Г.О.Воропаєв, Я.В.Загуменний

ФОРМУВАННЯ СПРЯМОВАНИХ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ НА ПОВЕРХНІ ДЕФОРМІВНОГО ШАРУ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ*

Інститут гідромеханіки НАН України,
вул. М. Капніст, 8/4, 03057, Київ, Україна; e-mail: voropaiev.gena@gmail.com

Abstract. The numerical calculations of the kinematic and energy characteristics of viscoelastic layer under the action of impulse load are carried out. It made it possible to evaluate the perturbed surface structure of the layer and its absorption capacity for the energy of external impulse perturbations. The conditions for maximum energy absorption of impulse load are determined depending on the duration of the load action, local thickness, and mechanical parameters of the viscoelastic layer. It is shown that variability of the viscoelastic layer thickness enables controlling the perturbed surface wave structure and forming the directed surface wave fields with a particular purpose of development of effective flow control methods using deformable surfaces.

Key words: deformable surface, viscoelastic layer, impulse load, elastic waves, energy dissipation, numerical simulation, turbulent flow.

Вступ.

При русі тіл у водному або повітряному середовищах до певних швидкостей закономірності формування полів течії при виконанні подібності за числом Рейнольдса зберігають кінематичну подібність. Проте, термодинамічні навантаження на обтічні поверхні для різних середовищ суттєво відрізняються, що ставить відповідні вимоги до характеристик міцності обтічних тіл та методів, спрямованих на зниження цих навантажень.

Задача взаємодії збуреного потоку з поверхнею пасивно деформівних тіл майже завжди зводиться до задачі деформування в'язко-пружного шару під дією нестаціонарного розподіленого навантаження [1, 3]

$$P(x,\ y=\eta,\ z,\ t) = F_n(x,\ y,\ z,\ t) = a(\eta)\exp(i\alpha(x-ct)) + f_n(x,\ y, z);$$

$$\tau(x,\ y=\eta,\ z,\ t) = F_\tau(x,\ y,\ z,\ t) = b(\eta)\exp(i\alpha(x-ct)) + f_\tau(x,\ y,\ z).$$

Внаслідок впливу такого навантаження у в'язко-пружному шарі окрім вимушеного деформованого стану виникає ряд власних хвиль, які поширюються зі швидкостями, що залежать від механічних констант в'язко-пружного шару та його геометричних параметрів [1 – 3].

Вплив примежового шару на в'язко-пружне покриття зазвичай розглядається у вигляді гармонійного коливання на основі попередньої інформації про структуру турбулентного примежового шару. Такий підхід не дозволяє виявити мінливість поведінки обтічної поверхні під дією пульсаційного навантаження при скінченній довжині, змінній товщині покриття та неоднорідності поля пульсаційного навантаження на поверхні [8, 12, 13, 15].

---

* За матеріалами доповіді на Міжнародній науковій конференції «Сучасні проблеми механіки – 2023», присвяченій 145-річчю від дня народження С.П. Тимошенка, Київ, 14 – 16 листопада 2023 р.

В якості альтернативного підходу до моделювання взаємодії турбулентного потоку з деформівною обтічною поверхнею розглянуто задачу нестаціонарного деформування в'язко-пружного шару під дією локального імпульсного навантаження, параметри якого узгоджуються з характерними просторово-часовими масштабами найінтенсивніших турбулентних пульсацій у примежовому шарі.

§1. Постановка задачі.

Розглядається задача нестаціонарного деформування в'язко-пружного шару скінченної довжини та ширини і змінної товщини під дією локального імпульсного навантаження $\{P, R, Q\}$, прикладеного у певній точці на поверхні шару $\{x_{10}, 0, x_{30}\}$ (рис. 1). Кінематичні і динамічні характеристики в'язко-пружного шару визначаються з розв'язання лінеаризованих рівнянь коливання суцільного середовища, записаних у змінних Лагранжа:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \sigma_{ij,j}, \qquad (1.1)$$

де ξ_i – амплітуди переміщень вздовж відповідних осей координат; σ_{ij} – тензор напружень; ρ_s – густина середовища.

