О.Р.Гачкевич[1], Р.С.Мусій[2], Н.Б.Мельник[2]

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕРМОПРУЖНОЇ ПОВЕДІНКИ БАГАТОШАРОВИХ ЕЛЕКТРОПРОВІДНИХ ЦИЛІНДРИЧНИХ ТІЛ ЗА ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНИХ ІМПУЛЬСІВ*

[1] *Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАНУ, вул. Наукова 3б, 79060, Львів, Україна; e-mail: dept13@iaprnm.lviv.ua*
[2] *Національний університет «Львівська політехніка» вул. С. Бандери 12, 79013, Львів, Україна; e-mail: nataliia.b.melnyk@lpnu.ua*

Abstract. A physical and mathematical model is proposed for studying the thermal stress state, performance, and properties of the contact connection of a multilayer electrically conductive hollow cylinder under the action of a non-stationary electromagnetic field. The problem of thermomechanics is formulated and the determining functions (axial component of the magnetic field intensity vector, temperature, and radial displacements) are found using the polynomial approximation of their distributions along the radial coordinate in each constituent layer of the cylinder. The thermomechanical behavior, performance, and properties of the contact connection of a two-layer electrically conductive hollow cylinder under the action of an electromagnetic impulse are numerically analyzed.

Key words: multi-layered hollow electroconductive cylinder, electromagnetic impulse, bearing capacity, contact connection properties.

Вступ.

У сучасних технологіях обробки металевих елементів конструкцій застосовують електромагнітну обробку з допомогою усталених та квазіусталених електромагнітних полів (ЕМП) [5]. Зокрема, такі поля використовують в технологіях індукційного нагріву [3, 10, 11]. Все частіше знаходить застосування магніто-імпульсна обробка електропровідних елементів конструкцій. Для цього використовують електромагнітні імпульси (ЕМІ) мілі- та мікросекундної тривалості, що створюють з допомогою конденсаторно-соленоїдальних систем багаторазового використання [8, 9, 12]. Експериментально встановлено, що дія ЕМІ на електропровідні тіла проявляється двома фізичними факторами: теплом Джоуля і пондеромоторними силами, які зумовлюють виникнення в них нестаціонарних температурних полів і динамічних напружень [1, 7].

У літературі описано математичні моделі однорідних і кусково-однорідних тіл за нестаціонарних силових і теплових навантажень [2, 4, 13], а також за дії імпульсних ЕМП [1]. Досліджено термомеханічну поведінку і роботоздатність однорідних електропровідних тіл канонічної форми за дії імпульсних ЕМП характерних типів [1]. У роботі [6] приведено опис фізико-математичної моделі для визначення термонапруженого стану багатошарових тіл канонічної форми за дії ІЕМП неруйнівного характеру, особливістю якої є врахування контактних умов на поверхнях з'єднання складових шарів розглядуваних тіл.

---

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

Метою даної роботи є побудова фізико-математичної моделі для визначення термонапруженого стану, роботоздатності і збереження властивостей контактних з'єднань складових шарів багатошарового електропровідного порожнистого циліндра за дії ЕМІ.

1. Вихідні положення фізико-математичної моделі.

Розглянемо довгий порожнистий електропровідний циліндр, що складається з N шарів. Фізико-математична модель для визначення термонапруженого стану багатошарових тіл канонічної форми за дії ІЕМП неруйнівного характеру викладена в [6]. Ця модель складається з чотирьох етапів. Опишемо кожен етап для випадку багатошарового електропровідного циліндричного тіла.

На першому етапі в кожному n-му $(n=\overline{1,N})$ складовому шарі циліндра зі співвідношень Максвелла визначається нестаціонарне ЕМП, яке описується вектором напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}$, а також зумовлені ним тепло Джоуля $Q^{(n)}$ та пондеромоторні сили $\vec{F}^{(n)}$. Для цього враховуємо задані граничні умови на зовнішніх поверхнях першого і останнього шарів та умови ідеального електромагнітного контакту на всіх поверхнях з'єднання складових шарів розглядуваного циліндра.

На другому етапі з рівняння теплопровідності, в якому тепло Джоуля $Q^{(n)}$ є об'ємним джерелом тепла, визначається нестаціонарне температурне поле $T^{(n)}$ в кожному n-му складовому шарі циліндра за умов конвективного теплообміну з довкіллям на зовнішніх поверхнях першого і останнього шарів та ідеального теплового контакту на всіх поверхнях з'єднання складових шарів. За знайденими температурою $T^{(n)}$ та пондеромоторною силою $\vec{F}^{(n)}$ на третьому етапі визначаємо вектор переміщень $\vec{U}^{(n)}$ та тензор динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ в кожному n-му складовому шарі циліндра.

Для оцінки роботоздатності циліндра на четвертому етапі визначаємо інтенсивності $\sigma_i^{(n)}$ сумарних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}=\hat{\sigma}^{(n)Q}+\hat{\sigma}^{(n)F}$, зумовлених теплом Джоуля і пондеромоторними силами [1, 3]. Ці інтенсивності напружень в кожному n-му складовому шарі циліндра обчислюються за формулою [1]

$$\sigma_i^{(n)}=\sqrt{(3I_2(\hat{\sigma}^{(n)})-I_1^2(\hat{\sigma}^{(n)}))/2}. \tag{1}$$

Тут $I_j(\hat{\sigma}^{(n)})$ – J-й інваріант тензора напружень. Тоді порівнюємо величину інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ з межею пружного деформування $\sigma_d{}^{(n)}$ матеріалу n-го шару. Якщо хоча б в одному з n складових шарів виконується умова [6]

$$\max \sigma_i^{(n)} \le \sigma_d{}^{(n)}, \tag{2}$$

то розглядуваний багатошаровий циліндр втрачає роботоздатність в цілому, як конструктивний елемент. Тут $\sigma_d{}^{(n)}$ – межа плинності матеріалу n-го шару циліндра. Умова (2) відповідає умові Губера-Мізеса [13] для ізотропного тіла.

