О.М.Багно, Г.І.Щурук

ВПЛИВ ПІВПРОСТОРУ ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ НА ПОВЕРХНЕВУ НЕСТІЙКІСТЬ НЕСТИСЛИВОГО ПРУЖНОГО ШАРУ, ПІДДАНОГО СКІНЧЕННИМ ПОЧАТКОВИМ ДЕФОРМАЦІЯМ*

Інститут механіки ім. С.П.Тимошенка НАНУ,
вул. Нестерова, 3, 03057, Київ, Україна; e-mail: desc@inmech.kiev.ua

Abstract. The problem of propagation of the normal generalized Lamb waves in a predeformed incompressible elastic layer that interacts with a half-space of ideal compressible fluid is considered. The study is carried out based on the three-dimensional linearized equations of the theory of elasticity of finite deformations for the incompressible elastic layer and the three-dimensional linearized Euler equations for the half-space of ideal compressible fluid. A problem statement and approach, based on the representations of general solutions of the linearized equations for elastic solid and fluid are proposed. The dispersion equation, which describes the propagation of the generalized Lamb waves in a hydroelastic system is obtained. The dispersion curves for generalized Lamb waves are constructed over a wide range of frequencies. An effect of the finite initial deformations of elastic layer and the half-space of ideal compressible fluid on the phase velocities, dispersion of the generalized Lamb waves, and surface instability of the hydroelastic waveguide are analyzed. The numerical results are presented in the form of graphs, and their analysis is given.

Key words: dispersion of generalized Lamb waves, incompressible elastic layer, half-space of ideal compressible fluid, finite initial deformation, surface instability.

Вступ.

Хвилі Лемба знаходять все більш широке застосування як у фундаментальних теоретичних, так і у прикладних дослідженнях. Серед них відзначимо, перш за все, такі галузі як сейсмологія, сейсморозвідка, акустоелектроніка, дефектоскопія, а також розробка ультразвукових неруйнівних методів вимірювання та контролю напружень у матеріалах та елементах конструкцій [2, 12]. У більшості досліджень якісні та кількісні результати отримано, в основному, для жорстких (метали, органічне скло) стисливих тіл, які допускають малі початкові деформації [2, 4 – 11, 14, 15]. На відміну від стисливих нестисливі (гумоподібні, каучукоподібні) тіла є високоеластичними, величина початкової деформації яких може бути значною. У зв'язку з цим представляє певний теоретичний і важливий для практики інтерес дослідження впливу великих (скінченних) початкових деформацій нестисливого шару на швидкості мод Лемба при взаємодії його з півпростором ідеальної стисливої рідини, а також на поверхневу нестійкість гідропружного хвилеводу.

§1. Постановка задачі та основні співвідношення.

У даній роботі для дослідження поширення хвиль в пружному шарі, підданому великим (скінченним) початковим деформаціям і взаємодіючому з півпростором ідеальної стисливої рідини, залучаються моделі попередньо напруженого тіла та ідеальної стисливої рідини. При цьому використовуються тривимірні лінеаризовані рівняння

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

теорії пружності скінченних деформацій для пружного тіла та тривимірні лінеаризовані рівняння Ейлера для ідеальної стисливої рідини. Обрані постановки задач і метод основані на застосуванні представлень загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь руху пружного тіла та рідини, які запропоновані в роботах [2, 3].

Далі розглянемо такі динамічні процеси в гідропружній системі, при яких виникають додаткові значно менші початкових збурення деформацій. Досліджуємо гармонічні хвильові процеси малої амплітуди. При цьому приймемо, що пружне тіло перебуває в початковому напружено-деформованому стані. У рамках прийнятих моделей основні співвідношення для пружно-рідинної системи «попередньо напружене нестисливе пружне тіло – ідеальна стислива рідина» мають вигляд: [2, 3]:

$$\left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial z_i\partial z_\beta}-\delta_{j\alpha}\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_\alpha+\tilde{q}_{ij}\frac{\partial f}{\partial z_i}=0;\quad z_k\in V_1; \tag{1.1}$$

$$\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}=\lambda_i\lambda_\beta\kappa_{ij\alpha\beta};\quad \tilde{q}_{ij}=\lambda_i q_{ij};\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=1;\quad \tilde{q}_{ij}\frac{\partial u_j}{\partial z_i}=0;\quad z_k\in V_1; \tag{1.2}$$

$$\tilde{Q}_j\equiv N_i^0\left(\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}\frac{\partial u_\alpha}{\partial z_\beta}+\tilde{q}_{ij}f\right);\quad z_k\in S; \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p=0;\quad \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho^*}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0;\quad \frac{\partial p}{\partial\rho^*}=a_0^2; \tag{1.4}$$

$$p_{ij}=-\delta_{ij}p\ ;\ \tilde{P}_j=p_{ij}N_i^0\ ;\ a_0=\text{const}\ ,\ z_k\in V_2\ . \tag{1.5}$$