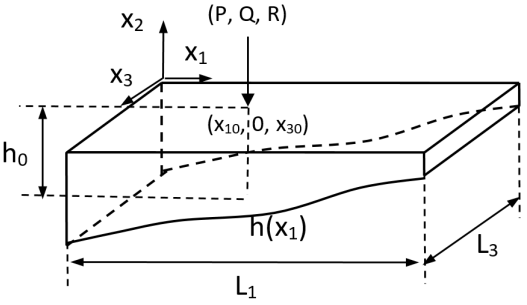


Рис. 1

Граничні умови на верхній поверхні в'язко-пружного шару задаються у вигляді:

$$\sigma_{x_2x_2}\Big|_{x_2=0} = P; \quad \sigma_{x_1x_2}\Big|_{x_2=0} = Q; \quad \sigma_{x_2x_3}\Big|_{x_2=0} = R, \qquad (1.2)$$

де P, Q, R – функції координат x_1, x_3 і часу t, які задають відповідні компоненти навантаження на поверхні в'язко-пружного шару, що прикладається миттєво і діє протягом певного проміжку часу t_0 на площадці розміром $2\ell \times 2\ell$ з центром у точці $(x_{10}, 0, x_{30})$:

$$P = -P_0;\ Q = 0;\ R = 0 \ \text{ при } \ x_{10} - \ell < x_{10} < x_{10} + \ell,\ x_{30} - \ell < x_{30} < x_{30} + \ell,\ t < t_0;$$

$$P = Q = R = 0 \ \text{ в усіх інших випадках.}$$

На нижній та бічних поверхнях в'язко-пружного шару задаються умови жорстких границь

$$\xi_i\Big|_{x_2=h(x_1)} = \xi_i\Big|_{x_1=\pm L_1} = \xi_i\Big|_{x_3=\pm L_3} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (1.3)$$

Для моделювання в'язко-пружного середовища використовується гіпотеза залежності миттєвих значень тензора напружень від усієї передісторії зміни компонентів тензора деформацій [5], що формально може бути виражено у вигляді інтегрального співвідношення між напруженнями та деформаціями [4]

$$\sigma_{ij}(\vec{x},t) = \lambda(0)\varepsilon_{ii}(\vec{x},t)\delta_{ij} + 2\mu(0)\varepsilon_{ij}(\vec{x},t) +$$

$$+\int_0^t \left[\varepsilon_{ii}(\vec{x},t-s)\frac{d\lambda(s)}{ds} + 2\varepsilon_{ij}(\vec{x},t-s)\frac{d\mu(s)}{ds} \right] ds; \qquad (1.4)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right);\ \varepsilon_{ii} = \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi_3}{\partial x_3},\ \vec{x} = (x_1, x_2, x_3).$$

Динамічний модуль зсуву моделюється функцією релаксації, яка записується у вигляді суми спадаючих експонент [4]

$$\mu(t) = \mu_0 + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \exp(-t/\tau_j), \tag{1.5}$$

а динамічний модуль $\lambda(t)$ визначається з умови рівності динамічного об'ємного модуля статичному для розглядуваних полімерних матеріалів:

$$\lambda(t) = \lambda_0 - \frac{2}{3}\sum_{j=1}^{N} \mu_j \exp(-t/\tau_j), \tag{1.6}$$

де τ_j – часи релаксації; μ_0 і λ_0 – статичний і динамічний модулі в'язко-пружного матеріалу, відповідно.

Тоді вихідна система рівнянь (1.1) для випадку коливання деформівного тіла з в'язко-пружного матеріалу, що моделюється співвідношенням між напруженнями і деформаціями (1.4) з функціями релаксації виду (1.5), (1.6), приймає наступний вигляд:

$$\rho_s \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial t^2} = \mu_0 \Delta\xi_i + (\lambda_0 + \mu_0)\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j}{\tau_j} \int_0^t \left[\Delta\xi_i + \frac{1}{3}\frac{\partial \varepsilon_{ii}}{\partial x_i} \right]_{(t-s)} e^{-s/\tau_j} ds, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.7}$$

а граничні умови на верхній поверхні в'язко-пружного шару (1.2) запишуться таким чином:

$$\lambda_0 \varepsilon_{ii}\delta_{ij} + 2\mu_0 \varepsilon_{ij} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\mu_j}{\tau_j} \int_0^t \left[-\frac{2}{3}\varepsilon_{ii}\delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij} \right]_{(t-s)} e^{-s/\tau_j} ds = \{P, Q, R\}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{1.8}$$

Отримана система інтегро-диференціальних рівнянь є досить складною для аналітичного розв'язання, тому у даній роботі застосовуються чисельні методи.

