exact Solutions of Boundary-Value Problems for Noncircular Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 4. – P. 386 – 397.
27. *Thai H.T., Kim S.E.* Free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory // Int. J. Mech. Sci. – 2010. – **52**, N 4. – P. 626 – 633.
28. *Ugrimov S.V.* Generalized theory of multilayer plates // Int. J. Solids Struct. – 2002. – **39**, N 4. – P. 819 – 839.
29. *Zak A.J., Ostachowicz W., Cartmell M.P.* Dynamics of multilayered composite plates with shape memory alloy wires // Trans ASME. J. Appl. Mech. – 2003. – **70**, N 3. – P. 313 – 327.

Надійшла 31.10.2023 Затверджена до друку 11.06.2024