Вище прийнято наступні позначення: u_i – компоненти вектора зсувів пружного тіла $\boldsymbol{u}$; ρ – густина матеріалу пружного шару; λ_i – подовження (при $\lambda_i>1$) і укорочення (при $\lambda_i<1$) пружного шару в напрямках координатних осей; v_i – складові вектора збурень швидкості рідини $\boldsymbol{v}$; ρ^* і p – збурення густини та тиску в рідині; ρ_0 і a_0 – густина рідини і швидкість звуку в рідині в стані спокою; $\tilde{Q}_j$ і $\tilde{P}_j$ – компоненти напружень, відповідно, в пружному тілі та рідині; V_1 і V_2 – об'єми, які займають, відповідно, пружне тіло і рідина; S – поверхня контакту пружного і рідкого середовищ. При цьому специфіку взаємодії пружних і рідких середовищ відображають динамічні $\tilde{Q}_j=\tilde{P}_j$, $z_k\in S$ і кінематичні $\partial\boldsymbol{u}/\partial t=\boldsymbol{v}$, $z_k\in S$ граничні умови, які задаються на поверхні контакту S. Введені тензори $\tilde{\kappa}_{ij\alpha\beta}$ і $\tilde{q}_{ij}$ залежать від виду початкового стану та типу пружного потенціалу матеріалу твердого тіла. Вирази для обчислення складових цих тензорів наведено у роботі [4]. Там же запропоновані спрощення для різних варіантів теорії малих початкових деформацій.

Рівності (1.1) – (1.3) описують поведінку нестисливого пружного тіла. Малі коливання ідеальної стисливої рідини в стані спокою описують співвідношення (1.4), (1.5).

Далі припустимо, що ізотропне нелінійно-пружне тверде тіло, пружний потенціал якого є довільною двічі неперервно диференційованою функцією інваріантів тензора деформацій Гріна, займає об'єм ($-\infty<z_1<\infty$, $0\le z_2\le h$, $-\infty<z_3<\infty$) і контактує з півпростором ідеальної стисливої рідини ($-\infty<z_1<\infty$, $-\infty<z_2\le 0$, $-\infty<z_3<\infty$). Приймемо, що зовнішні сили, які діють на зазначені середовища, розподілені рівномірно вздовж осі Oz_3. У цьому випадку задача є плоскою і можна обмежитися вивченням процесу поширення хвиль у площині Oz_1z_2. Отже, зазначена задача зводиться до розв'язання системи рівнянь (1.1) – (1.5) при наступних граничних умовах:

$$\tilde{Q}_1\Big|_{z_2=h}=0;\quad \tilde{Q}_2\Big|_{z_2=h}=0;\quad \tilde{Q}_1\Big|_{z_2=0}=0;\quad \tilde{Q}_2\Big|_{z_2=0}=\tilde{P}_2\Big|_{z_2=0};\quad v_2\Big|_{z_2=0}=\frac{\partial u_2}{\partial t}\Big|_{z_2=0}. \tag{1.6}$$

§2. Методика розв'язування задачі.

Надалі для розв'язування задачі гідропружності скористаємося представленнями загальних розв'язків лінеаризованих рівнянь для пружних тіл і ідеальної стисливої рідини, запропонованими в роботах [2, 3]. Будемо досліджувати хвильові процеси в попередньо деформованих нестисливих пружних тілах, що взаємодіють з ідеальною стисливою рідиною, початковий стан яких є однорідним. У разі однорідного напружено-деформованого початкового стану для плоского випадку загальні розв'язки мають вигляд [2, 3]:

$$u_1 = -\frac{\partial^2 \chi_1}{\partial z_1 \partial z_2}; \quad u_2 = \lambda_1 q_1 \lambda_2^{-1} q_2^{-1} \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \chi_1; \quad v_1 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_1 \partial t}; \quad v_2 = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial z_2 \partial t};$$

$$f = \lambda_1^{-1} q_1^{-1} \left\{ \lambda_1^2 \left[\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 - \lambda_1 \lambda_2 q_1 q_2^{-1} \left(a_{12} + \mu_{12} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + \right.$$

$$\left. + \lambda_2^2 \left(\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0 \right) \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} \frac{\partial}{\partial z_2} \chi_1,$$

де введені функції χ_1 і χ_2 є розв'язками наступних рівнянь:

$$\left[\frac{\partial^4}{\partial z_1^4} + \frac{\lambda_2^4 q_2^2 \left(\lambda_1^2 \mu_{12} + s_{22}^0 \right)}{\lambda_1^4 q_1^2 \left(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0 \right)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^4} - \frac{\rho}{\lambda_1^2 \left(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0 \right)} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial t^2} + \right.$$

$$+ \frac{q_1 q_2^{-1} \left(\lambda_2^2 a_{22} + s_{22}^0 \right) + q_1^{-1} q_2 \left(\lambda_1^2 a_{11} + s_{11}^0 \right) - 2\lambda_1 \lambda_2 \left(a_{12} + \mu_{12} \right)}{\lambda_1^2 \lambda_2^{-2} \left(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0 \right) q_1 q_2^{-1}} \frac{\partial^4}{\partial z_1^2 \partial z_2^2} -$$

$$\left. - \frac{\lambda_2^2 q_2^2 \rho}{\lambda_1^4 q_1^2 \left(\lambda_2^2 \mu_{12} + s_{11}^0 \right)} \frac{\partial^4}{\partial z_2^2 \partial t^2} \right] \chi_1 = 0 \,; \; q_i = \lambda_i^{-1} \,; \; \lambda_1 \lambda_2 = 1 \,;$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial {z_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {z_2}^2} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \chi_2 = 0.$$

Тут введено такі позначення: a_{ij}, μ_{ij} – величини, що визначаються з рівнянь стану і залежать від виду пружного потенціалу [2, 3]; s_{ii}^0 – початкові напруження.