§2. Метод розв'язання.

Для чисельного розв'язання системи рівнянь (1.7) з граничними умовами (1.3) і (1.8) застосовується скінченно-різницевий метод з використанням процедури розщеплення різницевого оператора по просторовим змінним [7], при цьому шукані функції при других нормальних похідних апроксимуються півсумою значень на попередньому $(n-1)$ і наступному $(n+1)$ часових шарах, що збільшує точність схеми до 2-го порядку

$$\left\{ E - \frac{\Delta t^2}{2}\left(B_{i1}\Lambda_{11} + B_{i2}\Lambda_{22} + B_{i3}\Lambda_{33} \right) \right\} \left(\xi_i^{n+1} + \xi_i^{n-1} \right) =$$

$$= \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i1}\Lambda_{11} \right] \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i2}\Lambda_{22} \right] \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i3}\Lambda_{33} \right] \left(\xi_i^{n+1} + \xi_i^{n-1} \right) + \mathrm{O}\left(\Delta t^4 \right) = \tag{2.1}$$

$$= 2\xi_i^n + \Delta t^2 C_i^n + \Delta t^3 \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} D_{ij}^k e^{\frac{(n-k)\Delta t}{\tau_j}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

де E – одиничний оператор; Δt – крок за часом; Λ_{ij} – скінченно-різницеві оператори; C_i, B_{ij}, D_{ij} – коефіцієнти при операторах, що відповідають коефіцієнтам системи інтегро-диференціальних рівнянь (1.7) і тут не приводяться з метою скорочення.

Після введення допоміжних величин

$$\xi_i^{n+2/3} = \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i3}\Lambda_{33} \right] \left(\xi_i^{n+1} + \xi_i^{n-1} \right);$$

$$\xi_i^{n+1/3} = \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i2}\Lambda_{22} \right] \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i3}\Lambda_{33} \right] \left(\xi_i^{n+1} + \xi_i^{n-1} \right),$$

схема з розщепленим оператором (2.1) реалізується за допомогою трьохетапного алгоритму з використанням процедури одновимірної прогонки на кожному етапі

$$\left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i1}\Lambda_{11} \right] \xi_i^{n+1/3} = 2\xi_i^n + \Delta t^2 C_i^n + \Delta t^3 \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=0}^{n} D_{ij}^k e^{\frac{(n-k)\Delta t}{\bar{\tau}_j}};$$

$$\left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i2}\Lambda_{22} \right] \xi_i^{n+2/3} = \xi_i^{n+1/3}; \quad \left[E - \frac{\Delta t^2}{2} B_{i3}\Lambda_{33} \right] \xi_i^{n+1} = \xi_i^{n+2/3}, \quad i = 1,2,3 \ .$$

Розроблений чисельний алгоритм розрахунку деформування в'язко-пружного шару реалізовано у програмах власної розробки на мові програмування Фортран з можливістю проведення розрахунків у паралельному режимі на багатоядерних комп'ютерах і кластерних системах. Для перевірки працездатності розробленого алгоритму виконано його тестування на подрібненій розрахунковій сітці, що дозволило виявити оптимальну кількість вузлів сітки, на якій можна отримати адекватний чисельний результат, а також проведено порівняння отриманих чисельних результатів із даними експериментальної роботи по ударному навантаженню прямокутної пластини падаючою кулею [6]. В якості вихідних даних для розв'язання задачі деформування в'язко-пружного шару з вільними від напружень границями приймався закон зміни у часі тиску, виміряного в точці контактної взаємодії пластини і кулі. При розрахунках приймалися такі параметри: модуль пружності $E = 2{,}1 \cdot 10^{11}$ Па ; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$; густина $\rho = 7800$ кг/м^3 ; товщина, довжина і ширина шару $h_0 = 0{,}05$ м , $L_1 = L_3 = 0{,}3$ м ; радіус області контакту $r = 0{,}005$ м . Чисельні результати показали непогану узгодженість з експериментом, незважаючи на те, що величина і область прикладеного навантаження на поверхні шару передбачалися постійними у часі, тоді як насправді область контакту кулі і пластини являє собою коло зі змінним у часі радіусом, а контактна сила зростає поступово по мірі деформування пластини.