Важливою є проблема збереження властивостей контактного з'єднання складових шарів циліндра. Для того, щоб оцінити межі збереження цих властивостей, порівнюємо величини інтенсивностей напружень $\sigma_i^{(n)*}$ на поверхні контакту n-го і $(n+1)$-го його складових шарів з межею міцності $\sigma_M{}^{(n)}$ n-го контактного з'єднання. Властивості n-го контактного з'єднання зберігаються, якщо виконується умова [6]

$$\sigma_i^{(n)*} \le \sigma_M{}^{(n)}. \tag{3}$$

Величини $\sigma_d{}^{(n)}$ та $\sigma_M{}^{(n)}$ для використовуваних конструкційних матеріалів складових шарів відомі з експериментів.

2. Початково-крайові задачі для визначення ЕМП, температури та термонапруженого стану багатошарових електропровідних циліндричних тіл.

Сформулюємо плоску осесиметричну початково-крайову задачу термомеханіки для довгого багатошарового електропровідного порожнистого циліндра за дії однорідного нестаціонарного ЕМП. Дія ЕМП задається значеннями осьової компоненти $H_z^{(n)}(r,t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$ на зовнішніх поверхнях $r=r_0$ першого і $r=r_N$ останнього складових шарів циліндра

$$H_z^{(1)}(r_0,t)=H_z^{-}(t);\quad H_z^{(N)}(r_N,t)=H_z^{+}(t). \tag{4}$$

Тут $H_z^{\pm}(t)$ – задані функції часу t.

В n-му $(n=\overline{1,N})$ шарі циліндра функцію $H_z^{(n)}(r,t)$ визначаємо з рівняння

$$\frac{\partial^2 H_z^{(n)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}-\sigma_n\mu_n\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial t}=0. \tag{5}$$

Тут σ_n, μ_n - коефіцієнт електропровідності та магнітна проникливість матеріалу n-го складового шару циліндра. Рівняння (5) розв'язуємо за крайових умов (4) на зовнішніх поверхнях $r=r_0$ першого і $r=r_N$ останнього складових шарів циліндра та умов ідеального електромагнітного контакту на поверхні $r=r_n$ з'єднання n-го і $(n+1)$-го його складових шарів [6]

$$H_z^{(n)}(r_n,t)=H_z^{(n+1)}(r_n,t);\quad \frac{\partial H_z^{(n)}(r_n,t)}{\partial r}=\frac{\sigma_n}{\sigma_{n+1}}\frac{\partial H_z^{(n+1)}(r_n,t)}{\partial r}\quad (n=\overline{1,N-1}),$$

а також при нульових початкових умовах

$$H_z^{(n)}(r,0)=0\quad \left(n=\overline{1,N}\right).$$

За знайденою функцією $H_z^{(n)}(r,t)$ визначаємо питомі густини тепла Джоуля $Q^{(n)}(r,t)$ і радіальної компоненти $F_r^{(n)}(r,t)$ вектора пондеромоторних сил $\vec{F}^{(n)}$

$$Q^{(n)}=\frac{1}{\sigma_n}\left(\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}\right)^2; \tag{6}$$

$$F_r^{(n)}=-\mu_n H_z^{(n)}\frac{\partial H_z^{(n)}}{\partial r}. \tag{7}$$

Температурне поле $T^{(n)}(r,t)$ в n-му шарі циліндра, зумовлене теплом Джоуля $Q^{(n)}(r,t)$, визначаємо з рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T^{(n)}}{\partial r}-\frac{1}{\kappa_n}\frac{\partial T^{(n)}}{\partial t}=-\frac{Q^{(n)}}{\lambda_n}. \tag{8}$$

Тут κ_n, λ_n – коефіцієнти температуро- і теплопровідності матеріалів n-го шару. Рівняння (8) розв'язуємо за граничних умов конвективного теплообміну на зовнішніх поверхнях першого і останнього складових шарів циліндра та умов ідеального теплового контакту на поверхні $r=r_n$ з'єднання n-го і $(n+1)$-го його складових шарів [6]

$$T^{(n)}(r_n,t)=T^{(n+1)}(r_n,t);\quad \frac{\partial T^{(n)}(r_n,t)}{\partial r}=\frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}\frac{\partial T^{(n+1)}(r_n,t)}{\partial r}\quad (n=\overline{1,N-1}),$$

а також нульових початкових умовах

$$T^{(n)}(r,0)=0 \quad (n=\overline{1,N}).$$

Радіальну компоненту $u_r^{(n)}(r,t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$ для розглядуваного багатошарового циліндра за знайденими температурою $T^{(n)}(r,t)$ та пондеромоторною силою $F_r^{(n)}(r,t)$ визначаємо з рівняння [4]

$$\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}-\frac{1}{r^2}u_r^{(n)}-\frac{1}{c_{1n}^2}\frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial t^2}=\alpha_n\frac{1+\nu_n}{1-\nu_n}\frac{\partial T^{(n)}}{\partial r}-\frac{(1+\nu_n)(1-2\nu_n)}{E_n(1-\nu_n)}F_r^{(n)}. \quad (9)$$

Тут $c_{1n}=\left(E_n(1-\nu_n)\big/\left(\rho_n(1+\nu_n)(1-2\nu_n)\right)\right)^{-1/2}$ – швидкість пружних хвиль розширення в n-му складовому шарі циліндра; E_n, ν_n, ρ_n - модуль Юнга, коефіцієнт Пуассона та густина матеріалу n-го складового шару циліндра. Рівняння (9) розв'язуємо за крайових умов на зовнішніх поверхнях першого і останнього шарів

$$(1-\nu_1)\frac{\partial u_r^{(1)}}{\partial r}+\nu_1\frac{1}{r}u_r^{(1)}-\alpha_1(1+\nu_1)T^{(1)}=0;$$

$$(1-\nu_N)\frac{\partial u_r^{(N)}}{\partial r}+\nu_N\frac{1}{r}u_r^{(N)}-\alpha_N(1+\nu_N)T^{(N)}=0$$