Для аналізу поширення збурень, гармонічно змінних в часі, розв'язки системи рівнянь визначаємо в класі біжучих хвиль

$$\chi_j = X_j \left(z_2 \right) \exp\left[i \left(k z_1 - \omega t \right) \right] \; \left(j = 1, 2 \right),$$

де k – хвильове число; ω – кругова частота; i – уявна одиниця ($i = \sqrt{-1}$).

Далі, застосовуючи метод Фур'є, приходимо до двох задач про власні значення для рівнянь руху пружного тіла та рідини. Розв'язуючи їх, визначаємо відповідні власні функції. Після підстановки загальних розв'язків в граничні умови (1.6) отримуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо довільних сталих. Виходячи з умови існування нетривіального розв'язку цієї системи, отримуємо дисперсійне рівняння

$$\det \left\| e_{lm} \left(c, \lambda_i, a_{ij}, \mu_{ij}, \rho, s_{ii}^0, \rho_0, a_0, \omega h / c_s \right) \right\| = 0 \quad (l, m = \overline{1, 5}), \tag{2.1}$$

де c – фазова швидкість хвиль в гідропружній системі; c_s $(c_s^2 = \mu/\rho)$ – швидкість хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла; μ – модуль зсуву матеріалу пружного тіла; h – товщина пружного шару.

Як відомо, в необмеженому нестисливому пружному тілі існує зсувна хвиля. В ідеальному стисливому рідкому середовищі поширюється поздовжня хвиля. Саме ці хвилі, взаємодіючи між собою на вільній граничній поверхні, а також на поверхні контакту середовищ, породжують складне хвильове поле в гідропружній системі.

Відзначимо, що отримане дисперсійне рівняння (2.1) не залежить від форми пружного потенціалу і отримано для нестисливих пружних тіл, підданих великим (скінченним) початковим деформаціям. Воно є найбільш загальним і з нього можна отримати співвідношення для ряду окремих випадків, розглянутих у роботах [2, 15].

Зокрема, якщо a_0 прямує до нескінченності, то (2.1) переходить в рівняння для визначення параметрів хвиль у разі взаємодії пружного шару з нестисливою ідеальною рідиною. При $\rho_0 = 0$ рівність (2.1) перейде в рівняння для визначення швидкостей хвиль Лемба [4]. Якщо додатково спрямувати h до нескінченності, отримаємо співвідношення для визначення швидкостей поверхневих хвиль Релея [2, 15]. При $\rho_0 \neq 0$ і $h \to \infty$ рівність перейде в рівняння, яке описує хвилі Стоунлі [2, 15].

Зазначені окремі випадки враховують наявність початкових деформацій в пружному шарі. Крім того, моделі, основані на різних варіантах теорії малих початкових деформацій, на рівняннях наближених прикладних двовимірних теорій як для попередньо напружених, так і для тіл без початкових деформацій, на лінійних співвідношеннях класичної теорії пружності, є окремими випадками задачі, яка розглядається в даній роботі, і випливають з неї при введенні додаткових припущень. Задачі, які були розглянуті в рамках моделі, що враховує початкові напруження, наведені у [2, 15]. Якщо прийняти $s_{ii}^0 = 0$ $(\lambda_1 = 1)$, то отримаємо рівності для ґрунтовно досліджених у рамках класичної теорії пружності хвиль Релея, Стоунлі – Шольте та Лемба.

§3. Числові результати та їх аналіз.

Розрахунки проводимо для гідропружної системи, яка складається з реальних пружного тіла і рідини. Для пружного шару вибираємо високоеластичну гуму, пружні властивості якої описуються пружним потенціалом Трелоара. Механічні параметри для цієї гідропружної системи приймаємо такими: пружний шар – $\rho = 1200$ кг/м^3, $\mu = 1{,}2 \cdot 10^6$ Па; півпростір рідини – $\rho_0 = 1000$ кг/м^3, $a_0 = 1459{,}5$ м/с, $\overline{a}_0 = a_0/c_s =$ $= 46{,}153442$. У цього хвилеводі матеріал пружного тіла (гума) є нестисливим, податливим і м'яким. Крім того, при розгляді припускаємо, що початковий напружений стан пружного шару є однорідним і задовольняє співвідношенням $s_{11}^0 \neq 0$, $s_{22}^0 = 0$. Як показано в роботі [2], при такому навантаженні немає аналогії між задачами в лінеаризованій та лінійній постановках. Тому результати для тіл з початковими напруженнями не можуть бути отримані з розв'язків відповідних лінійних задач.

Далі дисперсійне рівняння (2.1) розв'язуємо чисельно. Результати обчислень у вигляді графіків представлені на рис. 1 – 8.

Графіки на рис. 1 ілюструють вплив рідини на хвильові характеристики гідропружної системи. На ньому зображені дисперсійні криві для гідропружних хвилеводів, які відображають залежності безрозмірних величин фазових швидкостей мод Лемба $\overline{c}$ $(\overline{c} = c/c_s)$ від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти) $\overline{h}$ $(\overline{h} = \omega h/c_s)$. Суцільні криві отримані для пружного шару, який взаємодіє з півпростором рідини. Штрихові лінії відповідають випадку пружного шару, що не взаємодіє з рідиною. Графіки на цьому рисунку отримані для пружних шарів, не підданих початковим деформаціям $(\lambda_1 = 1)$.