§3. Результати розрахунків.

Миттєве прикладання локального навантаження на поверхні в'язко-пружного шару призводить до формування нестаціонарного хвильового руху, характеристики якого залежать від механічних і геометричних параметрів шару та параметрів навантаження [10, 11, 14]. Проаналізовано динамічну поведінку покриттів постійної і змінної товщини, для яких в якості в'язко-пружного матеріалу розглянуто поліуретан з властивостями, що наближено описуються наступною функцією релаксації [4]:

$$\mu(t) = \mu_0 + k_\mu \sum_{j=1}^{5} \mu_j \exp(-t / 1{,}5 \cdot 10^{j-6}),$$

де $\mu_1 = 15{,}9 \cdot 10^4$; $\mu_2 = 8{,}6 \cdot 10^4$; $\mu_3 = 7{,}9 \cdot 10^4$; $\mu_4 = 6{,}3 \cdot 10^4$; $\mu_5 = 4{,}9 \cdot 10^4$; k_μ – постійний коефіцієнт, введений для можливості варіювання в'язкими властивостями матеріалу. Параметри імпульсного локального навантаження на поверхні в'язко-пружного шару визначаються із середніх величин інтенсивності, тривалості і лінійного розміру

області викидів у турбулентному примежовому шарі: $p'_{cp} \approx K_p \cdot \rho_f \cdot u_*^2$; $t_0 \approx 25\nu/u_*^2$; $2\ell \approx 100\nu/u_*$, де $u_* = \sqrt{\tau_w/\rho_f}$ – динамічна швидкість; τ_w – напруження зсуву на поверхні; $K_p \sim 2{,}5 \div 6$ – параметр Крейчнана, що зв'язує інтенсивність пульсацій тиску з напруженням зсуву; ρ_f і ν – густина і кінематична в'язкість рідини, відповідно [9]. З характерних величин рідини і параметрів пульсацій у турбулентному потоці: $\rho_f \approx 1000$ кг/м^3 ; $\nu \approx 10^{-6}$ м^2/с ; $u_* \approx 0{,}4$ м/с ; $\tau_w \approx 160$ Па , визначаються параметри імпульсного навантаження, що прикладається на поверхні в'язко-пружного шару: $P_0 \approx 1000$ Па ; $t_0 \approx 2 \cdot 10^{-4}$ с ; $2\ell \approx 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ м . При розрахунку в'язко-пружного шару під дією імпульсного навантаження густина матеріалу приймалася: $\rho_s = 1000$ кг/м^3 , а величини його безрозмірних механічних параметрів варіювалися в діапазонах: $\mu_0/P_0 = 20 \div 320$; $\lambda_0/P_0 = 180 \div 3000$; $k_\mu = 0 \div 4$.

На рис. 2 представлені результати розрахунку нестаціонарної поведінки поверхні в'язко-пружного шару постійної товщини під дією навантаження, що прикладається миттєво і триває певний проміжок часу, для наступних величин параметрів шару і навантаження:

$$\mu_0/P_0 = 80\,; \quad \lambda_0 = 9\mu_0\,; \quad k_\mu = 1\,; \quad h_0/L_1 = 0{,}1\,; \quad L_1 = L_3 = 0{,}1 \text{ м}\,;$$

$$P_0 = 1000 \text{ Па}\,; \quad t_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ с}\,; \; 2\ell = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ м}\,.$$