та умов ідеального механічного контакту на поверхні $r=r_n$ з'єднання n-го і $(n+1)$-го його складових шарів [6]

$$u_r^{(n)}=u_r^{(n+1)}\quad (1-\nu_n)\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}+\nu_n\frac{1}{r}u_r^{(n)}-\alpha_n(1+\nu_n)T^{(n)}=$$

$$=\frac{E_{n+1}(1+\nu_n)(1-2\nu_n)}{E_n(1+\nu_{n+1})(1-2\nu_{n+1})}\left[(1-\nu_{n+1})\frac{\partial u_r^{(n+1)}}{\partial r}+\nu_{n+1}\frac{1}{r}u_r^{(n+1)}-\alpha_{n+1}(1+\nu_{n+1})T^{(n+1)}\right],$$

а також нульових початкових умов

$$u_r^{(n)}(r,0)=0;\quad \frac{\partial u_r^{(n)}(r,0)}{\partial t}=0.$$

Компоненти $\sigma_{jj}^{(n)}$ $(j=r,\varphi,z)$ тензора динамічних напружень $\hat{\sigma}^{(n)}$ за знайденими компонентою $u_r^{(n)}$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$ і температурою $T^{(n)}$ обчислюємо за формулами [4]

$$\sigma_{rr}^{(n)}=\frac{E_n}{(1+\nu_n)(1-2\nu_n)}\left[(1-\nu_n)\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}+\nu_n\frac{1}{r}u_r^{(n)}-\alpha_n(1+\nu_n)T^{(n)}\right]; \quad (10)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}=\frac{E_n}{(1+\nu_n)(1-2\nu_n)}\left[(1-\nu_n)\frac{u_r^{(n)}}{r}+\nu_n\frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial r}-\alpha_n(1+\nu_n)T^{(n)}\right];$$

$$\sigma_{zz}^{(n)}=\nu_n(\sigma_{rr}^{(n)}+\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)})-\alpha_n E_n T^{(n)}.$$

За обчисленими компонентами $\sigma_{jj}^{(n)}$ $(j=r,\varphi,z)$ за формулою (1) визначаємо інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в кожному n-му складовому шарі циліндра. Далі за формулами (2), (3) оцінюємо роботоздатність розглядуваного циліндра та збереження властивостей його кожного n-го контактного з'єднання.

3. Побудова загальних розв'язків сформульованих початково-крайових задач для багатошарового електропровідного порожнистого циліндра за однорідної нестаціонарної електромагнітної дії.

Методика побудови розв'язків сформульованих вище початково-крайових задач, що описують ЕМП, температуру і напружений стан багатошарового порожнистого циліндра, використовує апроксимацію визначальних функцій $\Phi^{(n)}(r,t)=\left\{H_z^{(n)}(r,t),\right.$ $\left.T^{(n)}(r,t),u_r^{(n)}(r,t)\right\}$ в n-му складовому шарі циліндра поліномами відповідного p-го степеня за радіальною змінною r [4, 9]

$$\Phi^{(n)}(r,t)=\sum_{i=0}^{p}a_i^{\Phi(n)}(t)\,r^i. \tag{11}$$

Розподіл визначальних функцій $\Phi^{(n)}(r,t)$ в першому $(n=1)$ та останньому $(n=N)$ шарах циліндра апроксимуємо квадратичними поліномами $(p=2)$, а у всіх інших $(n=\overline{2,N-1})$ шарах – лінійними поліномами за радіальною змінною r $(p=1)$. Такий підбір апроксимаційних поліномів дає змогу задовольнити крайові умови на зовнішніх поверхнях циліндра та на поверхнях з'єднання його складових шарів.

Коефіцієнти $a_i^{\Phi(n)}(t)$ апроксимаційних поліномів (11) визначаємо через інтегральні (сумарні по пакету $n=\overline{1,N}$ шарів) характеристики $\Phi_s(t)\,(s=1,2)$ визначальних функцій $\Phi^{(n)}(r,t)$

$$\Phi_s(t)=\sum_{n=1}^{N}\int_{r_{n-1}}^{r_n}\Phi^{(n)}(r,t)\,r^{s+l}dr \tag{12}$$

та задані крайові умови на зовнішніх поверхнях першого і останнього складових шарів циліндра та на поверхнях з'єднання кожного n-го і $(n+1)$-го його складових шарів. Тут $l=0$ при інтегруванні рівнянь (5) і (8); $l=1$ – для рівняння (9).

Вихідні рівняння (5), (8), (9) інтегруємо згідно формули (12) та враховуючи вирази (11). Отримуємо системи рівнянь для визначення інтегральних характеристик $H_{zs}(t)$ $(s=1,2)$ осьової компоненти $H_z^{(n)}(r,t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$, $T_s(t)$ $(s=1,2)$ температури $T^{(n)}(r,t)$, $u_{rs}(t)\,(s=1,2)$ радіальної компоненти $u_r^{(n)}(r,t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dH_{z1}(t)}{dt}-d_1H_{z1}(t)-d_2H_{z2}(t)=d_3H_z^-(t)+d_4H_z^+(t);\\
&\frac{dH_{z2}(t)}{dt}-d_5H_{z1}(t)-d_6H_{z2}(t)=d_7H_z^-(t)+d_8H_z^+(t);
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{dT_1}{dt}+d_1^TT_1+d_2^TT_2=\sum_{n=1}^{N}\frac{\kappa_n}{\lambda_n}\int_{r_{n-1}}^{r_n}Q^{(n)}(r,t)\,r^{l+1}dr;\\
&\frac{dT_2}{dt}+d_3^TT_1+d_4^TT_2=\sum_{n=1}^{N}\frac{\kappa_n}{\lambda_n}\int_{r_{n-1}}^{r_n}Q^{(n)}(r,t)\,r^{l+2}dr;
\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2u_{r1}}{dt^2}-d_1^*u_{r1}-d_2^*u_{r2}=W_1^*(t);\\
&\frac{d^2u_{r2}}{dt^2}-d_3^*u_{r1}-d_4^*u_{r2}=W_2^*(t).
\end{aligned} \tag{15}$$