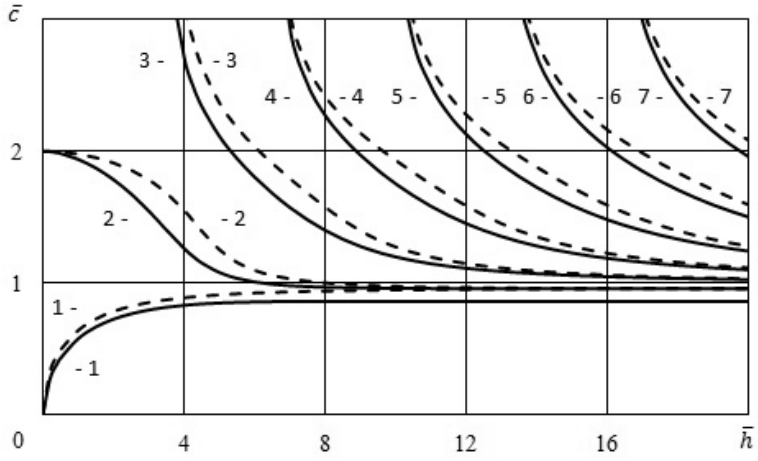


Рис. 1

З графіків, приведених на рис. 1, випливає, що для суто пружного хвилеводу ($\rho_0 = 0$ – штрихові лінії) швидкості першої (нульової антисиметричної) і другої (нульової симетричної) мод Лемба, які поширюються вздовж нижньої і верхньої вільних поверхонь шару, зі зростанням товщини пружного шару (частоти) $\bar{h}$ прямують до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$. При цьому нульова антисиметрична мода прямує до швидкості поверхневої хвилі $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = c_R/c_s = 0,9553303$) знизу, а швидкість нульової симетричної моди – до $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,9553303$) зверху.

У гідропружному хвилеводі ($\rho_0 \neq 0$ – суцільні лінії) при зростанні товщини пружного шару (частоти) $\bar{h}$ швидкість першої моди прямує до швидкості хвилі Стоунлі $\bar{c}_{st}$ ($\bar{c}_{st} = c_{st}/c_s = 0,859257$) знизу, а швидкість другої моди – до швидкості хвилі Релея $\bar{c}_R$ ($\bar{c}_R = 0,955318$) зверху. Моди вищого порядку як у гідропружній системі, так і в суто пружному шарі поширюються в його товщі з фазовими швидкостями, які зі збільшенням товщини (частоти) прямують до швидкості хвилі зсуву в матеріалі пружного тіла $\bar{c}_s$.

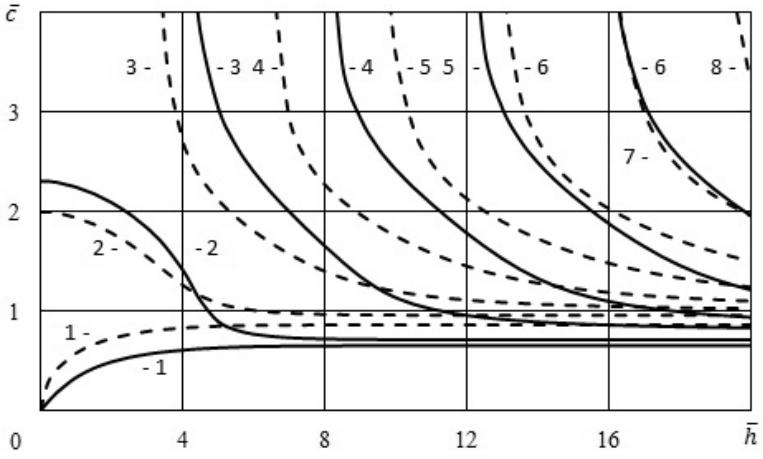


Рис. 2

Характер впливу попереднього деформування ($\lambda_1 = 0,8$) на фазові швидкості нормальних хвиль в пружно-рідинній системі ілюструють графіки на рис. 2, на яких представлені залежності безрозмірних величин фазових швидкостей узагальнених

мод Лемба $\overline{c}$ від безрозмірної величини товщини пружного шару (частоти) $\overline{h}$. Суцільні криві отримані для системи, пружний шар якої підданий початковому стисненню ($\lambda_1 = 0,8$). Штриховими лініями позначені дисперсійні криві, які відповідають гідропружному хвилеводу при відсутності початкових деформацій ($\lambda_1 = 1$).

Як видно із графіків для гідропружного хвилеводу, представлених на рис. 2, швидкості перших мод (хвилі типу Стоунлі) прямують до швидкостей хвиль Стоунлі $\overline{c}_{st}$ ($\overline{c}_{st} = 0,859257$ для $\lambda_1 = 1$ і $\overline{c}_{st} = 0,650184$ для $\lambda_1 = 0,8$) знизу, а швидкості других мод (поверхневі хвилі типу Релея) – до швидкостей хвиль Релея $\overline{c}_R$ ($\overline{c}_R = 0,955318$ для $\lambda_1 = 1$ і $\overline{c}_R = 0,709558$ для $\lambda_1 = 0,8$) зверху. Із графіків, наведених на рис. 2, випливає, що попередні деформації викликають зміну частот зародження узагальнених мод Лемба і зміщення їх дисперсійних кривих. Неважко бачити (суцільні лінії), що початкове стиснення ($\lambda_1 = 0,8$) призводить до зсуву критичних частот та дисперсійних кривих у короткохвильову частину спектра. При цьому на розглянутому діапазоні частот відбувається зменшення кількості узагальнених мод Лемба.