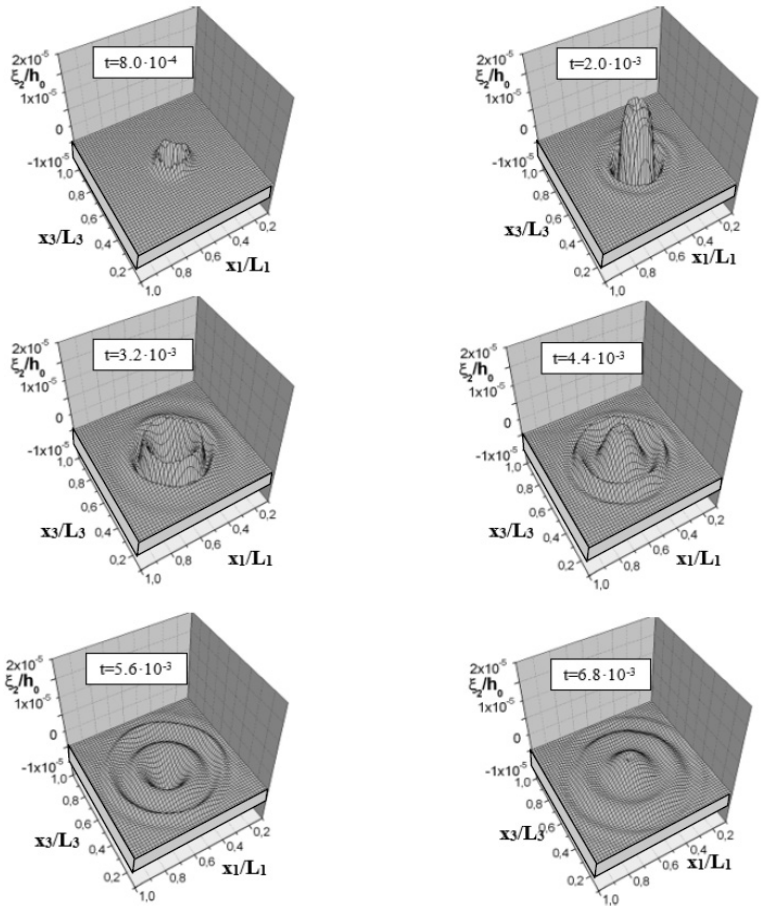
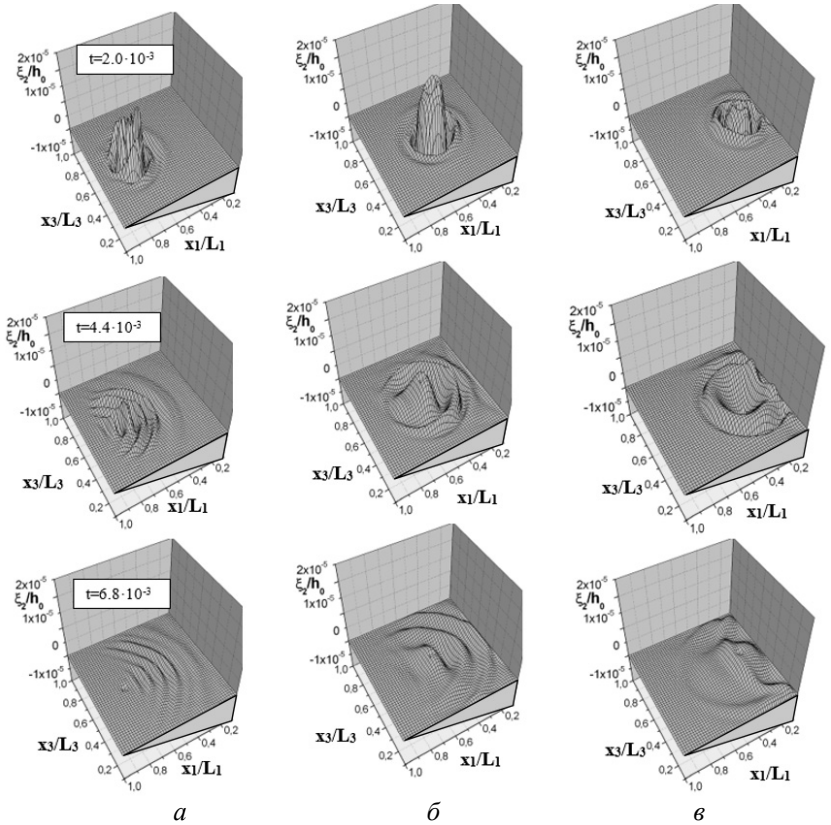