Коефіцієнти $d_{1\div 8}$, $d^{T}_{1\div 4}$, $d^{*}_{1\div 4}$ визначаються через геометричні параметри та фізико-механічні характеристики складових шарів циліндра, $W^{*}_{s}(t)$ ($s=1,2$) – праві частини рівнянь (9), проінтегровані згідно (12) з урахуванням виразів $T^{(n)}$ і $F^{(n)}_{r}$ на поверхнях $r=r_n$ ($n=\overline{1,N-1}$) з'єднання складових шарів циліндра.

Системи рівнянь (13) – (15) разом з нульовими початковими умовами на інтегральні характеристики визначальних функцій складають відповідні задачі Коші на ці характеристики. Для отримання загальних розв'язків задач Коші використовуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом. Ці розв'язки записуємо у вигляді згорток функцій, що описують задані крайові умови на визначальні функції та однорідні розв'язки систем рівнянь (13) – (15). Отримуємо вирази відповідної дотичної компоненти $H^{(n)}_{z}(z,t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}$

$$H^{(n)}_{z}(r,t)=$$

$$=\sum_{i=0}^{p}\left\{\sum_{s=1}^{2}a^{(n)}_{is}\sum_{k=1}^{2}\int_{0}^{t}\left[A_{s1}(k)H^{-}_{z}(\tau)+A_{s2}(k)H^{+}_{z}(\tau)\right]e^{p_k(t-\tau)}d\tau+a^{(n)}_{i3}H^{-}_{z}(t)+a^{(n)}_{i4}H^{+}_{z}(t)\right\}r^{i}, \tag{16}$$

температури

$$T^{(n)}(r,t)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{s=1}^{2}\left(b^{(n)}_{ks}\sum_{m=1}^{2}\int_{0}^{t}\left[B_{s1}(m)W^{Q}_{1}(\tau)+B_{s2}(m)W^{Q}_{2}(\tau)\right]e^{p_m(t-\tau)}d\tau\right)r^{k} \tag{17}$$

та радіальної компоненти $u^{(n)}_{r}(r,t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$

$$u^{(n)}_{r}(r,t)=\sum_{i=0}^{p}\left\{\sum_{s=1}^{2}c^{(n)}_{s}\sum_{\beta=1}^{4}\int_{0}^{t}\left[R^{*}_{s1}(\beta)W^{*}_{1}(\tau)+R^{*}_{s2}(\beta)W^{*}_{2}(\tau)\right]e^{p_\beta(t-\tau)}d\tau\right\}r^{i}. \tag{18}$$

Тут $A_{sj}(k)$, $B_{sj}(m)$, $R^{*}_{sj}(\beta)$ ($s,j=1,2$) – вирази, що залежать від коренів p_k, p_m, p_β відповідних характеристичних рівнянь задач для визначення функцій $H^{(n)}_{z}$, $T^{(n)}$ та $u^{(n)}_{r}$. За відомими виразами (18) функцій $u^{(n)}_{r}(r,t)$ зі співвідношень (10) визначаємо радіальну $\sigma^{(n)}_{rr}$, колову $\sigma^{(n)}_{\varphi\varphi}$ та осьову $\sigma^{(n)}_{zz}$ компоненти тензора напружень в кожному n-му складовому шарі циліндра.

4. Розв'язки початково-крайових задач для двошарового електропровідного порожнистого циліндра за дії ЕМІ.

На основі описаної вище методики записуємо розв'язки початково-крайових задач електродинаміки, теплопровідності і термопружності для двошарового електропровідного порожнистого циліндра за однорідної дії ЕМІ.

Дію ЕМІ задаємо значеннями осьової компоненти $H^{(n)}_{z}(r,t)$ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H}^{(n)}$ на внутрішній $r=r_0$ і зовнішній $r=r_2$ поверхнях розглядуваного циліндра у вигляді:

$$H_z(r_0,t)=H^{-}_{z}(t);\quad H_z(r_2,t)=H^{+}_{z}(t).$$

За умов однорідної дії ЕМІ функції $H^{\pm}_{z}(t)$ математично описуємо виразом [1]

$$H^{\pm}_{z}(t)=kH_0(e^{-\beta_1 t}-e^{-\beta_2 t}). \tag{19}$$

Тут k – нормувальний множник; H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі; β_1 і β_2 – параметри, що відповідають часам фронтів наростання t_{incr} і спадання t_{decr} ЕМІ.

Опис функцій $H_z^{\pm}(t)$ виразом (19) відповідає часовій залежності ЕМІ, створюваних конденсаторно-соленоїдальними системами [8, 9, 12].