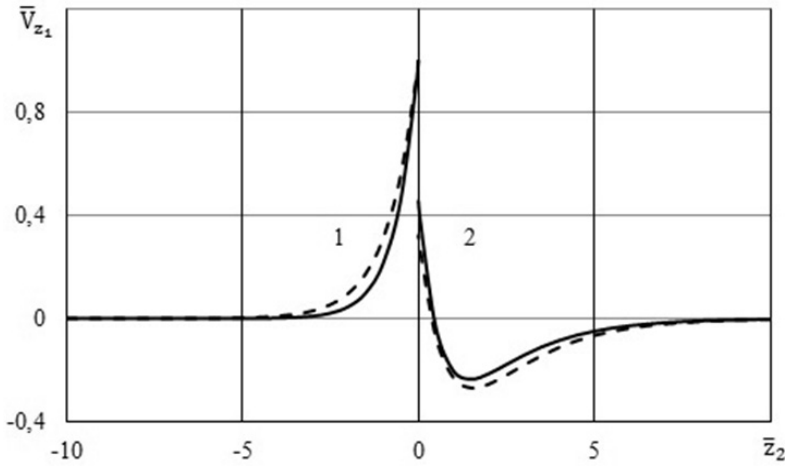


Рис. 3

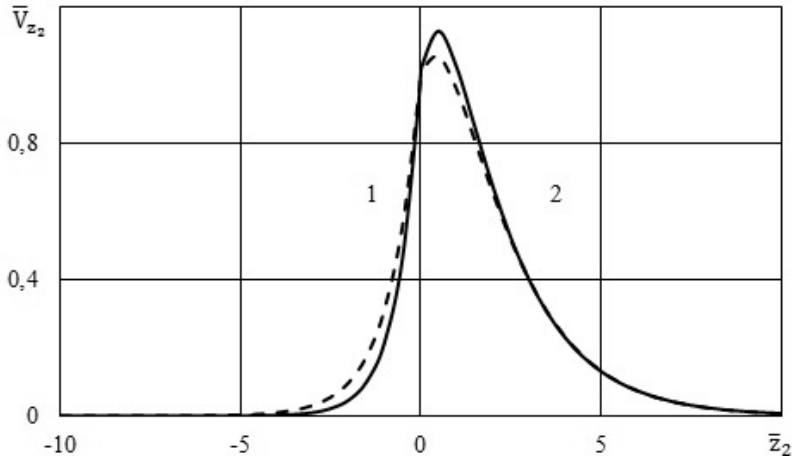


Рис. 4

На рис. 3, 4 наведено залежності безрозмірних величин поздовжніх $\overline{V}_{z_1}$ (рис. 3) і поперечних $\overline{V}_{z_2}$ (рис. 4) зміщень (швидкостей $\partial u_i / \partial t$ та v_i) від безрозмірної попереч-

ної координати $\bar{z}_2$ для поверхневої моди 1 (рис. 2). Графіки, представлені на рис. 3, 4, відображають розподіл зміщень (швидкостей) по товщині в приконтактній області шару з гуми $(0 \le z_2 \le 10)$ та води $(-10 \le z_2 \le 0)$. Вони отримані при частоті (товщині) пружного шару $\bar{h} = 20$. На цих рисунках суцільні лінії *1* і *2* відповідають попередньо стисненому $(\lambda_1 = 0,8)$ шару, а штрихові лінії – гідропружній системі при відсутності початкових деформацій $(\lambda_1 = 1)$.

З графіків розподілу амплітуд зміщень (швидкостей), представлених на рис. 3, 4, випливає, що рухи моди *1* при $\bar{h} = 20$ відбуваються як у пружному тілі, так і в рідині. При цьому глибина проникнення їх у пружний шар перевищує глибину проникнення в рідину. Зауважимо, що розрив поздовжніх зміщень в рідині (крива *1*) та пружному тілі (крива *2*) на межі контакту середовищ $(\bar{z}_2 = 0)$ обумовлений нев'язкістю (ідеальністю) рідини (рис. 3). З графіків також випливає, що попереднє стиснення пружного шару зменшує глибину проникнення рухів моди *1* у рідину.