Рис. 2

Початковий етап формування хвильового поля на поверхні шару природно не залежить від геометрії покриття в плані, але, досягнувши жорстких бічних стінок, поверхневі хвилі відбиваються, змінюючи фазу і починають поширюватися у зворотному напрямку, взаємодіючи з хвилями, що рухаються від центру шару. У кутових областях поверхні шару відбувається складніший процес відбиття від жорстких границь, оскільки має місце взаємний вплив поверхневих хвиль, відбитих від суміжних бічних границь, що проявляється у відмінності форм фронтів первинної і відбитої поверхневих хвиль. Нестаціонарна поведінка поверхні шару в області навантаження визначається тривалістю його прикладання, товщиною шару в точці навантаження і швидкістю поширення нормальної хвилі у в'язко-пружному матеріалі. Кожен наступний прихід на поверхню відбитої хвилі генерує послідовні прогини та спучування поверхні, інтенсивність яких зменшується з часом, внаслідок дії в'язкості та перерозподілу сприйнятої в'язко-пружним шаром енергії на більші об'єми. Перевідбита нормальна хвиля навантаження формує періодичні затухаючі коливання поверхні в області початкового імпульсу, які генерують поверхневі хвилі, що поширюються від джерела збурення симетрично у всіх напрямках для випадку шару постійної товщини.

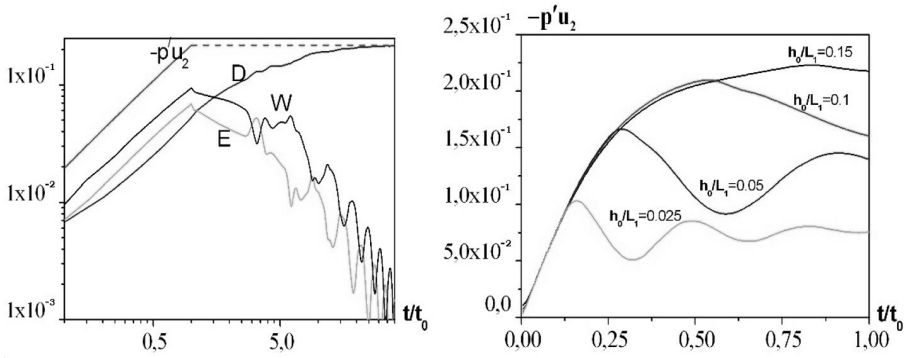
При змінній товщині в'язко-пружного покриття (клиноподібний шар) на його поверхні формується спрямоване хвильове поле подібне до активно генерованої біжучої хвилі, що може взаємодіяти з власними збуреннями примежового шару і суттєво впливати на його структуру. При цьому, хвильова картина на поверхні шару змінної товщини істотно залежить від місця прикладання навантаження на поверхні (рис. 3, *а – в*). Так, при зміщенні навантаження у бік звуження клину первинне спучування поверхні починає формуватися у більш ранні часи і має більші амплітуди, що призводить до значного зростання динамічної шорсткості поверхні. Наступні спучування зміщуються все далі у бік розширення клину і загасають тим швидше, чим менша локальна товщина шару в місці початкового навантаження.



а *б* *в*

Рис. 3

На рис. 4, *а* представлено залежності від часу інтегральних величин безрозмірних складових енергетичного балансу у в'язко-пружному шарі, віднесених до локальних величин пульсацій тиску у примежовому шарі і динамічної швидкості потоку. Сума механічної (*W*+*E*) і дисипованої (*D*) енергій в'язко-пружного шару у кожний момент часу дорівнює сприйнятій ним енергії імпульсного навантаження, що свідчить про виконання енергетичного балансу у шарі та є одним із підтверджень достовірності отриманих чисельних результатів. В нестаціонарному процесі повна механічна енергія деформівного тіла визначається сумою двох її складових: кінетичною енергією (*E*), яка безпосередньо пов'язана зі швидкістю деформації тіла, і потенційною (*W*), що визначається його миттєвим напружено-деформівним станом. Протягом всього інтервалу дії навантаження кінетична енергія перевищує потенційну для розглянутих величин механічних та геометричних параметрів шару. Після припинення дії навантаження, коли в'язко-пружний шар починає здійснювати вільні коливання, розподіл кінетичної і потенційної енергії в покритті та їх сумарне значення визначаються хвильовою картиною поширюваних нормальних і зсувних хвиль. До певного моменту часу інтегральні значення цих енергій практично не корелюють між собою, що говорить про неусталене хвилеве поле у в'язко-пружному шарі. Проте, починаючи з певного моменту часу, максимуми кінетичної і потенційної енергій розташовуються в протифазі відносно один одного, що свідчить про початок усталеного хвильового руху в шарі з періодичним обміном енергії з частотою товщинного резонансу шару.