На основі отриманих загальних розв'язків (16), (17), (18) задачі термомеханіки для розглядуваного циліндра за однорідної нестаціонарної електромагнітної дії записуємо розв'язки цієї задачі за дії ЕМІ. Підставляємо вираз (19) у формули (16) та враховуємо вираз (11). Отримуємо компоненту $H_z^{(n)}(r,t)$ вектора $\vec{H}^{(n)}$ у вигляді

$$H_z^{(n)}(r,t)=\frac{k_0H_0}{2}\sum_{i=0}^{2}\left(e^{-\beta_1 t}B_{i1}^{(n)}+e^{-\beta_2 t}B_{i2}^{(n)}+e^{p_1 t}B_{i3}^{(n)}+e^{p_2 t}B_{i4}^{(n)}\right)r^i.$$

Тут коефіцієнти $B_{ij}^{(n)}(i=\overline{0,2},\ j=\overline{1,4})$ обчислюються за формулами:

$$B_{i1}^{(n)}=\sum_{k=1}^{2}\frac{-2C_{ik}^{(n)}}{\beta_1+p_k}+2\left(a_{i3}^{(n)}+a_{i4}^{(n)}\right);\quad B_{i2}^{(n)}=\sum_{k=1}^{2}\frac{2C_{ik}^{(n)}}{\beta_2+p_k}-2\left(a_{i3}^{(n)}+a_{i4}^{(n)}\right);$$

$$B_{i3}^{(n)}=2C_{i1}^{(n)}\left(\frac{1}{\beta_1+p_1}-\frac{1}{\beta_2+p_1}\right);\quad B_{i4}^{(n)}=2C_{i2}^{(n)}\left(\frac{1}{\beta_1+p_2}-\frac{1}{\beta_2+p_2}\right),$$

де

$$C_{ik}^{(n)}=a_{i1}^{(n)}\left(A_{11k}+A_{12k}\right)+a_{i2}^{(n)}\left(A_{21k}+A_{22k}\right).$$

Числові коефіцієнти $a_{is}^{(n)}$ $(i=\overline{0,2},\ s=\overline{1,4})$ визначаються через геометричні параметри та електрофізичні характеристики матеріалів складових шарів циліндра.

Тут коефіцієнти A_{sjk} $(s,j,k=1,2)$ мають вигляд

$$A_{11k}=\frac{(p_k-d_6)d_3+d_2d_7}{2p_k-(d_1+d_6)};\quad A_{12k}=\frac{(p_k-d_6)d_4+d_2d_8}{2p_k-(d_1+d_6)};$$

$$A_{21k}=\frac{(p_k-d_1)d_7+d_3d_5}{2p_k-(d_1+d_6)};\quad A_{22k}=\frac{(p_k-d_1)d_8+d_4d_5}{2p_k-(d_1+d_6)},$$

де p_k $(k=1,2)$ – корені характеристичного рівняння для системи рівнянь (13).

Питомі густини тепла Джоуля $Q^{(n)}(r,t)$ і радіальної компоненти $F_r^{(n)}(r,t)$ вектора пондеромоторних сил $\vec{F}^{(n)}$ через функцію $H_z^{(n)}(r,t)$ з урахуванням виразів (6), (7) визначаються за формулами:

$$Q^{(n)}(r,t)=\frac{1}{\sigma_n}\frac{k_0^2H_0^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}ij\sum_{l=1}^{10}C_{ijl}^{(n)}e^{\alpha_l t}r^{i+j-2};\tag{20}$$

$$F_r^{(n)}(r,t)=-\mu_n\frac{k_0^2H_0^2}{4}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}i\sum_{l=1}^{10}C_{ijl}^{(n)}e^{\alpha_l t}r^{i+j-1}.\tag{21}$$

Тут коефіцієнти $C_{ijl}^{(n)}$ $(i,j=1,2,\ l=\overline{1,10})$ обчислюються за формулами:

$$C_{ij1}^{(n)}=B_{i1}^{(n)}B_{j1}^{(n)};\quad C_{ij2}^{(n)}=B_{i1}^{(n)}B_{j2}^{(n)}+B_{i2}^{(n)}B_{j1}^{(n)};\quad C_{ij3}^{(n)}=B_{i1}^{(n)}B_{j3}^{(n)}+B_{i3}^{(n)}B_{j1}^{(n)};$$

$$C_{ij4}^{(n)} = B_{i1}^{(n)} B_{j4}^{(n)} + B_{i4}^{(n)} B_{j1}^{(n)}; \quad C_{ij5}^{(n)} = B_{i1}^{(n)} B_{j4}^{(n)} + B_{i4}^{(n)} B_{j1}^{(n)}; \quad C_{ij6}^{(n)} = B_{i2}^{(n)} B_{j4}^{(n)} + B_{i4}^{(n)} B_{j2}^{(n)};$$

$$C_{ij7}^{(n)} = B_{i3}^{(n)} B_{j4}^{(n)} + B_{i4}^{(n)} B_{j3}^{(n)}; \quad C_{ij8}^{(n)} = B_{i3}^{(n)} B_{j3}^{(n)}; \quad C_{ij9}^{(n)} = B_{i4}^{(n)} B_{j4}^{(n)}; \quad C_{ij10}^{(n)} = B_{i2}^{(n)} B_{j2}^{(n)}.$$

Коефіцієнти α_l ($l = \overline{1,10}$) мають вигляд:

$$\alpha_1 = -2\beta_1; \quad \alpha_2 = -(\beta_1 + \beta_2); \quad \alpha_3 = -(\beta_1 - p_1); \quad \alpha_4 = -(\beta_2 - p_1);$$

$$\alpha_5 = -(\beta_1 - p_2); \quad \alpha_6 = -(\beta_2 - p_2); \quad \alpha_7 = p_1 + p_2; \quad \alpha_8 = 2p_1;$$

$$\alpha_9 = 2p_2; \quad \alpha_{10} = -2\beta_2.$$

Підставляючи вираз тепла Джоуля (20) у формулу (17), знаходимо вираз температури $T^{(n)}(r,t)$ у n-му складовому шарі циліндра

$$T^{(n)}(r,t) = \frac{k_0^2 H_0^2}{4} \sum_{p=0}^{2} \sum_{m=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{ij}^{10} \sum_{l=1} M_{ijlm}^{(n)} \frac{e^{p_m t} - e^{\alpha_l t}}{p_m - \alpha_l} r^p. \qquad (22)$$

Тут

$$M_{ijlm}^{(n)} = \sum_{s=1}^{2} b_{ps}^{(n)} \left(N_{1ijl} B_{s1m} + N_{2ijl} B_{s2m} \right); \quad N_{sijl} = \sum_{n=1}^{2} \frac{\kappa_n}{\sigma_n \lambda_n} \frac{r_n^{i+j+s-1} - r_{n-1}^{i+j+s-1}}{i+j+s-1} C_{ijl}^{(n)} \quad (s = 1, 2),$$

де $p_m (m = 1, 2)$ – корені характеристичного рівняння для системи рівнянь (14), вирази N_{sijl}, B_{sjm} - визначаються через геометричні параметри циліндра та електро- і теплофізичні характеристики матеріалів його складових шарів.