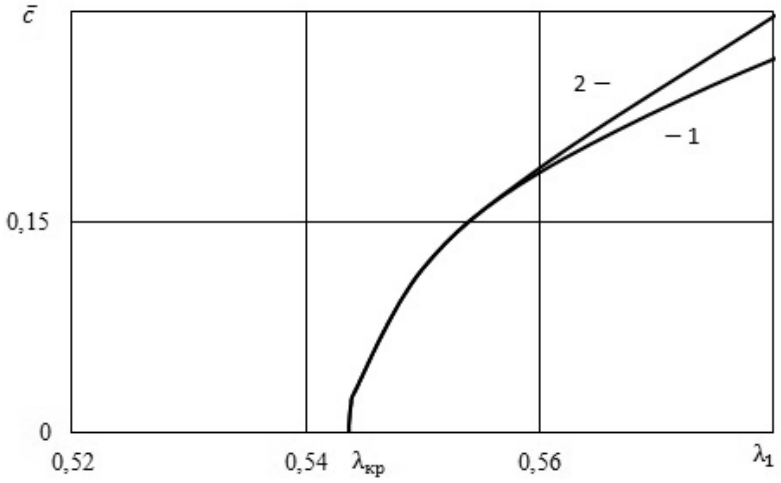


Рис. 5

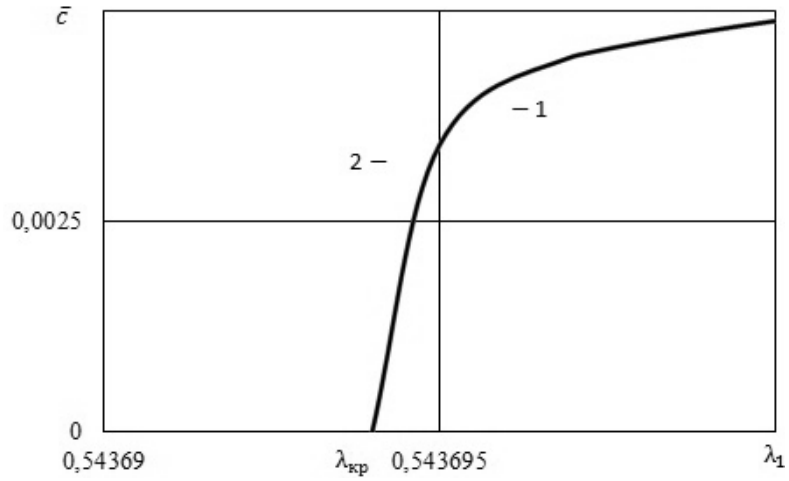


Рис. 6

Характер впливу попереднього деформування пружного шару на швидкості першої і другої мод Лемба ілюструють графіки на рис. 5 та рис. 6, на яких наведено залежності безрозмірних величин фазових швидкостей $\bar{c}$ цих мод від зміни величини

λ_1. Графіки, представлені на цих рисунках, отримані для пружного шару, не взаємодіючого з рідиною ($\rho_0 = 0$). На рис. 5 наведено результати обчислень для попередньо стиснутого $(0,52 \le \lambda_1 \le 0,58)$ пружного шару. Рис. 6 представляє значення фазових швидкостей цих мод для сильно стиснутого пружного шару $(0,54369 \le \lambda_1 \le 0,5437)$. Наведені на рис. 5, 6 графіки отримані для пружного шару з товщиною $\overline{h} = 5$.

Із графіків, наведених на рис. 5, 6, випливає, що стиснення пружного шару ($\lambda_1 < 1$) призводить до зменшення фазових швидкостей першої та другої мод Лемба та відмінностей між їх величинами. Тому графіки на рис. 5, які відображають поведінку цих мод для сильно стиснутого високоеластичного шару, зливаються в одну лінію.

Характер впливу попереднього деформування пружного шару в гідропружній системі на швидкості першої та другої узагальнених мод Лемба ілюструють графіки на рис. 7, 8, на яких представлені залежності величин фазових швидкостей $\overline{c}$ цих мод від зміни величини λ_1. На рис. 7 наведено результати обчислень для попередньо стиснутого $(\lambda_1 \le 1)$ пружного шару. Графіки рис. 8 представляють значення фазових швидкостей цих мод для сильно стиснутого пружного шару $(0,54369 \le \lambda_1 \le 0,5437)$. Наведені на рис. 7, 8 графіки отримані для пружного шару з товщиною $\overline{h} = 5$.

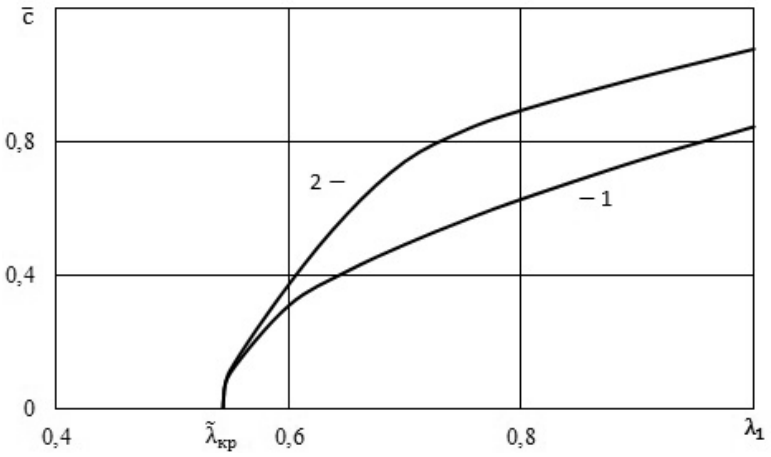


Рис. 7

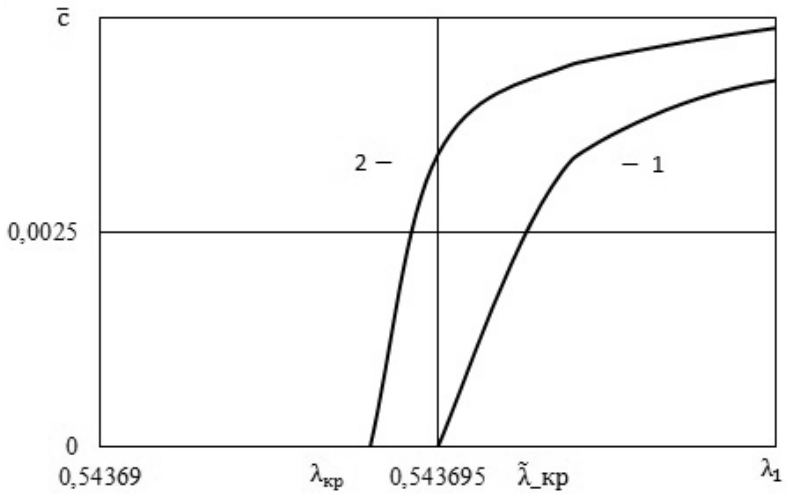


Рис. 8

Як видно із графіків для гідропружного хвилеводу, представлених на рис. 7, 8, стиснення пружного шару ($\lambda_1 < 1$) призводить до зменшення величин фазових швидкостей першої та другої квазілембівських мод. Але, на відміну від суто пружного шару, для гідропружної системи величини фазових швидкостей першої та другої мод приймають нульові значення при різних значеннях початкового стиснення: $\lambda_1 \approx$ $\approx 0,543695$ для першої моди та $\lambda_1 \approx 0,543694$ для другої моди.