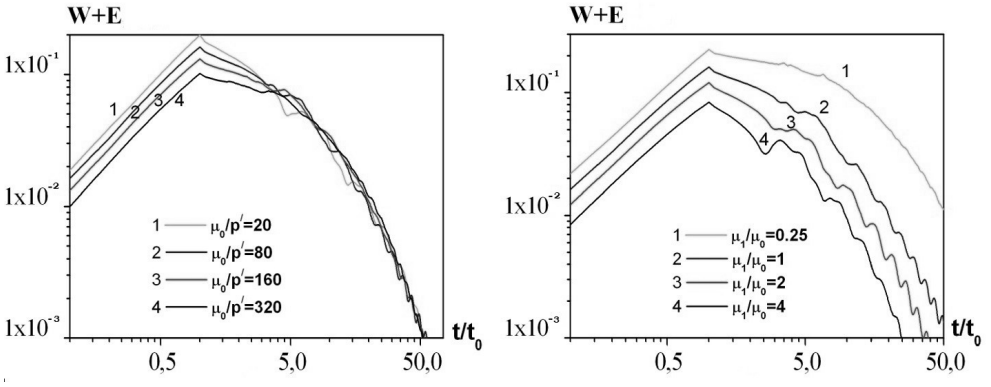


а *б*

Рис. 4

Кількість сприйнятої енергії в'язко-пружним шаром постійної товщини за час дії навантаження знаходиться в оберненій пропорційності до величин статичного і динамічного модулів, але в прямій пропорційності до величини навантаження і тривалості його дії, незалежно від точки його прикладання. Проте, зростання сприйнятої енергії зі збільшенням тривалості дії навантаження відбувається тільки до певного часу, що залежить від товщини шару в точці прикладання навантаження і об'ємного модуля матеріалу шару. Це пов'язано з тим, що прихід відбитої від жорсткої нижньої границі нормальної хвилі на поверхню в'язко-пружного шару, тобто з моменту часу $t > 2h_0/C_\lambda$, припиняє процес сприйняття енергії зовнішнього збурення в лінійному режимі. З цього моменту зовнішній тиск взаємодіє і з відображеною нормальною хвилею на поверхні, в результаті чого величина сприйнятої покриттям енергії перестає збільшуватися, а починає коливатись з періодом товщинного резонансу і спадаючою амплітудою, оскільки наступні відбиті хвилі завжди меншої інтенсивності (рис.4, *б*).

На рис. 5 представлено часові залежності безрозмірних інтегральних величин повної механічної енергії в'язко-пружного шару для різних величин статичного і динамічного модулів деформівного матеріалу. Механічна енергія, що накопичується в'язко-пружним шаром на початковому етапі дії навантаження, обернено пропорційна величинам статичного і динамічного модулів, тому в момент припинення дії навантаження шар накопичує різну кількість енергії для різних величин модулів. Проте, як видно з



а *б*

Рис. 5

приведених кривих на рис. 5, *а*, через певний час після припинення дії навантаження залишкові величини енергії практично співпадають для різних значень статичного модуля матеріалу шару при фіксованій величині динамічного, що пояснюється слабкою залежністю швидкості дисипації енергії від пружних властивостей матеріалу. Тоді як збільшення тільки динамічної складової модуля матеріалу в'язко-пружного шару при фіксованій величині статичного призводить як до зменшення кількості накопиченої енергії, так і до зростання швидкості дисипації енергії після припинення дії навантаження.

Висновок.

На основі чисельного розв'язання нестаціонарної задачі деформування в'язко-пружного шару змінної товщини під дією імпульсного навантаження визначено його кінематичні й енергетичні характеристики, що, зокрема, при розгляді задачі обтікання поверхні шару потоком рідини дає можливість враховувати не тільки його схвильовану поверхню, а й поглинаючу здатність енергії збурень потоку. Сприйнята енергія і кількість дисипованої енергії в'язко-пружного шару знаходяться у строгому миттєвому балансі, а структура їх залежностей у часі відображає складні нестаціонарні процеси взаємодіючих відбитих нормальних і зсувних хвиль. Енергія імпульсного навантаження практично перестає сприйматися в'язко-пружним шаром після досягнення відбитою нормальною хвилею поверхні шару, що дозволяє визначити умову максимального поглинання енергії навантаження в залежності від його тривалості, локальної товщини та механічних параметрів в'язко-пружного шару. Змінність товщини в'язко-пружного шару суттєво впливає на характер нестаціонарних хвильових процесів в шарі, що відкриває можливості керування структурою поверхневих хвильових збурень з метою формування спрямованих хвильових полів на поверхні шару, зокрема, для ефективної реалізації методів керування потоком рідини з використанням деформівних поверхонь.