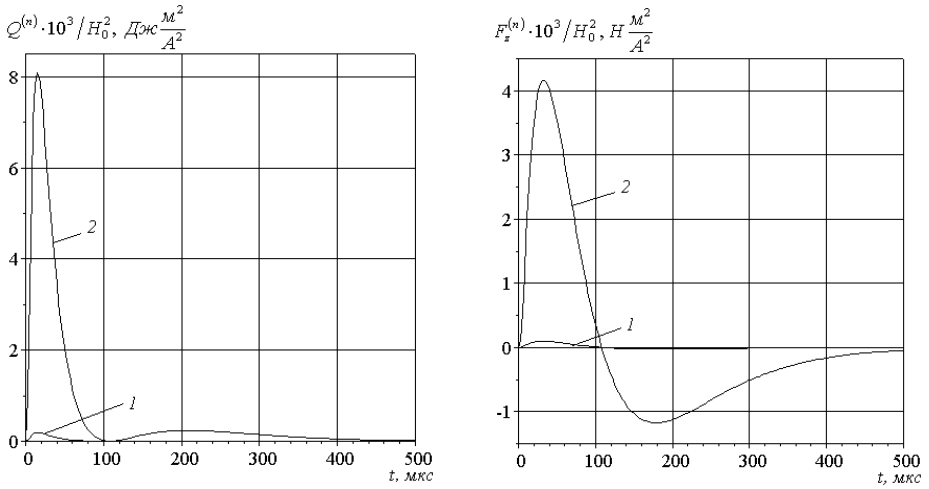
Для визначення радіальної компоненти $u_r^{(n)}(r,t)$ вектора переміщень $\vec{u}^{(n)}$ вирази радіальної компоненти $F_r^{(n)}(r,t)$ вектора пондеромоторної сили $\vec{F}^{(n)}$ (21) і температури (22) підставляємо у формулу (18). Зауважимо, що при $F_r^{(n)} = 0$ отримуємо вираз складника $u_r^{(n)Q}(r,t)$ радіальних переміщень, зумовленого теплом Джоуля. Покладаючи у формулі (18) температуру $T^{(n)} = 0$, отримуємо вираз складника $u_r^{(n)F}$ (r,t) радіальних переміщень, зумовленого пондеромоторною силою.

Компоненти $\sigma_{rr}^{(n)}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$, $\sigma_{zz}^{(n)}$ тензора напружень визначаємо за формулами (10). Далі за формулою (1) визначаємо інтенсивності напружень $\sigma_i^{(n)}$ в кожному n-му складовому шарі циліндра.

5. Дослідження термомеханічної поведінки і властивостей контактного з'єднання двошарового електропровідного циліндра за дії ЕМІ.

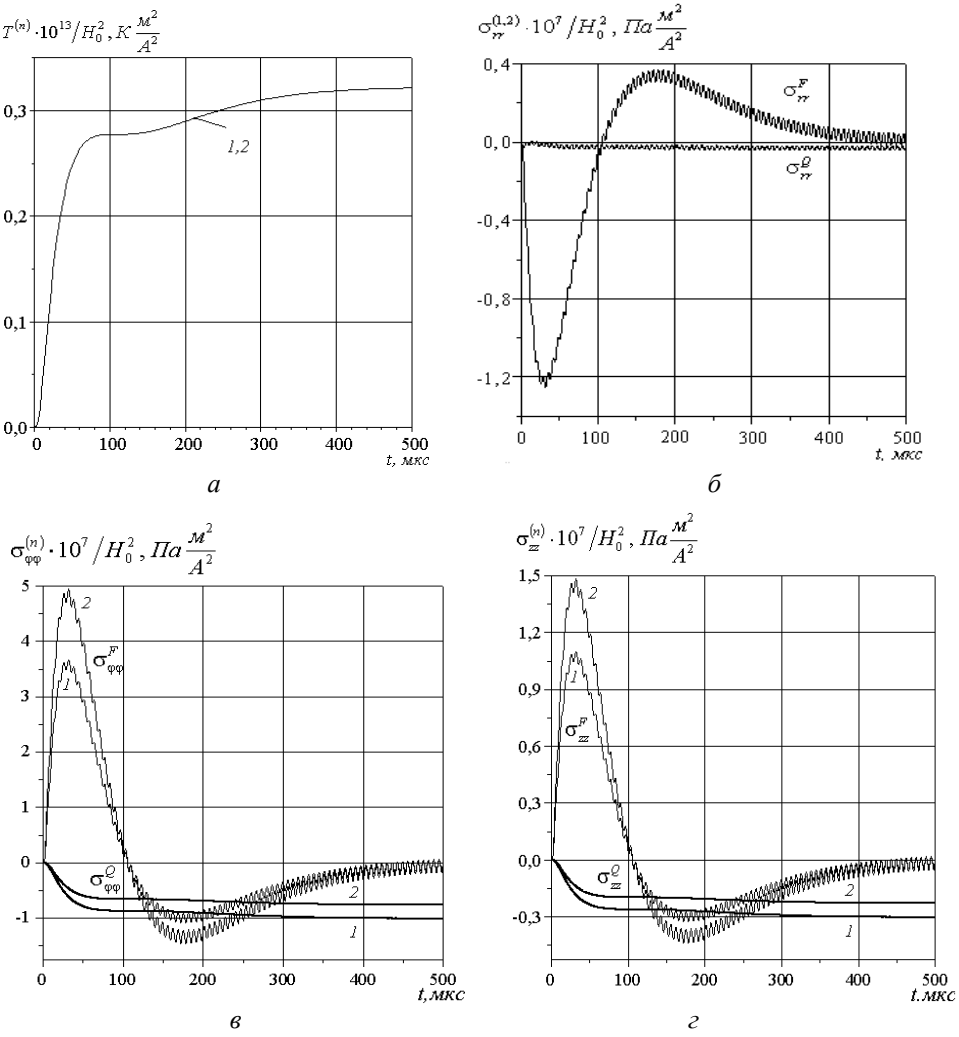
Числові дослідження проведено для двошарового електропровідного циліндра, виготовленого з неферомагнітних матеріалів: нержавіючої сталі та міді [3]. Обидва складові шари мають однакову товщину 1 мм. Тривалості t_i модулювального імпульсу електромагнітної дії в РІМС приймались рівними: $t_i = 10^{-4}$ с, 10^{-3} с, 10^{-2} с.