§4. Вплив півпростору рідини на хвильовий процес.

Графічний матеріал, представлений на рис. 1, дозволяє отримати інформацію про вплив рідкого півпростору на такі хвильові характеристики гідропружних хвилеводів, як фазові швидкості та дисперсія узагальнених мод Лемба. З нього випливає, що півпростір рідини, взаємодіючи з пружним шаром, викликає зміну частот зародження мод та їх дисперсійних кривих. При цьому критичні частоти знижуються, а дисперсійні криві (суцільні лінії) зміщуються в довгохвильову частину спектра. Це призводить до того, що в гідропружному хвилеводі фазові швидкості мод стають меншими фазових швидкостей відповідних мод Лемба в суто пружному хвилеводі.

§5. Особливості впливу скінченних початкових деформацій на хвильові характеристики гідропружної системи.

У роботі [4] для пружного шару зі стисливого матеріалу, невзаємодіючого з рідиною, було вперше показано, що в пружному хвилеводі початкові напруження викликають зміну частот зародження хвиль Лемба і зміщення їх дисперсійних кривих. Це призводить до того, що величини фазових швидкостей мод у попередньо деформованому шарі можуть бути як менші, так і більші величин фазових швидкостей відповідних мод у тілі без початкових напружень. Цим обумовлено появу в спектрі пружного хвилеводу частот, при яких початкові напруження не впливають на величини фазових швидкостей ряду нормальних хвиль Лемба [4]. З графіків, приведених на рис. 1, 2, випливає, що зазначена закономірність має місце і для пружного шару з нестисливого матеріалу, причому як для невзаємодіючого, так і взаємодіючого з півпростором рідини. Неважко бачити, що для всіх мод Лемба, крім першої, існують частоти $\overline{h}$, при яких фазові швидкості $\overline{c}$ не залежать від початкового стиснення λ_1. Очевидно, що ця закономірність, яка вперше виявлена для стисливих тіл і описана у роботі [4], носить загальний характер і властива частотним спектрам пружних хвилеводів не тільки із різних матеріалів, але й гідропружним хвилеводам.

§6. Поверхнева нестійкість гідропружної системи.

Графіки для суто пружного шару, зображені на рис. 5, 6, показують, що при стисканні та при $\lambda_1 \approx 0,54$ (більш точне значення $\lambda_1 \approx 0,543694$), тобто при зменшенні довжини високоеластичного нестисливого тіла на 46%, величини фазових швидкостей першої та другої мод стають рівними нулю. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану для високоеластичного нестисливого неогуківського тіла при $\lambda_1 \approx 0,54$ виникає явище поверхневої нестійкості. Зазначимо, що це значення збігається з раніше отриманим в теорії стійкості [1] і відповідає значенню параметра критичного укорочення $\lambda_{кр}$.

Із графіків, наведених на рис. 8, випливає, що в гідропружному хвилеводі фазова швидкість першої моди приймає нульове значення при $\lambda_1 \approx 0,543695$. Це свідчить про те, що в умовах плоского напружено-деформованого початкового стану поверхня пружного шару гідропружної системи, яка контактує з півпростором рідини, при $\tilde{\lambda}_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543695$ втрачає поверхневу стійкість. У другої поверхні пружного шару, яка є вільною, явище поверхневої нестійкості виникає при $\lambda_{кр} = \lambda_1 \approx 0,543694$. Ця

різниця між $\tilde{\lambda}_{кр}$ та $\lambda_{кр}$ свідчить про те, що наявність півпростору ідеальної стисливої рідини призводить до зниження порога поверхневої нестійкості гідропружного хвилеводу і до виникнення її раніше при меншому стисненні ($\tilde{\lambda}_{кр} > \lambda_{кр}$).

Зазначимо також, що в механіці руйнування [13] встановлено, що втрата поверхневої стійкості пружного тіла є початком (стартовим етапом) руйнування всієї конструкції. Тому визначенню величини параметра критичного укорочення приділяється особлива увага не тільки в теорії стійкості, але й у теорії руйнування пружних тіл.

Разом з тим, проведені розрахунки показали, що навантаження пружного шару півпростором ідеальної стисливої рідини такої як вода суттєво не змінює умови виникнення поверхневої нестійкості, оскільки величини параметрів критичного укорочення суто пружного шару $\lambda_{кр}$ і гідропружної системи $\tilde{\lambda}_{кр}$ відрізняються на малу величину.

Висновок.