РЕЗЮМЕ. Виконано розрахунки кінематичних та енергетичних характеристик в'язкопружного шару під дією імпульсного навантаження, на основі яких проведено оцінки структури схвильованої поверхні шару та його здатність поглинати енергію зовнішніх імпульсних збурень. Визначено умови максимального поглинання енергії імпульсного навантаження в залежності від тривалості дії навантаження, локальної товщини та механічних параметрів в'язкопружного шару. Змінність товщини в'язкопружного шару дозволяє керувати хвильовою структурою збуреної поверхні і формувати спрямовані поверхневі хвильові поля, зокрема, з метою розробки ефективних методів керування течією з використанням деформівних поверхонь.

КЛЮЧОВІ СЛОВА: деформівна поверхня, в'язко-пружний шар, імпульсне навантаження, пружні хвилі, дисипація енергії, чисельне моделювання, турбулентний потік.

1. *Веденєєв В.В.* Розповсюдження хвиль у шарі в'язко-пружного матеріалу, що підстилає шар рухливої рідини // Прикл. математика і механіка. – 2016. – **80**, № 3. – С. 317 – 343.
2. *Воропаєв Г.О., Загуменний Я.В.* Динамічні і кінематичні характеристики в'язко-пружного шару змінної товщини під дією імпульсного навантаження // Акустичний вісник. – 2005. – **8**, № 4. – С. 29 – 38.
3. *Воропаев Г.А., Попков В.И.* Энергетические и кинематические характеристики распространения волн в вязкоупругом многослойном полом цилиндре // Прикл. механика. – 1988. – **24**, № 7. – С. 43 – 48.
4. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязко-упругости. – Москва: Мир. 1974. – 338 с.
5. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – Москва: Наука, 1977. – 472 с.
6. *Филиппов А.П., Скляр В.А.* Поперечный удар по прямоугольной плите с учетом инерции вращения и перерезывающих сил // Динамика и прочность машин. – 1972. – **14**. – С. 12 – 19.
7. *Яненко Н.Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967. – 197 с.
8. *Kim E., Choi H.* Space-time characteristics of a compliant wall in a turbulent channel flow // J. Fluid Mechanics. – 2014. – **756**. – P. 30 – 53.
9. *Meng J.C.S.* Engineering insight of near-wall microturbulence for drag reduction and derivation of a design map for seawater electromagnetic turbulence control // Proc. Int. Symp. on Seawater Drag Reduction. – Newport, USA, 1998. – P. 336 – 358.
10. *Rabbi M.F., Chalivendra V.B.* Mathematical modeling of viscoelastic material under impact load // J. Strain Analysis for Engng. Design. – 2019. – **54**, N 2. – P. 130 – 138.
11. *Townsend P., Juan C.S., Paz P., Nadia M.* Insertion of a viscoelastic layer to reduce the propagation of energy by vertical impacts of slamming in planning hull vessels // Key Engng. Materials. – 2021. – **889**. – P. 65 – 70.
12. *Voropaiev G.A., Zagumennyi Ya.V.* Boundary layer perturbations generated by locally deformable surface // Int. J. Fluid Mechanics Research. – 2019. – **46**, N 4. – P. 325 – 335.
13. *Voropaev G.A., Zagumennyi Ia.V.* Wave and vortex structure of transitional boundary layer over deformable surface // Physica Scripta. – 2010. – **142**. – 014010.
14. *Yamamoto T., Minato T.* Theory of energy dissipation in a viscoelastic body under time-dependent stress // Advances in Space Research. – 2007. – **39**, N 3. – P. 472 – 476.
15. *Zhang C., Wang J., Blake W., Katz J.* Deformation of a compliant wall in a turbulent channel flow // J. Fluid Mechanics. – 2017. – **823**. **–** P. 345 – 390.

Надійшла 31.10.2023 Затверджена до друку 11.06.2024