На рис. 1 зображено зміну в часі t тепла Джоуля $Q^{(n)}$ (рис. 1, *а*) і радіальної компоненти $F_r^{(n)}$ вектора пондеромоторної сили $\vec{F}^{(n)}$ (рис. 1, *б*) на поверхні з'єднання складових шарів циліндра. Лінії *1* відповідають значенням величин у першому (сталевому), а лінія *2* – другому (мідному) складових шарах розглядуваного циліндра.



а *б*

Рис. 1



в *г*

Рис. 2

На рис. 2 зображено зміну в часі t температури $T^{(n)}$ (рис 2, *а*) та складників $\sigma_{rr}^{(n)F}$, $\sigma_{rr}^{(n)Q}$ радіальних напружень $\sigma_{rr}^{(n)}$ (рис. 2, *б*), складників $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)F}$, $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)Q}$ колових $\sigma_{\varphi\varphi}^{(n)}$ напружень (рис. 2, *в*), складників $\sigma_{zz}^{(n)F}$, $\sigma_{zz}^{(n)Q}$ осьових $\sigma_{zz}^{(n)}$ напружень (рис. 2, *г*) на поверхні з'єднання складових шарів циліндра.

Отримано, що в початкові моменти тривалості ЕМІ всі компоненти напружень в основному визначаються дією пондеромоторної сили. При цьому радіальні напруження мають стискувальний, а колові та осьові напруження – розтягувальний характер. У моменти часу $t > 0{,}1t_i$ всі компоненти тензора напружень змінюють знак на протилежний.

Зміну в часі інтенсивностей сумарних напружень $\sigma_i^{(n)}$ на поверхні з'єднання складових шарів циліндра подано на рис. 3.

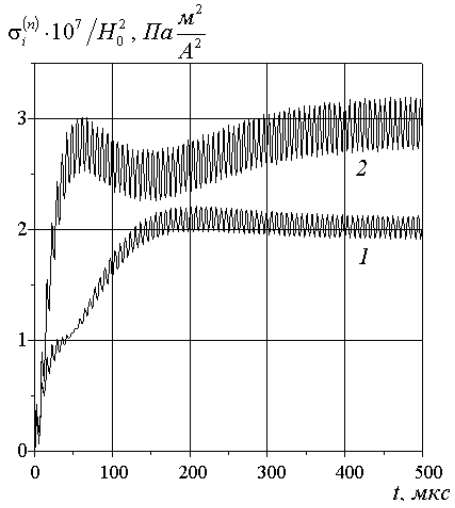


Рис. 3

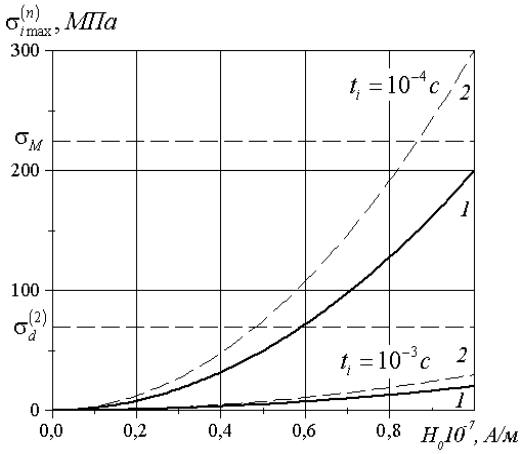


Рис. 4

На рис. 4 приведено залежності максимальних значень інтенсивностей сумарних напружень $\sigma_{i\max}^{(n)}$ від величини напруженості магнітного поля H_0 за дії ЕМІ $(H_{0\max} = 10^7$ А/м) у складових шарах циліндра на поверхні їх з'єднання за тривалостей $t_i = 10^{-3}$с, 10^{-4}с. Суцільні лінії *1* відповідають першому (сталевому), а штрихові лінії *2* – другому (мідному) складовим шарам циліндра. Горизонтальні штрихові лінії відповідають межі пружної деформації мідного шару $\sigma_d{}^{(2)} = 70$ МПа та межі міцності контактного з'єднання «сталь-мідь» $\sigma_M = 220$ МПа .