Запропоновано підхід для розгляду явища поверхневої нестійкості в гідропружному хвилеводі, який складається з півпростору ідеальної стисливої рідини та високоеластичного нестисливого пружного шару, підданого скінченним деформаціям. Аналіз отриманих числових результатів показав, що вплив великих початкових деформацій пружного шару на характеристики хвильового процесу в гідропружній системі проявляється не тільки кількісно, але і якісно. Скінченні попередні деформації можуть призвести не тільки до зміни величин фазових швидкостей та дисперсійних властивостей хвиль, але і до більш істотної зміни параметрів хвильового процесу в гідропружній системі в цілому. В результаті їх дії в пружно-рідинному хвилеводі може виникнути явище поверхневої нестійкості, яке призводить до припинення процесу поширення хвиль і перенесення хвильової енергії. Встановлено, що наявність півпростору ідеальної стисливої рідини призводить до зниження порогу поверхневої нестійкості нестисливого пружного шару і виникнення її раніше при меншому стисненні. Проведені дослідження та розрахунки показали, що навантаження пружного шару півпростором ідеальної стисливої рідини такої як вода істотно не змінює умови виникнення поверхневої нестійкості гідропружної системи. Встановлено, що величини параметрів критичного укорочення пружного шару та гідропружної системи відрізняються на малу величину.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок бюджетної програми «Підтримка пріоритетних напрямків наукових досліджень» (КПКВК 6541230).

РЕЗЮМЕ. Дано постановку та запропоновано розв’язок задачі про поширення нормальних хвиль у нестисливому пружному шарі, який взаємодіє з півпростором ідеальної стисливої рідини. На основі тривимірних лінеаризованих рівнянь теорії пружності скінченних деформацій для твердого тіла та тривимірних лінеаризованих рівнянь Ейлера для ідеальної стисливої рідини побудовано дисперсійні криві нормальних узагальнених хвиль у гідропружній системі в широкому діапазоні частот. Проаналізовано вплив скінченних початкових деформацій у нестисливому пружному шарі, а також півпростору ідеальної стисливої рідини на фазові швидкості, дисперсію узагальнених мод та поверхневу нестійкість гідропружного хвилеводу. Числові результати наведено у вигляді графіків та дано їх аналіз.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: узагальнені хвилі Лемба, фазова швидкість, нестисливий пружний шар, півпростір ідеальної стисливої рідини, скінченні початкові деформації, поверхнева нестійкість.

1. *Гузь А.Н.* Устойчивость упругих тел при конечных деформациях. – Киев: Наук. думка, 1973. – 272 с.
2. *Гузь А.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: в 2-х частях. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2016. – 501 с., – 505 с.

3. *Гузь А.Н.* Введение в динамику сжимаемой вязкой жидкости. – Saarbrucken: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2017. – 244 с.
4. *Гузь А.Н., Жук А.П., Махорт Ф.Г.* Волны в слое с начальными напряжениями. – Киев: Наук. думка, 1976. – 104 с.
5. *Akbarov S.D., Bagirov E.T.* Dispersion of the axisymmetric waves propagating in the hydro-elastic system consisting of the pre-strained highly elastic plate, compressible inviscid fluid, and rigid wall // Archive of Applied Mechanics. – 2023. – **93**, N 2. – P. 861 – 879.
6. *Akbarov S.D., Bagirov E.T.* Dispersion of axisymmetric longitudinal waves propagating in an inhomogeneous prestressed hollow cylinder immersed in an inviscid compressible fluid // J. of Sound and Vibration. – 2024. – **569**. **–** 118097.
7. *Akbarov S. D., Emiroglu I., Tasci F.* The Lamb's problem for a half-space covered with the pre-stretched layer // Int. J. Mech. Sci. – 2005. – N 9. – P. 1326 – 1349.
8. *Akbarov S.D., Negin M.* Attenuation of quasi-Lamb waves in a hydroelastic system «elastic plate plus compressible viscous fluid plus rigid wall» // Structural Engineering and Mechanics. – 2022. – **81**, N 4. – P. 443 – 459
9. *Akbarov S. D., Ozaydin O.* The effect of initial stresses on harmonic stress fields within the stratified half-plane // European J. Mech., A/Solids, – 2001. – **20**, N 3. – P. 385 – 396.
10. *Akbarov S.D., Ozisik M.* The influence of the third order elastic constants to the generalized Rayleigh wave dispersion in a pre-stressed stratified half-plane // Int. J. Engng. Sci. – 2003. – **41**, N 17. – P. 2047 – 2061.
11. *Bagno O.M.* Effect of Prestresses on Generalized Lamb Waves in an Elastic Compressible Layer Interacting with a Viscous Liquid Layer // Int. Appl. Mech. – 2023. – **59**, N 4. – P. 417 – 428.
12. *Guz A.N.* Ultrasonic Nondestructive Method for Stress Analysis of Structural Members and Near-Surface Layers of Materials: Focus on Ukrainian Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2014. – **50**, N 3. – P. 231 – 252.
13. *Guz A.N.* Nonclassical Problems of Fracture/Failure Mechanics: on the Occasion of the 50th Anniversary of the Research (Review) // Int. Appl. Mech. – 2019. – **55**, N 2. – P. 129 – 174.
14. *Guz A.N., Bagno A.M.* Effect of the Initial Stresses on Waves in the System Consisting of a Viscous Fluid Layer and a Compressible Elastic Half-Space // Int. Appl. Mech. – 2021. – **57**, N 1. – P. 1 – 10.
15. *Guz A.N., Zhuk A.P., Bagno A.M.* Dynamics of Elastic Bodies, Solid Particles, and Fluid Parcels in a Compressible Viscous Fluid (Review) // Int. Appl. Mech. – 2016. – **52**, N 5. – P. 449 – 507.

Надійшла 30.10.2023 Затверджена до друку 11.06.2024