Встановлено, що зі зменшенням тривалості t_i ЕМІ величина інтенсивностей $\sigma_i^{(n)}$ напружень зростає. Перетин горизонтальних прямих $\sigma_d{}^{(2)}$ і σ_M з побудованими кривими залежностей $\sigma_{i\max}^{(n)}$ від величини H_0 за різних тривалостей t_i ЕМІ дає змогу встановити критичні значення тривалості t_i та напруженості магнітного поля H_0, за яких розглядуваний циліндр втрачає роботоздатність і властивості контактного з'єднання. Зауважимо, що роботоздатність мідного шару втрачається за величини напруженості магнітного поля $H_0 \approx 0{,}45 \cdot 10^7$ А/м. Ця величина приблизно вдвічі менша, ніж величина $H_0 \approx 0{,}9 \cdot 10^7$ А/м, за якої втрачаються властивості контактного з'єднання

за тривалості ЕМІ $t_i = 10^{-4}$ с. За тривалості ЕМІ $t_i = 10^{-3}$ с інтенсивності сумарних напружень $\sigma_i^{(n)}$ як у першому, сталевому, так і у другому, мідному, шарах при величині $H_0 \approx 1 \cdot 10^7$ А/м набагато менші за межу $\sigma_d{}^{(2)}$ пружної деформації мідного шару та за межу міцності σ_M контактного з'єднання складових шарів. При цьому інтенсивності напружень у сталевому шарі ще суттєво менші за межу $\sigma_d{}^{(1)} \approx 250$ МПа пружної деформації сталевого шару та межу міцності σ_M контактного з'єднання складових шарів розглядуваного циліндра.

Висновки.

Побудовано фізико-математичну модель для дослідження термомеханічної поведінки, роботоздатності та властивостей контактного з'єднання багатошарових циліндричних електропровідних тіл за дії ЕМІ. Сформульовано задачу термомеханіки для довгого багатошарового порожнистого електропровідного циліндра. Запропоновано методику визначення напруженості магнітного поля, температури і компонент тензора динамічних напружень з використанням поліноміальної апроксимації цих визначальних функцій по радіальній змінній у кожному складовому шарі циліндра. У результаті вихідні початково-крайові задачі на визначальні функції зведено до задач Коші на інтегральні, сумарні по пакету всіх шарів, характеристики цих функцій. Записано загальні розв'язки отриманих задач Коші за однорідної нестаціонарної електромагнітної дії з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом. Їх отримано у вигляді згорток функцій, що описують задані вирази визначальних функцій на зовнішніх поверхнях першого і останнього складових шарів розглядуваного циліндра та однорідні розв'язки відповідних задач Коші.

Досліджено термонапружений стан, роботоздатність та властивості контактного з'єднання двошарового електропровідного порожнистого циліндра за дії ЕМІ.

Отримано, що роботоздатність та властивості контактного з'єднання двошарового циліндра за дії ЕМІ тривалістю $t_i = 10^{-3}$ с зберігаються, а за тривалості $t_i = 10^{-4}$ с – втрачаються. Виявлені закономірності термомеханічної поведінки розглядуваного циліндра за дії ЕМІ можуть бути теоретичною базою для вибору оптимальних режимів технологій магніто-імпульсної обробки багатошарових електропровідних циліндричних елементів конструкцій.

РЕЗЮМЕ. Запропоновано фізико-математичну модель для дослідження термонапруженого стану, роботоздатності та властивостей контактного з'єднання багатошарового електропровідного порожнистого циліндра за дії нестаціонарного електромагнітного поля. Сформульовано задачу термомеханіки та знайдено визначальні функції (осьову компоненту вектора напруженості магнітного поля, температуру та радіальні переміщення) за допомогою поліноміальної апроксимації їх розподілів за радіальною координатою в кожному складовому шарі циліндра. Чисельно проаналізовано термомеханічну поведінку, роботоздатність та властивості контактного з'єднання двошарового електропровідного порожнистого циліндра за дії електромагнітного імпульсу.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: багатошаровий порожнистий електропровідний циліндр, електромагнітний імпульс, роботоздатність, властивості контактного з'єднання.

1. *Гачкевич О.Р., Мусій Р.С., Тарлаковський Д.В.* Термомеханіка неферомагнітних електропровідних тіл за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.

2. *Мотовиловец И.А., Козлов В.И.* Механика связанных полей в элементах конструкций: в 5 т. Т. 1. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.

3. *Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В.* Термоупругость электропроводных тел. – Киев: Наук. думка, 1977. – 248 с.
4. *Подстригач Я.С., Коляно Ю.М.* Обобщенная термомеханика. – Киев: Наук. думка, 1976. – 312 с.
5. *Asai S.* Electromagnetic Processing of Materials. – Dordrecht: Springer, 2012. – 176 p.
6. *Hachkevych O., Musii R., Melnyk N.* Problems of thermomechanics of multilayered electroconductive bodies under the action of the pulsed electromagnetic fields with modulation of amplitude // Advanced Structured Materials. – 2023. – **191**. – Advances in mechanics. – P. 185 – 206.
7. *Hachkevych O.R., Musii R.S., Melnyk N.B., Dmytruk V.A.* Dynamic thermoelastic processes in a conductive plate under the action of electromagnetic pulses of microsecond and nanosecond durations // J. of Thermal Stresses. – 2019. – **42**, N 9. – P. 1110 – 1122.
8. *Herlah F.* Pulsed Magnets // Rep. Prog. Phys. – 1999. – **62**, N 6. – P. 859 – 920.
9. *Knoepfel H.* Pulsed High Magnetic Fields. – Amsterdam: North-Holland Publ., 1970. – 372 p.
10. *Lupi S.* Fundamentals of Electroheat, Electrical Technologies for Process Heating. – Cham: Springer, 2017. – 620 p.
11. *Rudnev V., Loveless D., Cook R.L.* Handbook of Induction Heating. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 772 p.
12. *Shneerson G.A., Dolotenko M.I., Kryvosheev S.I.* Strong and Superstrong Pulsed Magnetic Fields Generation. – Berlin: Walter de Gruyter, 2014. – 439 p.
13. *Timoshenko S.P., Goodier J.N.* Theory of Elasticity. – Tokyo: McGraw-Hill Kogakusha Ltd, 1970. – 567 p.

Надійшла 01.10.2023 Затверджена до друку 11.06.2024